DS02 du 29/09/2026 (3h)
Sujet A (MPI*)

Le sujet se compose de 3 exercices indépendants.
Calculatrice interdite.

* * *

Exercice 1 : Réorganisation des termes d'une série semi-convergente

On se donne un réel x. On note, pour $n \in \mathbf{N}^*$, $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ et on se propose de construire une bijection s de $\mathbf{N}^*$ dans $\mathbf{N}^*$ telle que $\sum_{n=1}^{\infty} u_{s(n)} = x$.
Ceci pour illustrer le fait que la somme des termes d'une série semi-convergente dépend de l'ordre dans lequel on somme les termes.

On définit simultanément par récurrence trois suites d'entiers naturels $(p_n)_{n\geq 0}$, $(q_n)_{n\geq 0}$, $(s_n)_{n\geq 1}$ et une suite $(S_n)_{n\geq 0}$ de réels de la manière suivante :

- $\boldsymbol{p_0 = q_0 = 0,\ S_0 = 0}$
- **pour tout $n \in \mathbf{N}$:**
  si $S_n > x$ alors : $q_{n+1} = 1 + q_n,\ p_{n+1} = p_n,\ s_{n+1} = 2q_{n+1} - 1$
  si $S_n \leq x$: $q_{n+1} = q_n,\ p_{n+1} = 1 + p_n,\ s_{n+1} = 2p_{n+1}$
  Dans les deux cas : $S_{n+1} = S_n + u_{s_{n+1}}$

1. (a) Expliquer le principe de l'algorithme.
   (b) L'exécuter pas à pas pour $x = -1$, en calculant S_k pour $k \in [\![1, 6]\!]$.
2. On pose dorénavant, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $s(n) = s_n$.
   (a) Prouver, pour $n \geq 1$, les propriétés suivantes :
   $$\{s(1), s(2), ..., s(n)\} = \{2, 4, ..., 2p_n\} \cup \{1, 3, ..., 2q_n - 1\}$$
   $$p_n + q_n = n$$
   $$S_n = u_{s(1)} + \cdots + u_{s(n)}$$
   (b) En déduire que s est injective.
3. (a) Démontrer qu'une suite d'entiers convergente est constante à partir d'un certain rang.
   (b) On se propose de démontrer que la suite $(p_n)_{n\geq 0}$ croît vers $+\infty$.
   On suppose dans un premier temps que cette suite est majorée.
   Utiliser (a) pour démontrer qu'il existe un entier n_0 tel que pour $n \geq n_0$,
   $$S_n > x \quad \text{et} \quad S_n = S_{n_0} - \sum_{k=n_0}^{n-1} \frac{1}{2q_{n_0} + 2k - 2n_0 + 1}.$$
   En déduire une contradiction et conclure.
   (c) Justifier rapidement que (q_n) tend vers $+\infty$.
   (d) Déduire de ce qui précède que s est une bijection de $\mathbf{N}^*$ sur lui-même.
4. (a) Démontrer que, pour tout entier $n \geq 0$, on a :
   $$|S_{n+1} - x| \leq |S_n - x| \quad \text{ou} \quad |S_{n+1} - x| \leq |u_{s(n+1)}|.$$

(b) Montrer que pour tout naturel N, il existe un entier $n > N$ tel que

$$|S_{n+1} - x| \leq |u_{s(n+1)}|.$$

(c) Justifier l'existence d'un entier n_0 tel que pour $n \geq n_0$, $p_n \geq 1$ et $q_n \geq 1$.

(d) Soit $n \geq n_0$. On note $v_n = \max\left(|S_n - x|, |u_{2p_{n+1}}|, |u_{2q_{n+1}-1}|\right)$.
Démontrer que $(v_n)_{n \geq n_0}$ est décroissante. En déduire qu'elle converge vers 0.

(e) Démontrer que (S_n) converge vers x et conclure.

5. (a) Démontrer l'existence d'une constante $\gamma > 0$ telle que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1) \text{ quand } n \to +\infty.$$

(b) Donner un développement analogue pour $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1}$ en fonction de γ.

(c) Justifier, pour tout naturel n tel que $p_n \geq 1$ et $q_n \geq 1$, l'égalité :

$$S_n = \sum_{k=1}^{p_n} \frac{1}{2k} - \sum_{k=1}^{q_n} \frac{1}{2k-1}.$$

(d) En déduire que :

$$S_n = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{p_n}{n - p_n}\right) - \ln 2 + o(1).$$

(e) En déduire un équivalent simple de p_n et de q_n.

(f) Déterminer la limite de :

$$\frac{|u_{s(1)}| + |u_{s(2)}| + \cdots + |u_{s(n)}|}{|u_1| + |u_2| + \cdots + |u_n|} \quad \text{quand} \quad n \to +\infty.$$

* * *

Exercice 2 : Cyclicité de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$

Soit G un groupe fini et commutatif, dont la loi est notée multiplicativement et le neutre est noté e.

1. En considérant le produit $\prod_{g \in G} g$ (qui a bien un sens), redémontrer que tout élément $x \in G$ vérifie $x^{Card(G)} = e$, et en déduire que l'ordre de x divise $Card(G)$.
2. Soit $x \in G$ d'ordre $s \in \mathbb{N}^*$ et soit $y \in G$ d'ordre $t \in \mathbb{N}^*$ avec $pgcd(s,t) = 1$.
Montrer que xy est d'ordre st.
3. En déduire que si $x \in G$ est d'ordre $s \in \mathbb{N}^*$, et si $y \in G$ est d'ordre $t \in \mathbb{N}^*$, alors il existe $z \in G$ d'ordre $ppcm(s,t)$ (attention, on ne suppose plus s et t premiers entre eux !).
Indication : utiliser les décompositions en facteurs premiers de s et t pour construire z.
4. Soit $h \in G$ un élément d'ordre maximal (c'est-à-dire que tous les autres éléments de G ont un ordre inférieur ou égal à celui de h).
Montrer que pour tout $x \in G$, l'ordre de x divise l'ordre de h.
5. Application : on suppose maintenant $G = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ (le groupe des éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.)
   (a) Quel est le cardinal de G ? Justifier.
   (b) En notant d l'ordre maximal d'un élément de G et en raisonnant avec le polynôme $X^d - \overline{1} \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$, démontrer que G est cyclique.

* * *

Exercice 3 : Sommation d'Abel et séries de Dirichlet

Pour $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{C}$, on note $S_f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \qquad S_f(x) = \sum_{1 \leq n \leq x} f(n) = \sum_{n=1}^{\lfloor x \rfloor} f(n).$$

1. Pour toute fonction $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{C}$, justifier que S_f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}^+$.
2. Soit $g : [1, +\infty[\to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $h : \mathbb{N}^* \to \mathbb{C}$. Montrer que pour tout réel $x \geq 1$:

$$\sum_{1 \leq n \leq x} h(n)g(n) = S_h(x)g(x) - \int_1^x S_h(t)g'(t)dt$$

(*formule de sommation d'Abel*).

3. Soit $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{C}$ telle qu'il existe des réels $\alpha \geq 0$ et $M > 0$ tels que $\forall x \geq 1$, $|S_f(x)| \leq Mx^\alpha$.
En utilisant la *formule de sommation d'Abel*, montrer que pour tout $s > \alpha$, la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ converge et que sa somme vaut

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(n)}{n^s} = s \int_1^{+\infty} S_f(t)t^{-s-1}dt.$$

4. On considère maintenant une fonction $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ impaire et p-périodique, où p est un nombre premier.
   (a) Montrer que $f(1) + \cdots + f(p) = 0$.
   (b) Montrer en utilisant ce qui précède que la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ converge pour tout réel $s > 0$.
5. *Retour sur la fonction zeta*
En utilisant ce qui précède :
   (a) retrouver le fait que $\zeta(s) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$ converge pour $s > 1$,
   (b) retrouver le fait que $(s-1)\zeta(s) \underset{s \to 1^+}{\longrightarrow} 1$.

* * *