DS02 du 29/09/2026 (3h)
Sujet A (MPI*)

Exercice 1 : Réorganisation des termes d'une série semi-convergente

1. (a) **Principe de l'algorithme** : on s'arrange pour choisir les indices s_n de façon que les sommes partielles S_n "oscillent" autour de x et que $S_n \to x$. Pour ce faire, on choisit le premier indice pair non utilisé si l'on est en-dessous de x (on ajoute alors un terme u_{2k} positif) et le premier indice impair sinon (on ajoute alors un terme u_{2k+1} négatif). Les suites (p_n) et (q_n) permettent de savoir quel est le dernier indice pair ou impair utilisé ($2p_n$ ou $2q_n - 1$).

   (b) **Exécution pas à pas** : pour $x = -1$, on obtient :

n	p_n	q_n	s_n	$S_n = S_{n-1} + u_{s_n}$
0	0	0		$0 > x$
1	0	**1**	1	$-1 \leq x$
2	**1**	1	2	$-1/2 = -0.5 > x$
3	1	**2**	3	$-5/6 \simeq -0.83 > x$
4	1	**3**	5	$-31/30 \simeq -1.03 \leq x$
5	**2**	3	4	$-47/60 \simeq -0.78 > x$
6	2	**4**	7	$-389/420 \simeq -0.93 > x$

2. (a) On procède par récurrence sur n.
   - Initialement, on a $q_1 = s_1 = 1$, $S_1 = -1$ et $p_1 = 0$ (cas $x < 0$) ou $p_1 = 1$, $s_1 = 2$, $S_1 = 1/2$ et $q_1 = 0$ (cas $x \geq 0$). Dans les deux cas, on a la propriété voulue pour $n = 1$.
   - Supposons le résultat vrai jusqu'à un rang $n \geq 1$. On doit encore distinguer deux cas.
     - Si $S_n > x$ alors $q_{n+1} = 1 + q_n$, $p_{n+1} = p_n$, $s_{n+1} = 2q_{n+1} - 1$ et $S_{n+1} = S_n + u_{s_{n+1}}$ et on a les relations voulues.
     - Si $S_n \leq x$ alors $q_{n+1} = q_n$, $p_{n+1} = 1 + p_n$, $s_{n+1} = 2p_{n+1}$ et $S_{n+1} = S_n + u_{s_{n+1}}$ et on a les relations voulues.

   (b) On en déduit que
   $$\mathrm{card}\{s(1), \dots, s(n)\} = p_n + q_n = n$$
   ce qui indique que les $s(k)$ sont deux à deux distincts et que s est injective (si $s(a) = s(b)$ avec $a < b$ alors l'ensemble $\{s(1), \dots, s(b)\}$ contient au plus $b - 1$ éléments).

3. (a) Soit (m_n) une suite d'entiers qui converge vers une limite ℓ. Par définition des limites (avec $\varepsilon = 1/3 > 0$)
   $$\exists\, n_0 /\ \forall n \geq n_0,\ |m_n - \ell| \leq 1/3$$
   Par inégalité triangulaire, on a $|m_n - m_r| \leq 2/3$ pour $n, r \geq n_0$ et comme on a des termes entiers, $m_r = m_n$ pour $n, r \geq n_0$. La suite est donc constante à partir du rang n_0.

   (b) La suite (p_n) est croissante (puisque p_{n+1} est égal à p_n ou à $1 + p_n$). Si elle est majorée, elle converge. Etant composée d'entiers, elle stationne à partir d'un certain rang n_0. Par définition, on a donc pour tout $n \geq n_0$, $S_n > x$ et $q_{n+1} = 1 + q_n$ ce qui donne (par récurrence) $q_n = n - n_0 + q_{n_0}$. De plus, pour $n \geq n_0$, $s_{n+1} = 2q_{n+1} - 1 = 2n - 2n_0 + 2q_{n_0} - 1$. Ainsi,
   $$\forall n \geq n_0,\ S_n = S_{n_0} + \sum_{k=n_0+1}^{n} u_{s_k} = S_{n_0} - \sum_{k=n_0+1}^{n} \frac{1}{2k - 2n_0 + 2q_{n_0} - 1}$$
   Le changement d'indice $j = k-1$ donne la formule voulue. La série associée à $\left(\frac{1}{2k-2n_0+2q_{n_0}+1}\right)_{k \geq n_0}$ est divergente positive et ses sommes partielles tendent vers $+\infty$. L'égalité ci-dessus donne alors $S_n \to -\infty$ ce qui contredit $S_n > x$ pour tout $n \geq n_0$. La suite (p_n) étant croissante et non majorée, le théorème de limite monotone indique que $p_n \to +\infty$.

(c) Le raisonnement est identique pour montrer que (q_n) est de limite infinie : c'est une suite croissante ; si elle est majorée alors elle converge et stationne à partir d'un rang n_0 ; pour $n \geq n_0$, on a $S_n \leq x$ et $S_n \to +\infty$ ce qui est incompatible.

(d) Comme $0 \leq p_{n+1} - p_n \leq 1$ et $p_n \to +\infty$, les p_n décrivent tout $\mathbb{N}$. Il en est de même des q_n. Avec l'identité ensembliste de 2.(a), on en déduit que tout entier non nul est atteint par s (et pour un entier non nul car $s(0) = 0$). s est donc surjective de $\mathbb{N}^*$ dans lui même. On a aussi vu l'injectivité et on a donc la bijectivité.

4. (a) On distingue deux cas.
- Si $S_n > x$ alors $u_{s_{n+1}} < 0$ car s_{n+1} est impair et

$$u_{s_{n+1}} \leq S_{n+1} - x = S_n + u_{s_{n+1}} - x \leq S_n - x$$

- Si $S_n \leq x$ alors $u_{s_{n+1}} \geq 0$ car s_{n+1} est pair et

$$S_n - x \leq S_{n+1} - x = S_n + u_{s_{n+1}} - x \leq u_{s_{n+1}}$$

$a \leq b \leq c$ entraînant $|b| \leq \max(|a|, |c|)$, on a donc dans tous les cas

$$|S_{n+1} - x| \leq \max(|S_n - x|, |u_{s_{n+1}}|)$$

ce qui correspond à l'alternative demandée.

(b) Soit N un entier naturel. On ne peut avoir $\forall n > N,\ S_n > x$ (sinon, comme en 3.(b) on obtient une contradiction) et on ne peut avoir non plus $\forall n > N,\ S_n \leq x$ (cette fois comme en 3.(c)). On peut, par exemple, trouver $n > N$ tel que $S_{n+1} \leq x < S_n$ (ou l'inverse). On a alors s_{n+1} impair et $u_{s_{n+1}} < 0$ et $S_{n+1} = S_n + u_{s_{n+1}} \leq x < S_n$. En particulier, $|S_{n+1} - x| = x - S_{n+1} = x - S_n - u_{s_{n+1}} < -u_{s_{n+1}} = |u_{s_{n+1}}|$.

(c) Comme (p_n) est de limite infinie, p_n finit par être plus grand que 1 (pour $n \geq n_1$). De même, q_n finit par être plus grand que 1 et

$$\forall n \geq \max(n_1, n_2),\ p_n \geq 1 \ \text{ et } \ q_n \geq 1.$$

(d) Comme s_{n+1} vaut soit $2p_{n+1}$ soit $2q_{n+1} - 1$, la question 4.(a) montre que

$$|S_{n+1} - x| \leq \max(|S_n - x|, |u_{s_{n+1}}|) \leq \max(|S_n - x|, |u_{2p_{n+1}}|, |u_{2q_{n+1}-1}|) = v_n$$

De plus, la croissance de p_n et q_n ainsi que la décroissance de $|u_n|$ donnent

$$|u_{2p_{n+2}}| \leq |u_{2p_{n+1}}| \leq v_n \ \text{ et } \ |u_{2q_{n+2}-1}| \leq |u_{2q_{n+1}-1}| \leq v_n$$

On en déduit finalement que

$$v_{n+1} = \max(|S_{n+1} - x|, |u_{2p_{n+2}}|, |u_{2q_{n+2}-1}|) \leq v_n$$

La suite (v_n) est décroissante et minorée (par 0) et donc converge vers un réel $\ell \geq 0$.
Avec 4.(b),

$$\forall N,\ \exists n_N > N /\ 0 \leq v_{n_N} \leq u_{s(n_N+1)}$$

Quand $N \to +\infty$, $n_N \to +\infty$ et on peut passer à la limite ci-dessus (les termes admettent une limite) et on obtient

$$\lim_{N \to +\infty} v_{n_N} = 0,$$

ce qui montre que $\ell = 0$ (par unicité de la limite de la suite extraite $(v_{n_N})_N$).
Finalement, (v_n) converge bien vers 0.

(e) En particulier $0 \leq |S_n - x| \leq v_n \to 0$ et $S_n \to x$, ce que l'on voulait prouver (on a exhibé une bijection s telle que $\sum_{n=1}^{\infty} u_{s(n)} = x$).

5. (a) Soit $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$. On a

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \sim -\frac{1}{2(n+1)^2}$$

$\sum(u_{n+1}-u_n)$ est ainsi absolument convergente et donc aussi convergente. Comme

$$\sum_{k=1}^{n-1}(u_{k+1}-u_k) = u_n - u_1$$

on en déduit que (u_n) converge. En notant γ sa limite, on a alors

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$$

(b) On a alors

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1} = \sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k} = \ln(2n) - \frac{1}{2}\ln(n) + \frac{\gamma}{2} + o(1) = \frac{1}{2}\ln(n) + \ln(2) + \frac{\gamma}{2} + o(1)$$

(c) On procède par récurrence sur n.
- Comme en 2.(a), le résultat est initialement vrai, suivant que $x > 0$ ou $x \leq 0$.
- Supposons le résultat vrai jusqu'à un rang $n \geq 1$. Si $S_n > x$ alors on ajoute $u_{2q_{n+1}-1} = -\frac{1}{2q_{n+1}-1}$ et $p_{n+1} = p_n$. Sinon, on ajoute $u_{2p_{n+1}} = \frac{1}{2p_{n+1}}$ et $q_{n+1} = q_n$. La formule reste donc toujours vraie au rang $n+1$.

(d) Comme p_n et q_n tendent vers $+\infty$, on a

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2}\left(\ln(p_n) + \gamma + o(1)\right) - \left(\frac{1}{2}\ln(q_n) + \ln(2) + \frac{\gamma}{2} + o(1)\right) \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{p_n}{q_n}\right) - \ln(2) + o(1) \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{p_n}{n-p_n}\right) - \ln(2) + o(1) \end{aligned}$$

(e) Comme $S_n \to x$, on a (continuité de exp) $\frac{p_n}{n-p_n} \to 4e^{2x}$ c'est à dire $\frac{n}{p_n} \to \frac{e^{-2x}}{4} + 1$ ou encore

$$p_n \sim \frac{4n}{e^{-2x}+4}$$

et de la même façon (en remplaçant p_n par $n - q_n$ dans la formule de la question précédente)

$$q_n \sim \frac{n}{1+4e^{2x}}$$

(f) On prouve comme en 5.(c) que

$$\sum_{k=1}^{n}|u_{s_n}| = \sum_{k=1}^{p_n}\frac{1}{2k} + \sum_{k=1}^{q_n}\frac{1}{2k-1}$$

et, comme en 5.(d), on obtient alors

$$\sum_{k=1}^{n}|u_{s_n}| = \frac{1}{2}\ln(p_n q_n) + \gamma + \ln(2) + o(1) \sim \frac{1}{2}\ln(p_n q_n)$$

Quand $x_n \to +\infty$ et $x_n \sim y_n$ alors $\ln(y_n) = \ln(x_n(1+o(1))) = \ln(x_n) + o(1) \sim \ln(x_n)$. On a donc ici

$$\ln(p_n q_n) \sim \ln\left(\frac{4n^2}{(4+e^{-2x})(1+4e^{2x})}\right) \sim 2\ln(n)$$

et donc

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{|u_{s_1}| + \cdots + |u_{s_n}|}{|u_1| + \cdots + |u_n|} = 1$$

(numérateur et dénominateur sont tous deux équivalents à $\ln(n)$).

* * *

Exercice 2 : Cyclicité de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$

1. Voir le cours ! (CH3).
2. Montrons que xy est d'ordre st sous l'hypothèse que s et t sont premiers entre eux, x d'ordre s et y d'ordre t : soit d l'ordre de xy. Comme G est commutatif, on a $(xy)^k = x^k y^k$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Or $x^{st} = e$ car x est d'ordre s, et de même $y^{st} = e$, donc : $(xy)^{st} = e$. On en déduit que d divise st.
   De plus, $(xy)^d = x^d y^d = e$, donc : $x^d = y^{-d}$, puis : $x^{dt} = y^{-dt} = e$, donc l'ordre de x divise dt, c'est-à-dire : s divise dt. Or s et t sont premiers entre eux, donc s divise d. On montre de même que t divise d et donc, comme s et t sont premiers entre eux : st divise d.
   Puisque d et st sont associés et positifs, on en déduit : $d = st$. Ainsi xy est bien d'ordre st.
3. On décompose s et t en nombres premiers :
$$s = \prod_{p \text{ premier}} p^{\alpha_p}, \quad t = \prod_{p \text{ premier}} p^{\beta_p},$$
   où les α_p sont presque tous nuls (et de même pour les β_p). Avec ces notations, on a :
$$\text{ppcm}(s,t) = \prod_{p \text{ premier}} p^{\max(\alpha_p,\beta_p)} = \prod_{\substack{p \text{ premier} \\ \alpha_p > \beta_p}} p^{\alpha_p} \times \prod_{\substack{p \text{ premier} \\ \alpha_p \leqslant \beta_p}} p^{\beta_p}.$$
   Donc, si l'on pose :
$$s' = \prod_{\substack{p \text{ premier} \\ \alpha_p > \beta_p}} p^{\alpha_p}, \text{ et : } t' = \prod_{\substack{p \text{ premier} \\ \alpha_p \leqslant \beta_p}} p^{\beta_p},$$
   alors :
   — s' divise s ;
   — t' divise t ;
   — $s't' = \text{ppcm}(s,t)$;
   — s' et t' sont premiers entre eux parce qu'ils n'ont pas de diviseur premier en commun.
   De plus, il est facile de vérifier que $x^{\frac{s}{s'}}$ est d'ordre s' et $y^{\frac{t}{t'}}$ d'ordre t'. D'après la question précédente, le produit $z = x^{\frac{s}{s'}} y^{\frac{t}{t'}}$ est d'ordre $s't' = \text{ppcm}(s,t)$: d'où le résultat.
   Remarque. Attention, en général $z = xy$ ne convient pas : il suffit de prendre x quelconque d'ordre $s \geqslant 2$ et $y = x^{-1}$ (qui est aussi d'ordre s) pour s'en convaincre : le produit xy est, dans ce cas, égal à l'élément neutre et est donc d'ordre $1 \neq \text{ppcm}(s,s)$.
4. Notons t l'ordre de h. Soit $x \in G$, et notons s son ordre. D'après la question précédente, il existe un élément de G d'ordre $\text{ppcm}(s,t)$; mais $\text{ppcm}(s,t) \geqslant t$, et par hypothèse t est l'ordre maximal d'un élément de G. Ceci impose : $\text{ppcm}(s,t) = t$, c'est-à-dire : s divise t.
   On a ainsi démontré que l'ordre de tout élément de G divise l'ordre de h.
5. **Attention : l'énoncé ne l'indique pas, mais p est un nombre premier !**
   (a) Le cours dit que $\text{card}(G) = \varphi(p)$ (l'indicatrice d'Euler). De plus, p est premier donc $\text{card}(G) = p - 1$.
   (b) Soit d l'ordre maximal d'un élément de $G = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$: démontrons que $d = \text{card}\,(G) = p-1$. On a bien sûr $d \leqslant p-1$, et de plus, la question 4. implique
$$\forall x \in G, \quad x^d = 1.$$
   On en déduit que le polynôme $X^d - \overline{1} \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$ a au moins, pour racines, tous les éléments de G ; il a donc au moins $p-1$ racines. Or il est à coefficients dans un corps, donc il ne peut pas avoir plus de racines que son degré. Par conséquent : $d \geqslant p-1$. On en déduit : $d = p-1$. Il existe donc un élément d'ordre $p-1$ dans G : par conséquent il engendre G, qui est cyclique.
   Remarque. On peut montrer plus généralement qu'un sous-groupe fini du groupe multiplicatif d'un corps commutatif est cyclique.

* * *

Exercice 3 : Sommation d'Abel et séries de Dirichlet

1. La fonction $x \mapsto S_f(x) = \sum_{n=1}^{\lfloor x \rfloor} f(n)$ est en escalier, car nulle sur $[0,1[$ et constante égale à $f(1)+\cdots+f(N)$ sur chaque intervalle $[N, N+1[$ avec $N \in \mathbb{N}^*$. Donc elle est *a fortiori* continue par morceaux sur $\mathbb{R}^+$.

2. Soit $x \geqslant 1$ réel. L'application S_h est constante par morceaux, égale à $S_h(n)$ sur $[n, n+1[$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; on peut donc écrire :

$$\begin{aligned}\int_1^x S_h(t)g'(t)\mathrm{d}t &= \sum_{1\leqslant n\leqslant [x]-1} \int_n^{n+1} S_h(t)g'(t)\mathrm{d}t + \int_{[x]}^x S_h(t)g'(t)\mathrm{d}t \\ &= \sum_{1\leqslant n\leqslant [x]-1} S_h(n)\int_n^{n+1} g'(t)\mathrm{d}t + S_h([x])\int_{[x]}^x g'(t)\mathrm{d}t \\ &= \sum_{1\leqslant n\leqslant [x]-1} S_h(n)(g(n+1)-g(n)) + S_h([x])g(x) - S_h([x])g([x]) \\ &= \sum_{1\leqslant n\leqslant [x]-1} S_h(n)g(n+1) - \sum_{1\leqslant n\leqslant x} S_h(n)g(n) + S_h(x)g(x) - S_h([x])g([x]).\end{aligned}$$

Il suffit alors de faire le changement d'indice de sommation $n \mapsto n+1$ dans la première somme du membre de droite, et d'utiliser le fait que $S_h(n) - S_h(n-1) = h(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour reconnaître la formule de sommation attendue :

$$\int_1^x S_h(t)g'(t)\mathrm{d}t - S_h(x)g(x) = -\sum_{1\leqslant n\leqslant x} h(n)g(n).$$

3. Soit $s > \alpha$. Pour tout $x \geqslant 1$, la sommation d'Abel avec $g : n \mapsto \dfrac{1}{n^s}$ et $h = f$ implique :

$$\sum_{1\leqslant n\leqslant x} \frac{f(n)}{n^s} = \frac{S_f(x)}{x^s} + s\int_1^x \frac{S_h(t)}{t^{s+1}}dt. \tag{1}$$

Par hypothèse, pour tout $x \geqslant 1$ on a : $|S_f(x)| \leqslant Mx^\alpha$. Donc pour tout $x \geqslant 1$, on a :

$$0 \leqslant \frac{|S_f(x)|}{x^s} \leqslant \frac{M}{x^{s-\alpha}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

De plus, l'application $t \mapsto \dfrac{S_h(t)}{t^{s+1}}$ est continue par morceaux sur $[1,+\infty[$, et au voisinage de $+\infty$ on a, par hypothèse sur S_h :

$$\frac{S_h(t)}{t^{s+1}} \underset{t\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^{s-\alpha+1}}\right).$$

L'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{s-\alpha+1}}$ converge parce que $s-\alpha+1 > 1$ par hypothèse sur s. Donc, par comparaison, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{S_h(t)}{t^{s+1}}dt$ converge absolument donc converge.

Quand $x \to +\infty$, la relation (1) donne donc l'existence (et finitude) de $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sum_{1\leqslant n\leqslant x} \frac{f(n)}{n^s}$, et :

$$L(s,f) = s\int_1^{+\infty} \frac{S_f(t)}{t^{s+1}}dt,$$

d'où le résultat.

4. (a) Soit $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ impaire et p-périodique. Alors, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a :

$$f(k) = -f(-k) = -f(p-k). \tag{2}$$

En particulier, $f(0) = 0$ et $f(p) = 0$.
De plus, si p est impair, alors l'application $k \mapsto p-k$ induit une bijection de $[\![1, \frac{p-1}{2}]\!]$ dans $[\![\frac{p+1}{2}, p-1]\!]$ (sa réciproque est $k \mapsto p-k$), donc :

$$\sum_{k=1}^{p} f(k) = \sum_{1 \leqslant k \leqslant \frac{p-1}{2}} f(k) + \sum_{\frac{p+1}{2} \leqslant k \leqslant p-1} f(k) = \sum_{1 \leqslant k \leqslant \frac{p-1}{2}} f(k) + \sum_{1 \leqslant k \leqslant \frac{p-1}{2}} f(k-p) \overset{(2)}{=} 0.$$

Si p est pair (c'est-à-dire si $p = 2$), alors : $f(1) + f(2) = f(1) + f(0)$, et d'après (2) on a $f(0) = -f(0)$ et $f(1) = -f(1)$, donc $f(0) = f(1) = 0$, donc $f(1) + f(2) = 0$.

(b) On déduit de la question précédente que pour tout entier $x \geqslant 1$ multiple de p on a $S_f(x) = 0$. On en déduit, pour tout réel $x \geqslant 1$:

$$|S_f(x)| = \left| \sum_{p\left[\frac{x}{p}\right] \leqslant n \leqslant x} f(n) \right| \leqslant \sum_{p\left[\frac{x}{p}\right] \leqslant n \leqslant x} |f(n)| = \sum_{0 \leqslant n \leqslant x - p\left[\frac{x}{p}\right]} |f(n)| \leqslant \sum_{0 \leqslant n \leqslant p} |f(n)|.$$

Si l'on note $M = \sum_{0 \leqslant n \leqslant p} |f(n)|$, alors pour tout réel $x \geqslant 1$ on a : $|S_f(x)| \leqslant M$. Donc, d'après les questions précédentes (avec $\alpha = 0$), pour tout $s > 0$ la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{f(n)}{n^s}$ converge

5. Ici $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{C}$ est la fonction constante égale à 1.

(a) Pour tout $x \geqslant 1$, on a : $|S_f(x)| = [x] \leqslant x$. Donc, en appliquant la question 3. avec $\alpha = 1$, on obtient la convergence de la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^s}$ pour tout $s > 1$.

(b) On obtient également l'égalité :

$$\forall s > 1, \quad \zeta(s) = s \int_1^{+\infty} \frac{[t]}{t^{s+1}} dt.$$

Ensuite, on écrit : $[t] = t + ([t] - t)$, de sorte que :

$$\forall s > 1, \quad \zeta(s) = s \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^s} + s \int_1^{+\infty} \frac{[t]-t}{t^{s+1}} dt = \frac{s}{s-1} + s \int_1^{+\infty} \frac{[t]-t}{t^{s+1}} dt.$$

En notant $I(s)$ l'intégrale de droite, on a alors (puisque $-1 \leq [t] - t \leq 0$) :

$$|I(s)| \leq s \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{s+1}} = 1,$$

donc

$$\forall s > 1, \quad \zeta(s) = \frac{s}{s-1} + I(s) = \frac{s}{s-1} + O(1),$$

et on en déduit :

$$\lim_{s \to 1} (s-1)\zeta(s) = 1.$$

* * *