## Exercice n°3

**1.** La fonction $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ est continue sur $]0,+\infty[$.

<u>Sur $]0,1]$</u> On a $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

donc la fonction $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ est prolongeable par continuité en 0

donc intégrable sur $[0,1]$ d'où l'existence de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$

<u>Sur $[1,+\infty[$</u> Soit $\mathrm{A}>1$

On effectue une intégration par parties avec des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[1,\mathrm{A}]$ :

On obtient (1) : $\displaystyle\int_1^{\mathrm{A}} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \left[\frac{-\cos x}{x}\right]_1^{\mathrm{A}} - \int_1^{\mathrm{A}} \frac{+\cos x}{x^2}\mathrm{d}x = \cos(1) - \frac{\cos \mathrm{A}}{\mathrm{A}} - \int_1^{\mathrm{A}} \frac{\cos x}{x^2}\mathrm{d}x$

Or $\displaystyle\lim_{\mathrm{A}\to+\infty}\frac{\cos \mathrm{A}}{\mathrm{A}}=0$ (2)

et la fonction $x\mapsto \dfrac{\cos x}{x^2}$ est continue sur $[1,+\infty[$

et $\forall x\in[1,+\infty[$, $\left|\dfrac{\cos x}{x^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{x^2}$

Or la fonction $x\mapsto \dfrac{1}{x^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ car $2>1$

Par comparaison à une fonction positive $x\mapsto \dfrac{\cos x}{x^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$

d'où l'existence de $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2}\mathrm{d}x$

Par passage à la limite dans (1) (avec (2)) on obtient l'existence de $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$

En conclusion $\boxed{\text{L'intégrale } \displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x \text{ existe}}$

**2.** (a) Quand $t\longrightarrow 0$, on a $\alpha t\longrightarrow 0$

donc $\cos(\alpha t) = 1-\frac{\alpha^2t^2}{2}+\mathrm{o}(t^2)$

ainsi $1-\cos(\alpha t)=\frac{\alpha^2t^2}{2}+\mathrm{o}(t^2)\sim\frac{\alpha^2t^2}{2}$ car $\alpha\neq 0$

donc $\dfrac{1-\cos(\alpha t)}{t^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}\sim\frac{\alpha^2t^2}{2t^2}1$

donc $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos(\alpha t)}{t^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}=\frac{1}{2}$

donc $\boxed{\text{l'application } t\mapsto \dfrac{1-\cos(\alpha t)}{t^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx} \text{ est prolongeable par continuité en } 0}$

(b) L'application $t\mapsto\dfrac{1-\cos(\alpha t)}{t^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}$ ainsi prolongée est continue sur $\mathbb{R}$.

<u>Sur $[1,+\infty[$</u> on a pour $t\geqslant 1$, $\left|\dfrac{1-\cos(\alpha t)}{t^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}\right|\leqslant\dfrac{1+|\cos(\alpha t)|}{t^2}|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}|\leqslant\dfrac{2}{t^2}$

Comme en 1., on obtient l'intégrabilité de $t\mapsto\dfrac{1-\cos(\alpha t)}{t^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}$ sur $[1,+\infty[$

<u>Sur $]-\infty,-1]$</u> de façon analogue $t\mapsto\dfrac{1-\cos(\alpha t)}{t^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}$ est intégrable sur $]-\infty,-1]$

$\boxed{\text{Le prolongement par continuité de } t\mapsto\dfrac{1-\cos(\alpha t)}{t^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx} \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}}$

**3.** (a) On a $\mathrm{I} \in \mathbb{C}$.

Et $\bar{\mathrm{I}} = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\left(\frac{1-\cos(\alpha t)}{t^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}\right)}\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-\cos(\alpha t)}{t^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\mathrm{d}t$

On effectue le changement de variable affine $u = -t$ ; $-\mathrm{d}u = \mathrm{d}t$ ($\mathcal{C}^1$ , bijectif, strictement décroissante)

ainsi $\bar{\mathrm{I}} = -\displaystyle\int_{+\infty}^{-\infty} \frac{1-\cos(-\alpha u)}{(-u)^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ux}\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-\cos(\alpha t)}{t^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}\mathrm{d}t = \mathrm{I}$

Ce qui prouve que $\boxed{\text{I est réelle}}$

(b) On effectue un changement de variable affine $t = \mathrm{B}x$ ; $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{B}} = \mathrm{d}x$ à partir d'une intégrale convergente

Ainsi $\displaystyle\int_{\mathrm{A}}^{+\infty} \frac{\cos(\mathrm{B}x)}{x^2}\mathrm{d}x = \int_{\mathrm{AB}}^{+\infty} \frac{\mathrm{B}^2\cos(t)}{t^2}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{B}} = \mathrm{B}\int_{\mathrm{AB}}^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}\mathrm{d}t$

On effectue ensuite une intégration par parties (sous réserves d'existences) avec des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

ainsi $\displaystyle\int_{\mathrm{A}}^{+\infty} \frac{\cos(\mathrm{B}x)}{x^2}\mathrm{d}x = \mathrm{B}\left[-\frac{\cos(t)}{t}\right]_{t=\mathrm{AB}}^{t\to+\infty} - \mathrm{B}\int_{\mathrm{AB}}^{+\infty} \frac{+\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$

Comme l'intégrale de gauche existe bien ainsi que l'expression entre crochets

on peut conclure à l'existence $\boxed{\displaystyle\int_{\mathrm{A}}^{+\infty} \frac{\cos(\mathrm{B}x)}{x^2}\mathrm{d}x = \frac{\cos(\mathrm{AB})}{\mathrm{A}} - \mathrm{B}\int_{\mathrm{AB}}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t}$

(c) On suppose $\mathrm{B} > 0$.

Soit $\mathrm{A} > 0$. On a $\displaystyle\int_{\mathrm{A}}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{x}\right]_{x}^{x\to+\infty} = \frac{1}{\mathrm{A}}$

donc $\displaystyle\int_{\mathrm{A}}^{+\infty} \frac{1-\cos(\mathrm{B}x)}{x^2}\mathrm{d}x = \frac{1-\cos(\mathrm{AB})}{\mathrm{A}} + \mathrm{B}\int_{\mathrm{AB}}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$

Par un calcul asymptotique comme en 2(a), on a $\displaystyle\lim_{\mathrm{A}\to 0} \frac{1-\cos(\mathrm{AB})}{\mathrm{A}} = 0$

à l'aide de 1 on a $\displaystyle\lim_{u\to 0}\int_{u}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$

et donc par passage à la limite on obtient $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{1-\cos(\mathrm{B}x)}{x^2}\mathrm{d}x = \mathrm{B}\frac{\pi}{2}$

si $\mathrm{B} < 0$, on a $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{1-\cos(\mathrm{B}x)}{x^2}\mathrm{d}x = \int_{0}^{+\infty} \frac{1-\cos(-\mathrm{B}x)}{x^2}\mathrm{d}x = -\mathrm{B}\frac{\pi}{2}$

si $\mathrm{B} = 0$, on a $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{1-\cos(\mathrm{B}x)}{x^2}\mathrm{d}x = 0$

donc $\boxed{\text{dans le cas général on a } \displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{1-\cos(\mathrm{B}x)}{x^2}\mathrm{d}x = \frac{|\mathrm{B}|\pi}{2}}$

(d) Comme I est réelle, on a $\mathrm{I} = \Re(\mathrm{I}) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-\cos(\alpha t)}{t^2}\cos(tx)\mathrm{d}t$

puis par parité $\mathrm{I} = 2\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(tx)-\cos(tx)\cos(\alpha t)}{t^2}\mathrm{d}t$

En utilisant la formule $2\cos(a)\cos(b) = \cos(a+b)+\cos(a-b)$

on obtient $\mathrm{I} = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\cos(tx)-\cos(t(x+\alpha))-\cos(t(x-\alpha))}{t^2}\mathrm{d}t$

Pour utiliser : $\forall \mathrm{B} \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{1-\cos(\mathrm{B}t)}{t^2}\mathrm{d}t = \frac{|\mathrm{B}|\pi}{2}$

on écrit $\mathrm{I} = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1-\cos(t(x+\alpha)))+(1-\cos(t(x-\alpha)))-2(1-\cos(tx))}{t^2}\mathrm{d}t$

donc $\boxed{\mathrm{I} = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-\cos(\alpha t)}{t^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}\mathrm{d}t = \frac{|x+\alpha|+|x-\alpha|-2|x|}{2}\pi}$