EXERCICE I : INFORMATIQUE

I.1. Pour $a, b \in \mathbb{N}$, je note $a \wedge b$ le pgcd de a et b.
On remarque que si $a = 0$ ou $b = 0$ (ie $\min(a, b) = 0$) alors $a \wedge b = a + b$ car $\forall c \in \mathbb{N}$, $c \wedge 0 = 0 \wedge c = c$.

```
def gcd(a,b):
    """Donn\'ees: aet b deux entiers naturels
       R\'esultat: le pgcd de a et b, calcul\'e par l'algorithme brut de force"""
    n=min(a,b)
    res=a+b # si n=0 alors pas de tour de boucle
    for i in range(1,n+1):
        if a%i==0 and b%i==0: #si i divise a et b
            res=i # si n >0 alors res=1 au premier tour
    return res
```

I.2. On remarque que la fonction `euclide` de l'énoncé respecte bien $\forall c \in \mathbb{N}$, $c \wedge 0 = 0 \wedge c = c$
Une fonction « récursive » `euclide_rec` qui calcule le pgcd de deux entiers naturels :

```
def euclide_rec(a,b):
    """Donn\'ees: a et b deux entiers naturels valable même si a ou b est nul
       R\'esultat: le pgcd de a et b, calcul\'e par l'algorithme d'Euclide récursifi\'e"""
    if b==0:
        return a
    r=a%b
    return euclide_rec(b,r)
```

I.3.

I.3.a. On a les divisions euclidiennes successives où les quotients valent tous 1 (sauf le dernier) :
i : $\mathrm{F}_6 = 1 \times \mathrm{F}_5 + \mathrm{F}_4$ et $\mathrm{F}_4 < \mathrm{F}_5$ donc de reste $\mathrm{F}_4 = 3$
ii : $\mathrm{F}_5 = 1 \times \mathrm{F}_4 + \mathrm{F}_3$ et $\mathrm{F}_3 < \mathrm{F}_4$ donc de reste $\mathrm{F}_3 = 2$
iii : $\mathrm{F}_4 = 1 \times \mathrm{F}_3 + \mathrm{F}_2$ et $\mathrm{F}_2 < \mathrm{F}_3$ donc de reste $\mathrm{F}_2 = 1$
iv : $\mathrm{F}_3 = 2 \times \mathrm{F}_2 + 0$ et $0 < \mathrm{F}_2$ donc de reste $\mathrm{F}_0 = 0$
On remarque que $\mathrm{F}_6 \wedge \mathrm{F}_5 = 1$ *(dernier reste non nul).*

I.3.b. On a $\mathrm{F}_{n+2} = 1 \times \mathrm{F}_{n+1} + \mathrm{F}_n$ et $\mathrm{F}_n < \mathrm{F}_{n+1}$ car la suite $(\mathrm{F}_n)_{n \geqslant 2}$ est strictement croissante.

$$\boxed{\text{Si } n \geqslant 2, \text{ le reste de la division euclidienne de } \mathrm{F}_{n+2} \text{ par } \mathrm{F}_{n+1} \text{ est } \mathrm{F}_n}$$

Si $n = 1$, le reste de la division euclidienne de $\mathrm{F}_{n+2} = \mathrm{F}_3 = 2$ par $\mathrm{F}_{n+1} = \mathrm{F}_2 = 1$ est 0.
Si $n = 0$, le reste de la division euclidienne de $\mathrm{F}_{n+2} = \mathrm{F}_2 = 1$ par $\mathrm{F}_{n+1} = \mathrm{F}_1 = 1$ est 0.

Si $n \in \mathbb{N}^*$, le nombre de divisions euclidiennes effectuées pour le calcul de `euclide`$(\mathrm{F}_{n+2}, \mathrm{F}_{n+1})$ est $u_n = n$.
Si $n = 0$, le nombre de divisions euclidiennes effectuées pour le calcul de `euclide`$(\mathrm{F}_{n+2}, \mathrm{F}_{n+1})$ est $u_0 = 1$.

I.3.c. Dans l'appel de `gcd`$(\mathrm{F}_{n+2}, \mathrm{F}_{n+1})$, à chaque tour de boucle, sont effectués deux divisions euclidiennes.
Le nombre de tour de boucles est $\min(\mathrm{F}_{n+2}, \mathrm{F}_{n+1}) = \mathrm{F}_{n+1}$ donc

le nombre de divisions euclidiennes effectuées pour le calcul de `gcd`$(\mathrm{F}_{n+2}, \mathrm{F}_{n+1})$ est $v_n = 2\mathrm{F}_{n+1}$

donc $\boxed{v_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{2\phi^{u_n}}{\sqrt{5}}}$ comme on s'en doutait la méthode brute est moins bonne en terme de complexité

I.4. Plusieurs fonctions `fibo` qui prend en argument un entier naturel n et renvoie le nombre de Fibonacci F_n :

```
def fibo(n):
    """Donn\'ees: n entier naturel
       R\'esultat: le terme de rang n de la suite de Fibonnacci
```

```
        sans contrainte de complexité !!! (faut aller vite en respectant la consigne !)"""
    if n<2:
        return n
    return fibo(n-1) + fibo(n-2)
def fibo2(n):
    """Donn\'ees: n entier naturel
       R\'esultat: le terme de rang n de la suite de Fibonnacci
       version linéaire non récursive (préférable ?)"""
    if n<2:
        return n
    u=0
    v=1
    for i in range(n-1):
        w=v
        v=u+v
        u=w # sans pythonnerie u,v=v,u+v
    return v
```

I.5. Une fonction `gcd_trois` qui renvoie le pgcd de trois entiers naturels $a \wedge b \wedge c = c \wedge (a \wedge b)$:

```
def gcd_trois(a,b,c):
    return euclide(c,euclide(a,b))
```

Pas de commentaires !

EXERCICE II

II.1. Le polynôme $\mathrm{P} = \mathrm{X}^3 + \mathrm{X}^2 + \mathrm{X}$ est un polynôme annulateur de A.
De plus $\mathrm{P} = \mathrm{X}(\mathrm{X}-j)(\mathrm{X}-j^2)$ où $j = \exp(2i\pi/3)$. donc $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\mathrm{A}) \subset \{0, j, j^2\}$ timeit

$\boxed{\text{Les valeurs propres complexes de A prennent au maximum trois valeurs distinctes parmi : } 1, j, j^2}$

II.2. Le polynôme $\mathrm{P} = \mathrm{X}(\mathrm{X}-j)(\mathrm{X}-j^2)$ est un polynôme scindé à racines simples, annulateur de A
Ainsi $\boxed{\text{A est diagonalisable dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$

II.3. On suppose A inversible ainsi on peut multiplier par A^{-1} pour obtenir $\mathrm{A}^2 + \mathrm{A} + \mathrm{I}_n = 0$
Avec le polynôme annulateur de A : $\mathrm{X}^2 + \mathrm{X} + 1$, on obtient $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\mathrm{A}) \subset \{j, j^2\}$
Le polynôme caractéristique de A : χ_{A} est scindé dans $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$ d'après D'Alembert-Gauss
Comme $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\chi_{\mathrm{A}} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$
donc les racines non réelles de χ_{A} sont conjuguées deux à deux avec même multiplicité.
Donc on peut écrire $\chi_{\mathrm{A}} = (\mathrm{X}-j)^p(\mathrm{X}-j^2)^p$ or $\det(\mathrm{A}) = \chi_{\mathrm{A}}(0)$ et $j^3 = 1$
donc $\boxed{\text{si A est inversible alors } \det(\mathrm{A}) = 1}$

PROBLÈME III

Première partie : questions préliminaires

Pour deux polynômes A et B, A|B signifie que A divise B.

III.1.

III.1.a. On suppose P et Q n'ont aucune racine complexe commune.
Par l'absurde si P et Q ne sont pas premiers entre eux,
ceci nous fournirait $\mathrm{R} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ tel que $\deg \mathrm{R} \geqslant 1$, R|P et R|Q
Comme R est non constant, D'alembert et Gauss nous fournissent $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{R}(\lambda) = 0$

or il existe P_1 et Q_1 tel que $P = P_1R$ et $Q = Q_1R$ car $R|P$ et $R|Q$
donc $P(\lambda) = Q(\lambda) = 0$
Ainsi P et Q ont une racine complexe commune. ABSURDE

$\boxed{\text{si P et Q n'ont aucune racine complexe commune, alors P et Q sont premiers entre eux}}$

III.1.b. On suppose que P et Q divisent un troisième polynôme R
Ceci nous fournit U et V tel que $PU = QV = R$
donc $Q|PU$ et $Q \wedge P = 1$ le théorème de Gauss s'applique et on a $Q|U$
Ce qui nous fournit W tel que $U = WQ$ donc $R = PU = PQW$
donc $PQ|R$. On a donc montré que :

$\boxed{\text{si P et Q divisent un troisième polynôme R à coefficients complexes, alors il divise le polynôme PQ}}$

III.2. Pour $p \in [\![1, n]\!]$. On considère la propriété $\mathcal{P}_p$: $Q_p = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \frac{P'_i}{P_i}$ où $Q_p = \dfrac{\left(\displaystyle\prod_{i=1}^{p} P_i\right)'}{\displaystyle\prod_{i=1}^{p} P_i}$

Initialisation : Pour $p = 1$ c'est évident

Pour $p = 2$, on a $Q_2 = \dfrac{(P_1P_2)'}{P_1P_2} = \dfrac{P'_1P_2 + P_1P'_2}{P_1P_2} = \dfrac{P'_1}{P_1} + \dfrac{P'_2}{P_2}$. On a bien $Q_2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{2} \dfrac{\left(\displaystyle\prod_{i=1}^{p} P_i\right)'}{\displaystyle\prod_{i=1}^{p} P_i}$

Hérédité : Soit $p \in [\![1, n-1]\!]$ tel que $\mathcal{P}_p$. Montrons $\mathcal{P}_{p+1}$ c'est à dire $Q_{p+1} = \displaystyle\sum_{i=1}^{p+1} \frac{P'_i}{P_i}$

On a $Q_{p+1} = \dfrac{\left[\left(\displaystyle\prod_{i=1}^{p} P_i\right) \times P_{p+1}\right]'}{\left(\displaystyle\prod_{i=1}^{p} P_i\right) \times P_{p+1}} = Q_p + \dfrac{P'_{p+1}}{P_{p+1}}$ en faisant comme pour $p = 2$
et avec l'hypothèse de récurrence, on a $\mathcal{P}_{p+1}$
Conclusion : On a montré par récurrence $\forall p \in [\![1, n]\!]$, $\mathcal{P}_p$

En particulier, on a $\mathcal{P}_n$ or $Q_n = Q$ ce qui permet de conclure : $\boxed{Q = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{P'_i}{P_i}}$

Deuxième partie : interpolation de Hermite

III.3. Définition du polynôme interpolateur de Hermite

III.3.a. On suppose $P(a) = P'(a) = 0$.

La formule de Taylor polynomiale s'écrit $\forall Q \in \mathbb{K}[X],\ Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{Q^{(k)}(0)}{k!} X^k$ (somme finie)

On l'applique au polynôme $Q = P(X + a)$ qui vérifie $Q^{(k)} = P^{(k)}(X + a)$ par récurrence immédiate

donc $P(X + a) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} X^k = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} X^k$

Ainsi $\mathrm{P}(\mathrm{X}) = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\mathrm{P}^{(k)}(a)}{k!}(\mathrm{X}-a)^k = (\mathrm{X}-a)^2 \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\mathrm{P}^{(k)}(a)}{k!}(\mathrm{X}-a)^{k-2}$

or $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\mathrm{P}^{(k)}(a)}{k!}(\mathrm{X}-a)^{k-2}$ est un polynôme donc $\boxed{\text{si } \mathrm{P}(a) = \mathrm{P}'(a) = 0 \text{ alors } (\mathrm{X}-a)^2 \text{ divise P.}}$ timeit

III.3.b. <u>linéarité</u> En utilisant la linéarité de la dérivation,

on a pour tous $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \in \mathbb{R}_{2p-1}[\mathrm{X}]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$: $\varphi(\lambda \mathrm{P} + \mathrm{Q}) = \lambda\varphi(\mathrm{P}) + \varphi(\mathrm{Q})$

donc φ est linéaire

<u>$\operatorname{Ker}\varphi = \{0\}$</u> On sait que $\operatorname{Ker}\varphi \supset \{0\}$. On va montrer que $\operatorname{Ker}\varphi \subset \{0\}$

Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_{2p-1}[\mathrm{X}]$ tel que $\varphi(\mathrm{P}) = 0$. Montrons $\mathrm{P} = 0$

Pour $i \in [\![1,p]\!]$, on a $\mathrm{P}(x_i) = \mathrm{P}'(x_i) = 0$ donc $(\mathrm{X}-x_i)^2$ divise P selon **II.3.a**

Par récurrence immédiate, on peut généraliser **III.1** :

si $\mathrm{P}_1, \cdots \mathrm{P}_p$ sont des polynômes deux à deux premiers entre eux diviseurs du polynôme P alors $\prod_{i=1}^{p} \mathrm{P}_i$ divise P

En appliquant ceci aux polynômes $(\mathrm{X}-x_i)^2$, on obtient $\prod_{i=1}^{p} (\mathrm{X}-x_i)^2$ divise P

or $\deg\left(\prod_{i=1}^{p} (\mathrm{X}-x_i)^2\right) = 2p$ et $\deg \mathrm{P} \leqslant 2p-1$

donc $\mathrm{P} = 0$

<u>φ bijective</u> On vient de voir que φ est injective

D'après le théorème du rang : $\operatorname{rg}\varphi = \dim(\mathbb{R}_{2p-1}[\mathrm{X}]) - \dim \operatorname{Ker}(\varphi) = 2p$

donc $\dim \operatorname{Im}\varphi = \dim \mathbb{R}^{2p}$ et $\operatorname{Im}\varphi \subset \dim \mathbb{R}^{2p}$

donc $\operatorname{Im}\varphi = \dim \mathbb{R}^{2p}$ ce qui donne la surjectivité d'où φ est bijective

<u>Conclusion</u> $\boxed{\text{On vient de montrer que } \varphi \text{ est une application linéaire bijective de } \mathbb{R}_{2p-1}[\mathrm{X}] \text{ sur } \mathbb{R}^{2p}}$

III.3.c. Le $2p$-uplet $(a_1, \cdots, a_p, b_1, \cdots, b_p) \in \dim \mathbb{R}^{2p}$ admet un unique antécédent par φ noté P_H

$\boxed{\text{il existe un unique polynôme } \mathrm{P}_\mathrm{H} \in \mathbb{R}_{2p-1}[\mathrm{X}] \text{ tel que,}}$

$\boxed{\text{pour tout entier } i \text{ timeit vérifiant } 1 \leqslant i \leqslant p, \text{ on a } \mathrm{P}_\mathrm{H}(x_i) = a_i \text{ et } \mathrm{P}_\mathrm{H}'(x_i) = b_i}$

III.4. Étude d'un exemple

Soit $\mathrm{P} = x + y\mathrm{X} + z\mathrm{X}^2 + t\mathrm{X}^3 \in \mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$ (où $x, y, z, t \in \mathbb{R}$) le polynôme d'interpolation de Hermite lorsque $p = 2$, $x_1 = -1, x_2 = 1, a_1 = 1, a_2 = 0, b_1 = -1$ et $b_2 = 2$ donc

$\mathrm{P}(1) = 1, \mathrm{P}(-1) = 0, \mathrm{P}'(-1) = -1, \mathrm{P}'(1) = 2$ et $\mathrm{P}' = y + 2z\mathrm{X} + 3t\mathrm{X}^2$ ainsi $\left\{\begin{array}{rrrrcr} x & -y & +z & -t & = & 1 \\ x & +y & +z & +t & = & 0 \\ & y & -2z & +3t & = & -1 \\ & y & +2z & +3t & = & 2 \end{array}\right.$

donc $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/4 \\ -1 \\ 3/4 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ selon la calculatrice

Donc $\boxed{\text{pour cet exemple on trouve : } \mathrm{P}_\mathrm{H} = \frac{-1}{4} - \mathrm{X} + \frac{3\mathrm{X}^2}{4} + \frac{\mathrm{X}^3}{2}}$

III.5. Une formule explicite

III.5.a. Si $p \neq 1$, les x_k pour $k \in [\![1,p]\!] \setminus \{i\}$ sont des racines de multiplicité 2 de Q_i donc $\mathrm{Q}_i(x_k) = \mathrm{Q}_i'(x_k) = 0$

et $Q_i(x_i) = \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{p} \left(\dfrac{x_i - x_j}{x_i - x_j}\right)^2 = 1$

On applique **III.2** à $Q_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{p} P_j$ où $P_j = \left(\dfrac{X - x_j}{x_i - x_j}\right)^2$

donc $Q_i' = Q_i \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{p} \dfrac{P_j'}{P_j}$ or pour $j \neq i$, $P'j = \dfrac{2(X - x_j)}{(x_i - x_j)^2}$ ainsi $\dfrac{P_j'}{P_j} = \dfrac{2}{X - x_j}$ et $\dfrac{P_j'(x_i)}{P_j(x_i)} = \dfrac{2}{x_i - x_j}$

donc $\boxed{Q_i(x_k) = Q_i'(x_k) = 0 \text{ si } k \neq i \ \text{ et } \ Q_i(x_i) = 1 \ \text{ et } \ Q_i'(x_i) = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{p} \dfrac{2}{x_i - x_j}}$

Formule valable si $p = 1$, On a $Q_1 = 1$ (produit vide) et $Q_1' = 0$ et donc $Q_1'(x_1) = 0$ (somme vide)

III.5.b. Pour $i \in [\![1, p]\!]$, on a $\deg(Q_i) = 2p - 2$ (valable même si $p = 1$)

et $\deg\Big[(1 - Q_i'(x_i)(X - x_i))\, a_i + (X - x_i)b_i\Big] \leqslant 1.$

Par produit $\deg\left(\Big[(1 - Q_i'(x_i)(X - x_i))\, a_i + (X - x_i)b_i\Big] Q_i\right) =$

$\deg\Big[(1 - Q_i'(x_i)(X - x_i))\, a_i + (X - x_i)b_i\Big] + \deg(Q_i) \leqslant 2p - 1$

Par somme $\deg P \leqslant 2p - 1$ ainsi $P \in \mathbb{R}_{2p-1}[X]$

Soit $j \in [\![1, p]\!]$. Il suffit d'établir que $P(x_j) = a_j$ et $P'(x_j) = b_j$

On a $P(x_j) = \sum_{i=1}^{p} \Big[\big(1 - Q_i'(x_i)(x_j - x_i)\big)\, a_i + (x_j - x_i)b_i\Big] Q_i(x_j)$

À l'aide de la question précédente $P(x_j) = \Big(1 - Q_j'(x_j)(x_j - x_j)\Big)\, a_j + (x_j - x_j)b_j = a_i$

De plus $P' = \sum_{i=1}^{p} \left(\Big[-Q_i'(x_i)a_i + b_i\Big] Q_i + \Big[\big(1 - Q_i'(x_i)(X - x_i)\big)\, a_i + (X - x_i)b_i\Big] Q_i'\right)$

donc $P'(x_j) = \sum_{i=1}^{p} \left(\Big[-Q_i'(x_i)a_i + b_i\Big] Q_i(x_j) + \Big[\big(1 - Q_i'(x_i)(x_j - x_i)\big)\, a_i + (x_j - x_i)b_i\Big] Q_i'(x_j)\right)$

À l'aide de la question précédente :

$P'(x_j) = \left(\Big[-Q_i'(x_i)a_i + b_i\Big] + \Big[(1 - Q_i'(x_i)(x_i - x_i))\, a_i + (x_i - x_i)b_i\Big] Q_i'(x_i)\right) = -Q_i'(x_i)a_i + b_i + a_i Q_i'(x_i)$

d'où $P'(x_j) = b_j$ Ainsi

$\boxed{P = \sum_{i=1}^{p} \Big[\big(1 - Q_i'(x_i)(X - x_i)\big)\, a_i + (X - x_i)b_i\Big] Q_i \text{ est le polynôme d'interpolation de Hermite}}$

III.5.c. On a $x_1 = -1, x_2 = 1, a_1 = 1, a_2 = 0, b_1 = -1$ et $b_2 = 2$

On a $Q_1 = \dfrac{(X-1)^2}{4}$; $Q_1' = \dfrac{X - 1}{2}$; $Q_2 = \dfrac{(X+1)^2}{4}$; $Q_2' = \dfrac{X + 1}{2}$ et $Q_1'(x_1) = -1$ et $Q_2'(x_2) = 1$

La formule donne $P = \Big[(1 - Q_1'(x_1)(X - x_1))\, a_1 + (X - x_1)b_1\Big] Q_1 + \Big[(1 - Q_2'(x_2)(X - x_2))\, a_2 + (X - x_2)b_2\Big] Q_2$

donc $P = \Big[(1 + (X + 1)) - (X + 1)\Big] Q_1 + \Big[(1 - (X - 1))\, 0 + (X - 1)2\Big] Q_2 = Q_1 + (2X - 1)Q_2$

donc $P = \dfrac{(X-1)^2 + (2X-2)(X+1)^2}{4} = \dfrac{X^2 - 2X + 1 + 2X^3 + 4X^2 + 2X - 2X^2 - 4X - 2}{4}$

$\boxed{\text{On retrouve } \dfrac{X^3}{2} + \dfrac{3X^2}{4} - X - \dfrac{1}{4} \text{ polynôme de la question } \textbf{III.4} \text{ en utilisant cette formule}}$

timeit

Troisième partie : polynômes de Hermite

III.6.
Initialisation : On a bien H_0 unitaire et de degré 0
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que H_n soit un polynôme de degré n.
On a $\deg(\mathrm{XH}_n) = \deg(\mathrm{X}) + \deg(\mathrm{H}_n) = 1 + n > n - 1 \geqslant \deg(\mathrm{H}_n')$
donc $\deg(\mathrm{H}_{n+1}) = \deg(\mathrm{XH}_n - \mathrm{H}_n') = n + 1$ d'où l'hérédité
Conclusion : On a montré par récurrence que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ \mathrm{H}_n \text{ est un polynôme unitaire de degré } n}$

III.7. Initialisation : On a $\mathrm{H}_0 = 1$ et $\mathrm{H}_1 = \mathrm{X}$ ainsi on a bien $\mathrm{H}_{0+1}' = (0+1)\mathrm{H}_0$
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{H}_{n+1}' = (n+1)\mathrm{H}_n$.
On a $\mathrm{H}_{n+2}' = (\mathrm{XH}_{n+1} - \mathrm{H}_{n+1}')' = \mathrm{XH}_{n+1}' + \mathrm{H}_{n+1} - \mathrm{H}_{n+1}'' = (n+1)\mathrm{XH}_n + \mathrm{XH}_n - \mathrm{H}_n' - (n+1)\mathrm{H}_n'$
donc $\mathrm{H}_{n+2}' = (n+2)(\mathrm{XH}_n - \mathrm{H}_n') = (n+2)\mathrm{H}_{n+1}$
Conclusion : On a montré par récurrence que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ \mathrm{H}_{n+1}' = (n+1)\mathrm{H}_n}$

III.8. Un produit scalaire sur $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$

III.8.a. Soit P et Q dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$. La fonction $x \mapsto \mathrm{P}(x)\mathrm{Q}(x)f(x)$ est continue sur $]-\infty, +\infty[$.
Par croissance comparée on a $x^2\mathrm{P}(x)\mathrm{Q}(x)f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\mathrm{P}(x)\mathrm{Q}(x)f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} 1/x^2$
or la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$
donc par comparaison à une fonction positive, la fonction $x \mapsto \mathrm{P}(x)\mathrm{Q}(x)f(x)$ est intégrable sur $[1, +\infty[$
de façon analogue la fonction $x \mapsto \mathrm{P}(x)\mathrm{Q}(x)f(x)$ est intégrable sur $]-\infty, -1]$
ainsi la fonction $x \mapsto \mathrm{P}(x)\mathrm{Q}(x)f(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$
ainsi $\boxed{\text{pour tous polynômes P et Q dans } \mathbb{R}[\mathrm{X}], \text{ on a l'existence de l'intégrale qui définit } \langle \mathrm{P} \mid \mathrm{Q}\rangle}$

III.8.b. Soit P, Q et $\mathrm{R} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ Montrons $\left\{\begin{array}{ll} (i) & \langle \lambda\mathrm{P} + \mathrm{R} \mid \mathrm{Q}\rangle = \lambda\langle \mathrm{P} \mid \mathrm{Q}\rangle + \langle \mathrm{R} \mid \mathrm{Q}\rangle \\ (ii) & \langle \mathrm{P} \mid \mathrm{Q}\rangle = \langle \mathrm{Q} \mid \mathrm{P}\rangle \\ (iii) & \langle \mathrm{P} \mid \lambda\mathrm{Q} + \mathrm{R}\rangle = \lambda\langle \mathrm{P} \mid \mathrm{Q}\rangle + \langle \mathrm{P} \mid \mathrm{R}\rangle \\ (iv) & \langle \mathrm{P} \mid \mathrm{P}\rangle \geqslant 0 \\ (v) & \langle \mathrm{P} \mid \mathrm{P}\rangle = 0 \Longrightarrow \mathrm{P} = 0 \end{array}\right.$

Pour (i) On a bien $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda\mathrm{P}(x) + \mathrm{R}(x))\mathrm{Q}(x)f(x)\mathrm{d}x = \lambda\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{P}(x)\mathrm{Q}(x)f(x)\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{R}(x)\mathrm{Q}(x)f(x)\mathrm{d}x$

Pour (ii) On a bien $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{P}(x)\mathrm{Q}(x)f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{Q}(x)\mathrm{P}(x)f(x)\mathrm{d}x$

Pour (iii) vrai avec (i) et (ii)

Pour (iv) On a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{P}^2(x)f(x) \geqslant 0$ donc $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \mathrm{P}^2(x)f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$ donc $\langle \mathrm{P} \mid \mathrm{P}\rangle \geqslant 0$

Pour (v) On suppose $\langle \mathrm{P} \mid \mathrm{P}\rangle = 0$
donc $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \mathrm{P}^2(x)f(x)\mathrm{d}x = 0$ or la fonction $x \mapsto \mathrm{P}^2(x)f(x)$ est continue et positive sur $\mathbb{R}$
donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{P}^2(x)f(x) = 0$ or f ne s'annule pas
donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{P}^2(x) = 0$ ainsi P admet une infinité de raines
donc $\mathrm{P} = 0$
$\boxed{\text{On a démontré que l'on définit ainsi un produit scalaire sur } \mathbb{R}[\mathrm{X}].}$

III.9. Une famille orthogonale

III.9.a. On va encore effectuer une démonstration par récurrence.

Initialisation : Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$. On a $\langle \mathrm{P} \mid \mathrm{H}_0\rangle = \langle \mathrm{P}^{(0)} \mid \mathrm{H}_0\rangle$

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall \mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$, $\langle \mathrm{P} \mid \mathrm{H}_n\rangle = \langle \mathrm{P}^{(n)} \mid \mathrm{H}_0\rangle$

Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$. On a $\langle \mathrm{P} \mid \mathrm{H}_{n+1}\rangle = \langle \mathrm{P} \mid \mathrm{XH}_n - \mathrm{H}'_n\rangle = \langle \mathrm{P} \mid \mathrm{XH}_n\rangle - \langle \mathrm{P} \mid \mathrm{H}'_n\rangle$

Sous réserve d'existence, on effectue une intégration par parties avec les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$:

$$x \mapsto f(x) \text{ et } x \mapsto \mathrm{P}(x)\mathrm{H}_n(x)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)(\mathrm{P}(x)\mathrm{H}_n(x))\mathrm{d}x = [-f(x)(\mathrm{P}(x)\mathrm{H}_n(x))]_{x\to-\infty}^{x\to+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)(\mathrm{P}'(x)\mathrm{H}_n(x) + \mathrm{P}(x)\mathrm{H}'_n(x))\mathrm{d}x$$

On a $[(\mathrm{P}(x)\mathrm{H}_n(x))f(x)]_{x\to-\infty}^{x\to+\infty} = 0$ par croissance comparée ce qui valide l'intégration par parties

donc $\langle \mathrm{P} \mid \mathrm{XH}_n\rangle = \langle \mathrm{P} \mid \mathrm{H}'_n\rangle + \langle \mathrm{P}' \mid \mathrm{H}_n\rangle$

ainsi $\langle \mathrm{P} \mid \mathrm{H}_{n+1}\rangle = \langle \mathrm{P}' \mid \mathrm{H}_n\rangle = \langle (\mathrm{P}')^{(n)} \mid \mathrm{H}_0\rangle$ par hypothèse de récurrence

donc $\langle \mathrm{P} \mid \mathrm{H}_{n+1}\rangle = \langle \mathrm{P} \mid \mathrm{H}_{n+1}\rangle = \langle \mathrm{P}^{(n+1)} \mid \mathrm{H}_0\rangle$ d'où l'hérédité

Conclusion : On a montré par récurrence que

$\boxed{\text{pour tout } \mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}] \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N},\ \langle \mathrm{P} \mid \mathrm{H}_n\rangle = \langle \mathrm{P}^{(n)} \mid \mathrm{H}_0\rangle}$

III.9.b. D'après ce qui précède pour tout P tel que $\deg \mathrm{P} < n$, on a $\langle \mathrm{P} \mid \mathrm{H}_n\rangle = \langle 0 \mid \mathrm{H}_0\rangle = 0$

donc si $0 \leqslant i < j$, on a $\deg(\mathrm{H}_i) = i < j$ d'après **III.6**. donc $\langle \mathrm{H}_i \mid \mathrm{H}_j\rangle = 0$

La famille $(\mathrm{H}_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est donc orthogonale et formée de $n+1$ vecteurs non nuls de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ donc libre

Comme $\dim \mathbb{R}_n[\mathrm{X}] = n+1$, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ (\mathrm{H}_0, \mathrm{H}_1, \ldots, \mathrm{H}_n) \text{ est une base orthogonale de } \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]}$

III.9.c. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $\|\mathrm{H}_n\|^2 = \langle \mathrm{H}_n \mid \mathrm{H}_n\rangle = \langle \mathrm{H}_n^{(n)} \mid \mathrm{H}_0\rangle$ d'après **a**

En utilisant **III.7**, $\mathrm{H}_n^{(n)} = (\mathrm{H}'_n)^{(n-1)} = n(\mathrm{H}'_{n-1})^{(n-1)} = \cdots = n!\mathrm{H}_0^{(0)} = n!\mathrm{H}_0$

donc $\|\mathrm{H}_n\|^2 = n!\langle \mathrm{H}_0 \mid \mathrm{H}_0\rangle = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f = 1$ d'après le *rappel*

donc $\boxed{\|\mathrm{H}_n\| = \sqrt{n!} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.}$

III.9.d. On a $\boxed{\mathrm{H}_1 = \mathrm{X}\,;\ \mathrm{H}_2 = \mathrm{X}^2 - 1 \text{ et } \mathrm{H}_3 = \mathrm{X}^3 - 3\mathrm{X}}$ car $\mathrm{H}_3 = \mathrm{X}(\mathrm{X}^2-1) - 2\mathrm{X}$

La famille $(\frac{1}{\sqrt{i!}}\mathrm{H}_i)_{0\leqslant i\leqslant 3}$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$ d'après **b** et **c**

comme $\dim \mathbb{R}_3[\mathrm{X}] = 4$ et que les vecteurs sont non nuls, alors il s'agit d'une base orthonormée de $\dim \mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$.

Première méthode Donc $\mathrm{P} = \displaystyle\sum_{i=0}^{3} \frac{\langle \mathrm{P} \mid \frac{1}{\sqrt{i!}}\mathrm{H}_i\rangle}{\sqrt{i!}}\mathrm{H}_i = \sum_{i=0}^{3} \frac{\langle \mathrm{P} \mid \mathrm{H}_i\rangle}{i!}\mathrm{H}_i = \sum_{i=0}^{3} \frac{\langle \mathrm{P}^{(i)} \mid \mathrm{H}_0\rangle}{i!}\mathrm{H}_i$ (bof !)

Autre méthode : On a $\mathrm{P} - \mathrm{H}_3 = \mathrm{X}^2 + 4\mathrm{X} + 1$ puis $\mathrm{P} - \mathrm{H}_3 - \mathrm{H}_2 = 4\mathrm{X} + 2 = 4\mathrm{H}_1 + 2\mathrm{H}_0$

donc $\boxed{\mathrm{P} = 2.\mathrm{H}_0 + 4.\mathrm{H}_1 + 1.\mathrm{H}_2 + 1.\mathrm{H}_3}$

Ainsi le projeté orthogonal de P sur $\mathbb{R}_0[\mathrm{X}]$ est $2\mathrm{H}_0 \in \mathbb{R}_0[\mathrm{X}]$ car $4.\mathrm{H}_1 + 1.\mathrm{H}_2 + 1.\mathrm{H}_3 \in \mathbb{R}_0[\mathrm{X}]^\perp$

donc la distance cherchée est $\|4.\mathrm{H}_1 + 1.\mathrm{H}_2 + 1.\mathrm{H}_3\| = \|\frac{4}{\sqrt{1!}}.\mathrm{H}_1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2!}}.\mathrm{H}_2 + \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3!}}.\mathrm{H}_3\|$

Comme $(\frac{1}{\sqrt{1!}}.\mathrm{H}_1, \frac{1}{\sqrt{2!}}.\mathrm{H}_2, \frac{1}{\sqrt{3!}}.\mathrm{H}_3)$ est une famille orthonormale,

on a : $\|4.\mathrm{H}_1 + 1.\mathrm{H}_2 + 1.\mathrm{H}_3\| = \sqrt{4^2 + \sqrt{2}^2 + \sqrt{6}^2} = \sqrt{24}$ on trouve $\boxed{d = \sqrt{24}}$

III.10. Étude des racines des polynômes H_n

III.10.a. On suppose $p < n$. On remarque que $(\mathrm{H}_0, \ldots, \mathrm{H}_p)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ d'après **9.b**

donc $\mathrm{S} \in \mathrm{vect}(\mathrm{H}_0, \ldots, \mathrm{H}_p)$ et comme $(\mathrm{H}_0, \ldots, \mathrm{H}_p, \mathrm{H}_{p+1}, \ldots, \mathrm{H}_n)$ est une famille orthonormale

on a $\mathrm{S} \perp \mathrm{H}_n$ donc $\boxed{\text{si } p < n, \text{ alors } \langle \mathrm{S} \mid \mathrm{H}_n\rangle = 0.}$

III.10.b. On décompose H_n produit d'éléments irréductibles de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$:

$$\mathrm{H}_n = \prod_{i=1}^{p}(\mathrm{X}-a_i)^{\lambda_i} \cdot \prod_{i=1}^{q}(\mathrm{X}-b_i)^{\lambda'_i} \cdot \prod_{i=1}^{l}(\mathrm{X}^2+\alpha_i\mathrm{X}+\beta_i)^{\mu_i} \text{ où}$$

p, q, l sont des entiers, les λ_i sont des entiers impairs, les b_i sont les racines H_n d'ordre pair λ'_i, les $\mathrm{X}^2+\alpha_i\mathrm{X}+\beta_i$ sont des polynômes de discriminant strictement négatifs

On a donc $\mathrm{SH}_n = \displaystyle\prod_{i=1}^{p}(\mathrm{X}-a_i)^{\lambda_i+1} \cdot \prod_{i=1}^{q}(\mathrm{X}-b_i)^{\lambda'_i} \cdot \prod_{i=1}^{l}(\mathrm{X}^2+\alpha_i\mathrm{X}+\beta_i)^{\mu_i}$

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2+\alpha_i x+\beta_i > 0$, $(x-a_i)^{\lambda_i+1} \geqslant 0$ et $(x-b_i)^{\lambda'_i}$

donc $\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R},\ \mathrm{S}(x)\mathrm{H}_n(x) \geqslant 0}$

III.10.c. Par l'absurde si H_n n'a pas n racines réelles distinctes

On note S et p défini comme ci-dessus. On a donc $p < n$

Ainsi d'après **a** : $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \mathrm{S}(x)\mathrm{H}_n(x)f(x)\mathrm{d}x = 0$ or d'après **b** : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{S}(x)\mathrm{H}_n(x)f(x) \geqslant 0$

de plus $x \mapsto \mathrm{S}(x)\mathrm{H}_n(x)f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$

donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{S}(x)\mathrm{H}_n(x)f(x) = 0$

comme f ne s'annule pas, alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{S}(x)\mathrm{H}_n(x) = 0$

donc SH_n est le polynôme nul car admettant une infinité de racines

comme $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ est intègre , S ou H_n est nul ce qui est Absurde

On en déduit que $\boxed{\mathrm{H}_n \text{ a } n \text{ racines réelles distinctes}}$

Fin