Corrigé du DS02 du 12/10/2024 (4h)
Sujet B (MPI)

* * *

Exercice 1 : Questions sur les séries et intégrales
Extrait de la banque INP, exercices 46 et 28

1. Posons $u_n = \cos(\pi\sqrt{n^2+n+1})$, bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a le développement asymptotique :

$$u_n = \cos\left(\pi n\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^{1/2}\right) = \cos\left(\pi n\left(1+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{8n^2}+O(1/n^3)\right)\right)$$
$$= \cos\left(n\pi+\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{8n}+O(1/n^2)\right) = (-1)^n\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{8n}+O(1/n^2)\right)$$
$$= (-1)^{n+1}\sin\left(\frac{3\pi}{8n}+O(1/n^2)\right) = \frac{3\pi(-1)^{n+1}}{8n}+O(1/n^2).$$

La série $\sum \frac{3\pi(-1)^{n+1}}{8n}$ converge par le critère spécial des séries alternées, et la série $\sum O(1/n^2)$ est absolument convergente donc convergente. Par somme, on en déduit que $\sum u_n$ est convergente. En revanche, la série à termes positifs $\sum |u_n|$ diverge, car $|u_n| \sim \frac{3\pi}{8n}$, et la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge. Ceci montre que la série $\sum u_n$ n'est pas absolument convergente.

2. Puisque $\forall x > 2,\ x^2-4>0$, la fonction $f : x \mapsto \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x^2-4}}$ est continue sur l'intervalle $]2,+\infty[$.
De plus, f est positive donc l'étude de l'intégrabilité de f équivaut à la convergence de l'intégrale doublement impropre $\int_2^{+\infty} f$.
Au voisinage de $+\infty$, on a $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{x} = o(1/x^2)$ par croissances comparées donc f est intégrable au voisinage de $+\infty$ (puisque $x \mapsto 1/x^2$ l'est).
Au voisinage de 2^+, on a
$$f(x) = f(2+h) = \frac{e^{-2-h}}{\sqrt{(2+h)^2-4}} = \frac{e^{-2}e^{-h}}{\sqrt{4h+h^2}} \underset{h\to0^+}{\sim} \frac{e^{-2}}{2\sqrt{h}},$$
c'est-à-dire $f(x) \underset{x\to2^+}{\sim} \frac{e^{-2}}{2\sqrt{x-2}}$. On conclut alors par exemple de Riemann translaté : la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x-2}}$ est intégrable au voisinage de 2^+, donc f également.
Finalement, f est intégrable sur $]2,+\infty[$.

3. Soit $a>0$. La fonction $g : x \mapsto \frac{\ln(x)}{\sqrt{1+x^{2a}}}$ est continue sur $]0,+\infty[$ (vu que $1+x^{2a}>0$).
Au voisinage de 0^+ : $|f(x)| \underset{x\to0^+}{\sim} |\ln(x)| = -\ln(x)$, donc f est intégrable au voisinage de 0^+, puisque $x \mapsto \ln(x)$ l'est (on peut dire que c'est du cours ou alors que $\ln(x) \underset{x\to0^+}{=} o(1/\sqrt{x})$).
Au voisinage de $+\infty$: $|f(x)| \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(x)}{x^a}$. On reconnaît un exemple d'intégrale de Bertrand. Deux cas se présentent :
   - Si $a>1$, alors $|f(x)| \underset{x\to+\infty}{=} o(1/x^\gamma)$ pour n'importe quel réel $\gamma < a$. En choisissant $\gamma \in]1,a[$ (on peut car $1<a$), on obtient donc que f est négligeable devant une fonction de Riemann intégrable en $+\infty$, donc f est intégrable en $+\infty$.
   - Si $a \leq 1$, alors $\frac{\ln(x)}{x^a} \geq \frac{1}{x^a} > 0$ pour $x \geq e$, mais $x \mapsto 1/x^a$ non intégrable en $+\infty$ donc $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x^a}$ non plus. Dans ce cas, f n'est donc pas intégrable en $+\infty$.

Finalement, f est intégrable sur $]0, +\infty[$ si et seulement si $a > 1$.

* * *

Exercice 2 : Questions sur les structures algébriques

1. Pour tout $x \in \mathbb{Z}$ et $y \in \mathbb{Z}$, on définit :
$$\overline{x} + \overline{y} = \overline{x+y},$$
ainsi que
$$\overline{x} \times \overline{y} = \overline{xy}.$$
Ces deux lois internes sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sont bien définies (cf. cours), de neutres respectifs $\overline{0}$ et $\overline{1}$.
2. Soit $x \in \mathbb{Z}$. La classe $\overline{x}$ est inversible dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ si et seulement si $pgcd(x, n) = 1$.
En effet, $\overline{x}$ est inversible ssi il existe $y \in \mathbb{Z}$ tel que $\overline{x} \times \overline{y} = \overline{1}$, ce qui équivaut à $\overline{xy} = \overline{1}$, ou encore qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $xy = 1 + kn$. Par le théorème de Bézout, cela équivaut à $pgcd(x, n) = 1$.
3. - Si $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps, alors $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est intègre (car tout corps est un anneau intègre).
   - Si $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est intègre, montrons que n est premier. Si $n = n_1 n_2$ avec n_1, n_2 dans $\mathbb{N}^*$, alors $\overline{n_1} \times \overline{n_2} = \overline{n} = \overline{0}$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, donc par intégrité, on a $\overline{n_1} = \overline{0}$ ou $\overline{n_2} = \overline{0}$, c'est-à-dire que n divise n_1 ou n_2. Mais on a déjà n_1 et n_2 qui divisent n, donc $n = n_1$ ou $n = n_2$, ce qui montre que n est premier (il ne possède pas de diviseur autre que 1 et n dans $\mathbb{N}$).
   - Si n est premier, montrons que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps. Si $\overline{x} \neq \overline{0}$ avec $x \in \mathbb{Z}$, alors n ne divise pas x, ce qui équivaut (puisque n est premier) à $pgcd(n, x) = 1$, donc à $\overline{x}$ inversible d'après la question précédente. Ainsi, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps, puisque tous ses éléments non nuls sont inversibles.

   On a donc montré les équivalences voulues.
4. En divisant par 3, on a
$$6x \equiv 9\ [15] \iff 2x \equiv 3\ [5] \iff \overline{2} \times \overline{x} = \overline{3}.$$
(où $\overline{x}$ désigne la classe de x dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$).
En multipliant par $\overline{3}$ (qui est l'inverse de $\overline{2}$ dans le groupe $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^\times$), on obtient
$$\overline{2} \times \overline{x} = \overline{3} \iff \overline{x} = \overline{9} = \overline{4},$$
donc finalement, les solutions dans $\mathbb{Z}$ de $6x \equiv 9\ [15]$ sont les $x = 5k + 4$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi(n)$ est le nombre d'entiers de $[\![1, n]\!]$ premiers avec n. C'est aussi le cardinal du groupe des inversibles $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$.
6. Enoncé du théorème d'Euler : si x est un entier premier avec n, alors $x^{\varphi(n)} \equiv 1\ [n]$.
Démonstration : x est premier avec n, donc $\overline{x} \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$, groupe fini de cardinal $\varphi(n)$. On a donc $\overline{x}^{\varphi(n)} = \overline{1}$, ce qui donne le résultat.
7. Soit $N = 53^{799}$. On cherche $x \in [\![0, 99]\!]$ tel que $N \equiv x\ [100]$.
L'entier 53 est premier, donc premier avec $100 = 2^2 \times 5^2$, donc d'après le théorème d'Euler, $53^{\varphi(100)} \equiv 1\ [100]$. Or, d'après les propriétés de l'indicatrice d'Euler,
$$\varphi(100) = \varphi(2^2)\varphi(5^2) = 2(2-1)5(5-1) = 40,$$
donc $53^{40} \equiv 1\ [100]$. En prenant la puissance 20, on obtient
$$53N = 53^{800} = (53^{40})^{20} \equiv 1\ [100].$$
Il reste à déterminer l'inverse de 53 modulo 100. En regardant les chiffres des unités, cet inverse se termine nécessairement par 7, et on trouve que 17 convient ($53 \times 17 = 901 \equiv 1\ [100]$), donc $N \equiv 17\ [100]$. Finalement, les deux derniers chiffres de N sont 17.

* * *

Exercice 3 : Hyperplans de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ Extrait du Concours Commun des Ecoles des Mines 2000, filières MPSI-PCSI

1. Soit $A = (a_{i,j})$, $B = (b_{i,j})$ dans E et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a $\lambda A + B = (\lambda a_{i,j} + b_{i,j})$, donc

$$Tr(\lambda A + B) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda a_{i,i} + b_{i,i}) = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} + \sum_{i=1}^{n} b_{i,i} = \lambda Tr(A) + Tr(B),$$

donc Tr est bien une forme linéaire sur E.
On en déduit que pour tout $U \in E$, $T_U : M \mapsto Tr(UM)$ est aussi une forme linéaire car (avec les mêmes notations) :

$$T_U(\lambda A + B) = Tr(U(\lambda A + B)) = \lambda Tr(UA) + Tr(UB) = \lambda T_U(A) + T_U(B).$$

2. Pour A, B dans E, on a $AB = (\sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j})_{(i,j)\in[1,n]^2}$, donc

$$Tr(AB) = \sum_{i=1}^{n} (AB)[i,i] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,i},$$

$$Tr(A^T B) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{k,i} b_{k,i}.$$

On a en outre :

$$Tr(BA) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_{i,k} a_{k,i} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{i,k} a_{k,i},$$

et donc en renommant les indices :

$$Tr(BA) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_{k,i} a_{i,k} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,i} = Tr(AB).$$

3. (a) Si $U = 0$, alors T_U est la forme linéaire nulle donc son noyau est E tout entier :

$$H_U = Ker(0_{E^*}) = E.$$

(b) Par définition de T_U, on a pour tout couple $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$:

$$T_U(E_{i,j}) = Tr(UE_{i,j}) = \sum_{k=1}^{n} (UE_{i,j})[k,k] = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} u_{k,l} \underbrace{E_{i,j}[l,k]}_{\delta_{l,i}\delta_{k,j}} = u_{j,i}.$$

Si la matrice U est non nulle, alors il existe un couple $(i_0, j_0) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $u_{j_0,i_0} \neq 0$.
D'après le calcul précédent, on a alors $T_U(E_{i_0,j_0}) = u_{j_0,i_0} \neq 0$.
La forme linéaire T_U est alors non nulle, donc son image est $\mathbb{R}$ (le seul SEV non nul de $\mathbb{R}$) et par le théorème du rang $\dim(H_U) = \dim(E) - 1 = n^2 - 1$ (c'est un hyperplan de E).

4. (a) En reprenant le calcul de la question précédente :

$$T_{i,j}(E_{k,l}) = T_{E_{j,i}}(E_{k,l}) = E_{j,i}[l,k] = \delta_{k,i}\delta_{l,j},$$

donc $T_{i,j}(E_{k,l})$ vaut 1 si $(k,l) = (i,j)$ et 0 sinon.

(b) On en déduit que la famille $(T_{i,j})_{(i,j)}$ est libre dans E^* : si $\sum\limits_{(i,j)} \alpha_{i,j} T_{i,j} = 0_{E^*}$, alors en évaluant en $E_{k,l}$, on obtient $\alpha_{k,l} = 0$ pour tout couple (k,l). Or, $Card((T_{i,j})_{(i,j)}) = n^2 = \dim(E)$, on obtient que la famille $(T_{i,j})_{(i,j)}$ est une base de E^*.

(c) L'application $\varphi : U \mapsto T_U$ est linéaire de E dans E^* puisque pour tout $(U,V,\lambda) \in E\times E\times\mathbb{R}$, on a

$$\forall M \in E, \qquad T_{\lambda U+V}(M) = Tr((\lambda U+V)M) = \lambda Tr(UM) + Tr(VM) = (\lambda T_U + T_V)(M),$$

donc $T_{\lambda U+V} = \lambda T_U + T_V$, c'est-à-dire $\varphi(\lambda U+V) = \lambda\varphi(U)+\varphi(V)$.
En outre, φ transforme la base canonique de E (i.e la famille $(E_{i,j})_{(i,j)}$) en une base de E^* d'après la question précédente, donc φ est un isomorphisme.

5. (a) Les sous-espaces vectoriels H et $Vect(A)$ sont en somme directe puisque si $M \in H\cap Vect(A)$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $M = \lambda A$, mais si $\lambda \neq 0$, on aurait $A = \frac{1}{\lambda}M \in H$ (par stabilité de H), ce qui contredit l'hypothèse $A \notin H$. Donc $\lambda = 0$ puis $M = 0$.
En outre, $\dim(H) + \dim(Vect(A)) = n^2 - 1 + 1 = \dim(E)$ (la dimension de $Vect(A)$ est bien 1 car $A \neq 0$ puisque $A \notin H$), donc H et $Vect(A)$ sont supplémentaires dans E.

   (b) Puisque $E = H \oplus Vect(A)$, il existe par le théorème de recollement une unique application linéaire $\ell : E \to \mathbb{R}$ telle que $\ell(M) = 0$ pour tout $M \in H$ et $\ell(A) = 1$. Cet élément $\ell \in E^*$ a pour noyau H par construction.

   (c) Par l'isomorphisme φ précédemment étudié, il existe une unique matrice $U \in E$ telle que $\ell = T_U$. De plus, $U \neq 0$ sinon on aurait $\ell = 0_{E^*}$, ce qui est faux car $\ell(A) = 1$. Enfin, on a $H_U = Ker(T_U) = Ker(\ell) = H$, donc $H = H_U$.

6. (a) Les colonnes de A sont les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ (permutés), donc les colonnes de A sont libres, ce qui montre que la matrice carrée A est de rang maximum, donc inversible.

   (b) On a, toujours par linéarité de φ :

$$T_{J_r}(A) = \sum_{i=1}^{r} T_{i,i}(A) = \sum_{i=1}^{r} T_{i,i}(E_{2,1}) + \cdots + T_{i,i}(E_{n,n-1}) + T_{i,i}(E_{1,n}) = 0$$

(tous les termes étant nuls par la question 4.(a)). Donc $A \in Ker(T_{J_r}) = H_{J_r}$ (qui est bien un hyperplan car la matrice J_r est non nulle vu qu'on a supposé $r \geq 1$).

7. Soit H un hyperplan de E. Par la question 5.(c), il existe une matrice $U \neq 0_E$ telle que $H = H_U$. En outre, en notant $r \in [\![1,n]\!]$ le rang de U, on sait que la matrice U est équivalente à J_r (attention, pas nécessairement semblable !) : il existe P, Q dans E inversibles telles que $Q^{-1}UP = J_r$. On a montré à la question précédente que H_{J_r} contient la matrice inversible $A = E_{2,1} + \cdots + E_{n,n-1} + E_{1,n}$, donc on se doute que H_U contient une matrice équivalente à A, ce qu'on vérifie facilement :

$$0 = T_{J_r}(A) = Tr(J_rA) = Tr(Q^{-1}UPA) = Tr(UPAQ^{-1}) = T_U(PAQ^{-1}).$$

On a bien H_U qui contient $A' = PAQ^{-1}$, qui est inversible comme A.
Finalement, $H = H_U$ contient une matrice inversible.

* * *

Exercice 4 : Méthode de Laplace et applications
Extrait du sujet Mines-Ponts PC 2017 Math 2

Partie I : exponentielle tronquée

1. Pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}$ fixés, on pose pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_k = \frac{n^k x^k}{k!}$. On a $u_k > 0$ pour tout $k \geq n+1$, ainsi que
$$\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{n^{k+1}x^{k+1}}{(k+1)!} \times \frac{k!}{n^k x^k} = \frac{nx}{k+1} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0 < 1,$$
donc par $\sum_{k\geq n+1} u_k$ converge par la règle de d'Alembert, ce qui justifie l'existence de $R_n(x)$.
En outre, en utilisant la formule admise, on a
$$T_n(x) + R_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(nx)^k}{k!} = e^{nx}.$$

2. Pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, la fonction $g : t \mapsto e^{nt}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, donc on peut appliquer la formule de Taylor avec reste intégral à tout ordre. A l'ordre n entre les points 0 et $x > 0$, cela donne :
$$g(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(k)}(0)}{k!}x^k + \frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n g^{(n+1)}(t)dt,$$
c'est-à-dire
$$e^{nx} = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}x^k}_{=T_n(x)} + \frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n n^{n+1} e^{nt}dt.$$
Donc
$$R_n(x) = e^{nx} - T_n(x) = \frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n n^{n+1}e^{nt}dt \underset{u=x-t}{=} \frac{n^{n+1}}{n!}\int_0^x u^n e^{n(x-u)}du,$$
c'est-à-dire
$$R_n(x) = \frac{e^{nx}n^{n+1}}{n!}\int_0^x (ue^{-u})^n du.$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \dfrac{n^{n+1}}{n!}y^n > 0$ et
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+2}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{n^{n+1}}y = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} y = e^{(n+1)\ln(1+\frac{1}{n})}y = e^{1+o(1)}y \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^1 y.$$
Si $0 < y < e^{-1}$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ donc la série $\sum a_n$ converge par la règle de d'Alembert, ce qui entraîne que (a_n) tend vers 0.

4. Soit $x \in]0,1[$. En dérivant, on montre facilement que $\varphi : u \mapsto ue^{-u}$ est strictement croissante sur $[0,1]$, donc sur $[0,x]$. Donc $\max\limits_{u\in[0,x]} ue^{-u} = \varphi(x) < \varphi(1) = e^{-1}$. En notant $M_x = \max\limits_{u\in[0,x]} ue^{-u}$ (cette notation est meilleure que le "M" suggéré par l'énoncé), on a donc $M_x < e^{-1}$, ainsi que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$0 \leq R_n(x) = \frac{e^{nx}n^{n+1}}{n!}\int_0^x \varphi(u)^n du \leq \frac{e^{nx}n^{n+1}}{n!}\int_0^x M_x^n du = \left(x\frac{n^{n+1}}{n!}M_x^n\right)e^{nx}.$$
Or, puisque $0 < M_x < 1$, on obtient d'après 3. que $x\dfrac{n^{n+1}}{n!}M_x^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui prouve que $R_n(x) = o(e^{nx})$.
Enfin, $T_n(x) = e^{nx} - R_n(x) = e^{nx} + o(e^{nx})$ donc $T_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{nx}$.

5. Montrons par récurrence que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = n!$$
(avec bien sûr convergence de l'intégrale).
   - Pour $n = 0$, on a
   $$\forall x > 0, \qquad \int_0^x e^{-t} dt = 1 - e^{-x},$$
   donc en passant à la limite lorsque $x \to +\infty$, on obtient que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt$ converge et vaut $1 = 0!$.
   - Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ converge et soit égale à $n!$. Dans ce cas, par intégration par parties généralisée :
   $$\int_0^{+\infty} t^{n+1} e^{-t} dt = \left[-t^{n+1} e^{-t}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} (n+1) t^n e^{-t} dt = (n+1) \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt,$$
   donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^{n+1} e^{-t} dt$ converge et vaut $(n+1)n! = (n+1)!$.
6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$. Toujours par la formule de la question 2., nous avons :
$$T_n(x) = e^{nx} - R_n(x) = \frac{e^{nx}}{n!} \left(n! - n^{n+1} \int_0^x u^n e^{-nu} du \right)$$
En utilisant le changement de variable généralisé $y = nu$ dans l'intégrale, ceci se réécrit :
$$T_n(x) = \frac{e^{nx}}{n!} \left(n! - \int_0^{nx} y^n e^{-y} dy \right).$$
En utilisant 5., il vient alors :
$$T_n(x) = \frac{e^{nx}}{n!} \left(\int_0^{+\infty} y^n e^{-y} dy - \int_0^{nx} y^n e^{-y} dy \right) = \frac{e^{nx}}{n!} \int_{nx}^{+\infty} y^n e^{-y} dy,$$
et en réutilisant le changement de variable $y = nu$, on obtient la formule demandée :
$$T_n(x) = \frac{e^{nx} n^{n+1}}{n!} \int_x^{+\infty} (ue^{-u})^n du.$$
7. Si $x > 1$, alors par décroissance et positivité de $\varphi : u \mapsto ue^{-u}$ sur $[1, +\infty[$ (facile à établir en dérivant) :
$$u \geq x \implies (ue^{-u})^{n-1} \leq (xe^{-x})^{n-1} \implies (ue^{-u})^n \leq (xe^{-x})^{n-1} ue^{-u},$$
donc
$$0 \leq T_n(x) \leq \frac{e^{nx} n^{n+1}}{n!} \int_x^{+\infty} (xe^{-x})^{n-1} ue^{-u} du = C_x \left(\frac{n^{n+1}}{n!} (xe^{-x})^n \right) e^{nx},$$
où $C_x = \dfrac{e^x}{x} \displaystyle\int_x^{+\infty} ue^{-u} du$ est indépendant de n.
Puisque $0 < xe^{-x} < e^{-1}$, on a $C_x \dfrac{n^{n+1}}{n!} (xe^{-x})^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ (encore d'après la question 3.), et donc $T_n(x) = o(e^{nx})$ lorsque $n \to +\infty$.

Partie II : méthode de Laplace

8. Par la formule de Taylor-Young à l'ordre 1 en 0 (qui s'applique car f est dérivable en 0), on a
$$f(x) = f(0) + xf'(0) + o(x) = 1 + x(f'(0) + \varepsilon(x)),$$
où $\varepsilon(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$.
Si $f'(0) > 0$, alors il existe $\delta \in]0, 1[$ tel que $(-\delta < x < \delta \implies f'(0) + \varepsilon(x) \geq \frac{1}{2} f'(0))$, et donc
$$0 < x < \delta \implies f(x) \geq 1 + \frac{x}{2} f'(0) > 1,$$

ce qui contredit l'hypothèse **H3**.
De même, si $f'(0) < 0$, alors il existe $\delta \in]0,1[$ tel que

$$-\delta < x < 0 \implies f'(0) + \varepsilon(x) \leq \frac{1}{2} f'(0) \implies f(x) \geq 1 + \frac{x}{2} f'(0) > 1,$$

ce qui est également contradictoire. Donc $f'(0) = 0$.
Appliquons alors la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 en 0 (possible car f est deux fois dérivable en 0) :

$$f'(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2} f''(0) + o(x^2) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2),$$

qui donne $\varphi(x) = -\frac{1}{x^2} \ln\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) \underset{x \to 0}{\sim} \frac{-x^2/2}{-x^2} = \frac{1}{2}$. Ainsi, $\lim_{x \to 0} \varphi(x) = k = \frac{1}{2}$.

9. Vu que $f > 0$ sur $]-1,1[$, la fonction $\varphi : x \mapsto -\frac{1}{x^2} \ln(f(x))$ (prolongée en 0 par sa limite $k = 1/2$) est continue sur $]-1,1[$ par composition.
Etudions φ au voisinage de 1^-. Par continuité de f en 1, $f(x) \underset{x \to 1^-}{\longrightarrow} f(1) \in [0,1[$, donc deux cas se présentent :
   - Si $f(1) \in]0,1[$, alors $\varphi(x) \underset{x \to 1^-}{\longrightarrow} -\ln(f(1)) > 0$.
   - Si $f(1) = 0$, alors $\varphi(x) \underset{x \to 1^-}{\longrightarrow} +\infty$.

   Dans les deux cas, il existe donc $m_1 > 0$ et $0 < \delta < 1$ tel que

   $$\forall x \in [\delta, 1[, \quad \varphi(x) \geq m_1.$$

   En raisonnant de même en -1^+ (on peut car f est continue en -1 et $f(-1) \in [0,1[$), on obtient l'existence de $m_2 > 0$ et $0 < \delta' < 1$ tel que

   $$\forall x \in]-1, -\delta'], \quad \varphi(x) \geq m_2.$$

   Enfin, sur le segment $[-\delta', \delta] \subset]-1,1[$, la fonction continue φ est bornée et atteint ses bornes. En particulier, il existe donc $x_0 \in [-\delta', \delta]$ tel que

   $$\forall x \in [-\delta', \delta], \quad \varphi(x) \geq \varphi(x_0) = -\ln(f(x_0))/x_0^2 > 0.$$

   Finalement, $\forall x \in]-1,1[$, $\varphi(x) \geq a = \min(m_1, m_2, \varphi(x_0)) > 0$, ce qui montre que φ est minorée sur $]-1,1[$ par un réel $a > 0$.
   On en conclut par croissance de l'exponentielle que

   $$\forall x \in]-1,1[, \quad f(x) = e^{-x^2 \varphi(x)} \leq e^{-ax^2},$$

   et cette inégalité reste vraie par continuité de f et de $x \mapsto e^{-ax^2}$ en ± 1 (ce qui permet le passage à la limite dans l'inégalité).

10. Appliquons le théorème de convergence dominée à la suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$:
   - Chaque g_n est continue sur le segment $[-\sqrt{n}, \sqrt{n}]$ (par composition et continuité de f sur $[-1,1]$), et nulle en dehors de ce segment, donc chaque g_n est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ (mais pas nécessairement continue).
   - Pour $u \in \mathbb{R}$ fixé, on a $u \in [-\sqrt{n}, \sqrt{n}]$ pour n assez grand :

     $$g_n(u) = f(u/\sqrt{n})^n = e^{n \ln(f(u/\sqrt{n}))}.$$

     Or, en réutilisant le DL_2 de f en 0 de la question 8. :

     $$f(u/\sqrt{n}) = 1 - \frac{u^2}{2n} + \underset{n \to +\infty}{o}(1/n),$$

     donc

     $$g_n(u) = e^{n \ln(1 - \frac{u^2}{2n} + o(1/n))} = e^{-u^2/2 + o(1)} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} e^{-u^2/2},$$

     et la fonction $g : u \mapsto e^{-u^2/2}$ est bien continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, car continue.

- Par l'inégalité de la question 9., on a par positivité de f :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall u \in [-\sqrt{n}, \sqrt{n}], \qquad |g_n(u)| = g_n(u) = f(u/\sqrt{n})^n \leq (e^{-au^2/n})^n = e^{-au^2},$$

et cette inégalité reste vraie en dehors de $[-\sqrt{n}, \sqrt{n}]$ puisque g_n y est nulle. Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall u \in \mathbb{R}, \qquad |g_n(u)| \leq h(u),$$

avec $h : u \mapsto e^{-au^2}$ intégrable sur $\mathbb{R}$ car continue, paire et négligeable devant $1/u^2$ en $+\infty$.

Le théorème s'applique donc et on en déduit que les g_n et g sont intégrables sur $\mathbb{R}$ et

$$\int_{\mathbb{R}} g_n(u)du \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}} g(u)du = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2/2}du = \sqrt{2\pi}.$$

Mais pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_{\mathbb{R}} g_n(u)du = \int_{-\sqrt{n}}^{\sqrt{n}} f(u/\sqrt{n})^n du \underset{u=x\sqrt{n}}{=} \sqrt{n}\int_{-1}^{1} f(x)^n dx,$$

donc finalement :

$$\sqrt{n}\int_{-1}^{1} f(x)^n dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sqrt{2\pi},$$

c'est-à-dire $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)^n dx \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2\pi}{n}}$.

Partie III : formule de Stirling

11. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En utilisant la formule de la question 5. et en effectuant le changement de variable affine $t = n(x+1)$, on obtient :

$$n! = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}dt = \int_{-1}^{+\infty} n^n(x+1)^n e^{-n(x+1)} n dx = n^{n+1}e^{-n}\int_{-1}^{+\infty}(x+1)^n e^{-nx}dx.$$

En notant $I_n = \int_{-1}^{1}(x+1)^n e^{-nx}\,\mathrm{d}x$ et $J_n = \int_{1}^{+\infty}(x+1)^n e^{-nx}\,\mathrm{d}x$, on obtient par relation de Chasles :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad n! = n^{n+1}e^{-n}(I_n + J_n).$$

12. La fonction $f : x \mapsto 2^x - x - 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f' : x \mapsto \ln(2)2^x - 1$, donc $\forall x \geq 1,\ f'(x) \geq 2\ln(2) - 1 = \ln(4) - \ln(e) > 0$, ce qui montre que f est croissante sur $[1, +\infty[$, et donc

$$\forall x \geq 1, \qquad f(x) \geq f(1) = 0,$$

ce qui donne l'inégalité $x + 1 \leq 2^x$ pour tout $x \geq 1$.
On en déduit par croissance de l'intégrale la majoration :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad 0 \leq J_n \leq \int_1^{+\infty} 2^{nx}e^{-nx}dx = \int_1^{+\infty} e^{nx(\ln(2)-1)}dx = \frac{e^{(\ln(2)-1)n}}{n(1-\ln(2))} = \frac{(2/e)^n}{n(1-\ln(2))},$$

ce qui prouve au passage que $J_n = o((2/e)^n)$.

13. Il est facile de vérifier que $f : x \mapsto (x+1)e^{-x}$ satisfait les 4 hypothèses **H1,H2,H3,H4** (avec une simple étude de fonction). On en conclut d'après la question 10. que

$$I_n = \int_{-1}^{1} f(x)^n dx \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2\pi}{n}}.$$

14. Enfin,

$$n! = n^{n+1}e^{-n}(I_n + J_n) = n^{n+1}e^{-n}\left(\sqrt{\frac{2\pi}{n}} + o(1/\sqrt{n}) + o((2/e)^n)\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi}\ n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n},$$

ce qui permet de retrouver la formule de Stirling :

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\ (n/e)^n.$$

Partie IV : formule de Bernstein

15. En reprenant la formule de la question 2. avec $x = 1$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad R_n(1) = \frac{e^n n^{n+1}}{n!} \int_0^1 (ue^{-u})^n du.$$

Avec le changement de variable affine $u = 1 - t$, on obtient

$$R_n(1) = \frac{n^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n e^{nt} dt.$$

16. Il est facile de vérifier que $f : t \mapsto (1-t)e^t$ satisfait les 4 hypothèses **H1,H2,H3,H4** (avec une simple étude de fonction). On en conclut d'après la question 10. que

$$R_n(1) = \frac{n^{n+1}}{n!} \int_0^1 f(t)^n dt \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{n+1}}{n!} \times \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

En combinant ceci avec la formule de Stirling, on obtient :

$$R_n(1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{n+1}}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}} \times \sqrt{\frac{\pi}{2n}} = \frac{e^n}{2}.$$

Enfin :

$$T_n(1) = e^n - R_n(1) = e^n - \frac{e^n}{2} + o(e^n) \sim \frac{e^n}{2}.$$

* * *