Corrigé du DS02 du 23/09/2025 (2h)
Sujet B (MPI)

Exercice 1 : Calcul de deux intégrales impropres

1. La fonction $x \mapsto \frac{\sin^2(x)}{x^2}$ est continue sur $]0, +\infty[$ donc l'intégrale I est impropre en 0 et $+\infty$. En 0, on a $\frac{\sin^2(x)}{x^2} \sim \frac{x^2}{x^2} = 1$, donc cette fonction se prolonge continûment, d'où la convergence de l'intégrale I en 0. En $+\infty$: puisque $\forall x \geq 1$, $0 \leq \frac{\sin^2(x)}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$ et que $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ converge, on en déduit la convergence de l'intégrale I en $+\infty$. Ainsi, l'intégrale I est convergente.
2. Effectuons une IPP sur le segment $[a, b]$, en primitivant la fonction $x \mapsto \sin(x)$ (qui est bien continue sur $[a, b]$), et en dérivant la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ (qui est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$) :
$$\int_a^b \frac{\sin(x)}{x} dx = \left[\frac{1-\cos(x)}{x}\right]_a^b + \int_a^b \frac{1-\cos(x)}{x^2} dx = \left[\frac{1-\cos(x)}{x}\right]_a^b + \int_a^b \frac{2\sin^2(x/2)}{x^2} dx.$$
On effectue alors le changement de variable $u = x/2$ dans la seconde intégrale et on obtient :
$$\int_a^b \frac{\sin(x)}{x} dx = \left[\frac{1-\cos(x)}{x}\right]_a^b + \int_{a/2}^{b/2} \frac{2\sin^2(u)}{4u^2} 2du = \left[\frac{1-\cos(x)}{x}\right]_a^b + \int_{a/2}^{b/2} \frac{\sin^2(u)}{u^2} du.$$
3. D'une part l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2} dx$ converge d'après la question 1., donc $\int_{a/2}^{b/2} \frac{\sin^2(u)}{u^2} du$ possède une limite finie lorsque $a \to 0^+$ et $b \to +\infty$ (indépendamment).
D'autre part, le crochet possède également des limites finies en 0^+ et $+\infty$ puisque $\frac{1-\cos(x)}{x} \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{1}{2}x \underset{x\to 0^+}{\to} 0$ et $\left|\frac{1-\cos(x)}{x}\right| \leq \frac{2}{x} \underset{x\to+\infty}{\to} 0$.
Donc par somme, l'intégrale $\int_a^b \frac{\sin(x)}{x} dx$ possède des limites finies en 0^+ et $+\infty$, ce qui montre que l'intégrale $J = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$ converge, et en passant à la limite dans la relation précédente on obtient
$$J = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = 0 - 0 + \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2} dx = I.$$
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Effectuons une IPP sur le segment $[\alpha, \beta]$, en primitivant $t \mapsto \sin(nt)$ (qui est continue) et en dérivant h (qui est $\mathcal{C}^1$) :
$$\int_\alpha^\beta h(t)\sin(nt)dt = \left[-\frac{\cos(nt)}{n}h(t)\right]_\alpha^\beta + \int_\alpha^\beta \frac{\cos(nt)}{n} h'(t)dt.$$
On en déduit
$$\left|\int_\alpha^\beta h(t)\sin(nt)dt\right| \leq \frac{|\cos(n\alpha)h(\alpha) - \cos(n\beta)h(\beta)|}{n} + \frac{1}{n}\int_\alpha^\beta |\cos(nt)h'(t)|dt$$
$$\leq \frac{|h(\alpha)| + |h(\beta)|}{n} + \frac{1}{n}\int_\alpha^\beta |h'(t)|dt = \frac{C}{n},$$
où C est une constante indépendante de n. Cette majoration entraîne $\left|\int_\alpha^\beta h(t)\sin(nt)dt\right| \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, ce qui montre le lemme.
5. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $t \mapsto \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)}$ est continue sur $]0, \pi/2]$, donc l'intégrale A_n est impropre en 0. Or, la fonction se prolonge continûment en 0, puisque $\frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)} \underset{t\to 0^+}{\sim} \frac{(2n+1)t}{t} = 2n+1$, donc l'intégrale A_n est convergente (car faussement impropre).

(b) Par linéarité de l'intégrale impropre convergente, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$A_{n+1} - A_n = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sin(t)} \left(\sin((2n+3)t) - \sin((2n+1)t)\right) dt.$$

Or,

$$\begin{aligned}\sin((2n+3)t) - \sin((2n+1)t) &= \sin((2n+2)t + t) - \sin((2n+2)t - t) \\ &= 2\sin(t)\cos((2n+2)t),\end{aligned}$$

donc

$$A_{n+1} - A_n = \int_0^{\pi/2} 2\cos((2n+2)t)dt = \left[\frac{\sin((2n+2)t)}{n+1}\right]_0^{\pi/2} = 0,$$

ce qui montre que la suite (A_n) est constante.
On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = A_0 = \int_0^{\pi/2} dt = \frac{\pi}{2}$.

6. (a) La fonction $h : t \mapsto \frac{1}{\sin(t)} - \frac{1}{t}$ est clairement continue sur $]0, \pi/2]$. De plus, on a

$$\forall t > 0, \qquad h(t) = \frac{t - \sin(t)}{t\sin(t)} \underset{t \to 0^+}{\sim} \frac{t^3/6}{t^2} = \frac{t}{6} \underset{t \to 0^+}{\to} 0 = h(0),$$

donc h est continue sur $[0, \pi/2]$.
En outre, h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \pi/2]$ avec

$$\forall t \in]0, \pi/2], \qquad h'(t) = \frac{-\cos(t)}{\sin^2(t)} + \frac{1}{t^2} = \frac{-t^2\cos(t) + \sin^2(t)}{t^2 \sin^2(t)} \underset{t \to 0^+}{\sim} \frac{t^4/6}{t^4} = \frac{1}{6},$$

donc $h'(t) \underset{t \to 0^+}{\to} \frac{1}{6}$. D'après le théorème du prolongement de la dérivée, on en déduit que h est dérivable en 0, avec $h'(0) = \lim\limits_{0^+} h' = \frac{1}{6}$. Ainsi, h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi/2]$.

(b) Puisque $h \in \mathcal{C}^1([0, \pi/2], \mathbb{R})$, on obtient par le lemme de Riemann-Lebesgue montré en question 4. que $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_0^{\pi/2} h(t)\sin(nt)dt = 0$. En raisonnant avec la suite extraite $\varphi(n) = 2n+1$, on obtient *a fortiori* que $\lim\limits_{n \to +\infty} B_n = 0$. Enfin, on a montré que $A_n = \pi/2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc par somme de limites, $\lim\limits_{n \to +\infty} (A_n - B_n) = \frac{\pi}{2}$.

(c) Pour terminer, faisons le lien entre $A_n - B_n$ et l'intégrale J. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$A_n - B_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t)}{t} dt.$$

(par linéarité de l'intégrale impropre convergente). En effectuant le changement de variable $x = (2n+1)t$, il vient :

$$A_n - B_n = \int_0^{n\pi + \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{x} dx.$$

Puisque l'intégrale $J = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$ converge (d'après la question 3.) et, on en déduit par composition de limites que $A_n - B_n \underset{n \to +\infty}{\to} J$. Finalement, $J = \lim\limits_{n \to +\infty} (A_n - B_n) = \frac{\pi}{2}$.

* * *

Exercice 2 : Etude de sommes doubles

Première partie

1. Pour $x \neq 1$ réel et $N \in \mathbb{N}$ on a

$$\sum_{n=0}^{N} x^n = \frac{1 - x^{N+1}}{1 - x},$$

donc $\sum_{n=0}^{N} x^n$ possède une limite finie lorsque $N \to +\infty$ si et seulement si $(x^{N+1})_N$ converge, ce qui revient à $|x| < 1$. Dans ce cas, on a :

$$\sum_{n=0}^{N} x^n \underset{N\to+\infty}{\to} \frac{1}{1-x}.$$

Enfin, si $x = 1$, on a

$$\sum_{n=0}^{N} x^n = \sum_{n=0}^{N} 1 = N+1 \underset{N\to+\infty}{\to} +\infty.$$

On peut donc conclure que $\sum_{n\geq 0} x^n$ converge si et seulement si $|x| < 1$ (c'est-à-dire $x \in]-1,1[$) et

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

2. Si $|x| \geq 1$, alors $|nx^n| \geq n$ donc la série $\sum_{n\geq 0} nx^n$ diverge grossièrement.
   Si $|x| < 1$, alors $n^3 x^n \to 0$ (par croissances comparées), donc $nx^n = o(1/n^2)$, ce qui montre que $\sum_{n\geq 0} nx^n$ converge absolument (par comparaison de SATP puisque $\sum 1/n^2$ converge).
   Finalement, $\sum_{n\geq 0} nx^n$ converge si et seulement si $|x| < 1$.
3. Soit $x \in]-1,1[$. Puisque la série géométrique $\sum x^n$ converge absolument, on peut effectuer son produit de Cauchy avec elle-même, et on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} x^k x^{n-k} \right) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right),$$

   c'est-à-dire

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2}$$

   (et la série obtenue est absolument convergente). En multipliant par x, on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^{n+1} = \frac{x}{(1-x)^2},$$

   et donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} nx^n = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^{n+1} = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

4. Si on pose $Q_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors en dérivant ce polynôme on obtient :

$$\forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}, \qquad Q_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1},$$

   donc en multipliant par x :

$$\sum_{k=0}^{n} kx^k = \sum_{k=1}^{n} kx^k = xQ_n'(x).$$

   Mais d'autre part on a $Q_n(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ pour tout $x \neq 1$, donc

$$\forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times]-1,1[, \qquad \sum_{k=0}^{n} kx^k = x\frac{d}{dx}\left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right) = \frac{x}{(1-x)^2} \underbrace{\left(-(n+1)x^n(1-x) + (1-x^{n+1})\right)}_{\underset{n\to+\infty}{\to} 1}.$$

En passant à la limite lorsque $n \to +\infty$, on obtient donc

$$\sum_{k=0}^{+\infty} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Deuxième partie

5. Attention, la série n'est pas à termes positifs ! On a $\left|\frac{nx^n}{1-x^n}\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} n|x|^n$ (puisque $x^n \to 0$), donc puisque $\sum n|x|^n$ converge (d'après la question 3. étant donné que le produit de Cauchy donne de la convergence absolue), on en déduit que $\sum \left|\frac{nx^n}{1-x^n}\right|$ converge. Ainsi, la série $\sum \frac{nx^n}{1-x^n}$ converge.

   En outre, puisque $x \in]-1,1[$, on a $x^n \in]-1,1[$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donc $\frac{1}{1-x^n} = \sum_{k=0}^{+\infty}(x^n)^k$, ce qui amène :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^n \left(\sum_{k=0}^{+\infty} x^{nk}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} nx^{n(1+k)}\right).$$

6. On va utiliser le théorème de Fubini sur la famille réelle $(u_{n,k}) = (nx^{n(1+k)})_{(n,k)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}}$, pour permuter les deux sommes dans la somme double précédemment obtenue.
   - Puisque la famille $(u_{n,k})$ **n'est pas à termes positifs**, on vérifie d'abord sa sommabilité en trouvant un procédé de sommation de $|u_{n,k}|$ qui donne une somme finie. Dans $[0,+\infty]$, on a, en reprenant le calcul de la question précédente avec des valeurs absolues :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} |u_{n,k}|\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} n|x|^n \left(\sum_{k=0}^{+\infty} |x^n|^k\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n|x|^n}{1-|x^n|} < +\infty,$$

     puisque $\frac{n|x|^n}{1-|x^n|} \sim n|x^n|$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} n|x^n| < +\infty$.
     On en déduit que la famille $(u_{n,k})$ est sommable d'après le théorème de Fubini positif.
   - On peut donc appliquer le théorème de Fubini complexe, qui donne directement :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} u_{n,k}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_{n,k}\right),$$

     c'est-à-dire

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^n}{1-x^n} = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} n(x^{1+k})^n\right).$$

     En utilisant la formule obtenue à la question 3., on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n(x^{1+k})^n = \sum_{n=0}^{+\infty} n(x^{1+k})^n = \frac{x^{1+k}}{(1-x^{1+k})^2},$$

     et on en déduit

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^n}{1-x^n} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{1+k}}{(1-x^{1+k})^2} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x^p}{(1-x^p)^2},$$

     avec convergence absolue de cette dernière série (puisqu'il y a sommabilité de $(u_{n,k})$.

Troisième partie

7. Puisque $\frac{1}{k^3(k+1)} \sim \frac{1}{k^4}$, la série $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^3(k+1)}$ converge (critère des équivalents pour les SATP), donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le reste $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^3(k+1)}$ est bien défini dans $\mathbb{R}$. Donc $(u_n)_{n\geq 1}$ est bien définie en tant que suite réelle.

8. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on peut réécrire $u_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{n}{k^3(k+1)} = \sum_{k=1}^{+\infty} a_{n,k}$ en posant

$$\forall (k,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*, \qquad a_{n,k} = \begin{cases} \frac{n}{k^3(k+1)} & \text{si } k \geq n \\ 0 & \text{si } k < n \end{cases}.$$

Puisque la famille $(a_{n,k})_{(n,k)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est à termes positifs, on a dans $[0, +\infty]$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} a_{n,k} \right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n,k} \right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{k} \frac{n}{k^3(k+1)} \right)$$

(d'après le théorème de Fubini positif) donc finalement :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3(k+1)} \times \frac{k(k+1)}{2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2k^2} = \frac{\pi^2}{12} < +\infty,$$

donc $\sum u_n$ converge et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \frac{\pi^2}{12}$.

Quatrième partie

9. Pour $i \in \mathbb{N}$ fixé et $J > i$, on a (en supprimant les termes nuls de la somme) :

$$\sum_{j=0}^{J} b_{i,j} = \sum_{j=i}^{J} b_{i,j} = -1 + \sum_{j=i+1}^{J} (1/2)^{j-i} = -1 + \sum_{j=1}^{J-i} (1/2)^j,$$

donc la série $\displaystyle\sum_{j\geq 0} b_{i,j}$ converge et en faisant $J \to +\infty$:

$$\forall i \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{j=0}^{+\infty} b_{i,j} = -1 + \sum_{j=1}^{+\infty} (1/2)^j = -1 + \frac{1/2}{1 - 1/2} = 0.$$

Ceci implique que

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} b_{i,j} \right) = \sum_{i=0}^{+\infty} 0 = 0.$$

10. Pour $j \in \mathbb{N}$ fixé et $I > j$, on a (en supprimant les termes nuls de la somme) :

$$\sum_{i=0}^{I} b_{i,j} = \sum_{i=0}^{j} b_{i,j} = -1 + \sum_{i=0}^{j-1} (1/2)^{j-i} = -1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1 - (1/2)^j}{1 - (1/2)} \right) = -(1/2)^j,$$

donc la série $\displaystyle\sum_{i\geq 0} b_{i,j}$ converge (c'est en fait une somme finie) et en faisant $I \to +\infty$:

$$\forall j \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{i=0}^{+\infty} b_{i,j} = \sum_{i=0}^{j} b_{i,j} = -(1/2)^j.$$

On reconnaît le terme général d'une série convergente, donc

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \left(\sum_{i=0}^{+\infty} b_{i,j} \right) = \sum_{j=0}^{+\infty} -(1/2)^j = -2.$$

11. Si on avait $\displaystyle\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} |b_{i,j}| < +\infty$, alors la famille $(b_{i,j})$ serait sommable et donc par le théorème de Fubini, on aurait

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \left(\sum_{i=0}^{+\infty} b_{i,j} \right) = \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} b_{i,j} \right).$$

Mais ce n'est pas le cas, donc

$$\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} |b_{i,j}| = +\infty.$$

Cinquième partie

12. Pour $i \in \mathbb{N}$ fixé et $J > i$, on a (en supprimant les termes nuls de la somme) :

$$\sum_{j=0}^{J} c_{i,j} = \sum_{j=i}^{J} c_{i,j} = i - 2\sum_{j=i+1}^{J} i3^{i-j} = i - 2i\sum_{j=1}^{J-i}(1/3)^j,$$

donc la série $\sum_{j\geq 0} c_{i,j}$ converge et en faisant $J \to +\infty$:

$$\forall i \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{j=0}^{+\infty} c_{i,j} = i - 2i\sum_{j=1}^{+\infty}(1/3)^j = i - 2i\left(\frac{1/3}{1-1/3}\right) = 0.$$

Ceci implique que

$$\sum_{i=0}^{+\infty}\left(\sum_{j=0}^{+\infty} c_{i,j}\right) = \sum_{i=0}^{+\infty} 0 = 0.$$

13. Pour $j \in \mathbb{N}$ fixé et $I > j$, on a (en supprimant les termes nuls de la somme) :

$$\sum_{i=0}^{I} c_{i,j} = \sum_{i=0}^{j} c_{i,j} = j - \frac{2}{3^j}\sum_{i=0}^{j-1} i3^i,$$

donc en faisant tendre $I \to +\infty$, on obtient la convergence de la série $\sum_{i\geq 0} c_{i,j}$ et

$$\sum_{i=0}^{+\infty} c_{i,j} = j - \frac{2}{3^j}\sum_{i=0}^{j-1} i3^i.$$

Réutilisons alors le calcul de la question 4. :

$$\forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}\setminus\{1\}, \qquad \sum_{k=0}^{n} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2}(-(n+1)x^n(1-x) + (1-x^{n+1})),$$

qui montre que

$$\sum_{i=0}^{j-1} i3^i = \frac{3}{(1-3)^2}(-jx^{j-1}(1-3) + (1-3^j)) = \frac{3}{4}(2j3^{j-1} + 1 - 3^j).$$

Finalement, on a

$$\forall j \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{i=0}^{+\infty} c_{i,j} = j - \frac{2}{3^j} \times \frac{3}{4}(2j3^{j-1} + 1 - 3^j) = \frac{1}{2}\left(\frac{3^j - 1}{3^{j-1}}\right).$$

14. D'après la question précédente, on a

$$\forall j \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{i=0}^{+\infty} c_{i,j} \underset{j\to+\infty}{\sim} \frac{3^j}{2\times 3^{j-1}} = \frac{3}{2},$$

donc la série $\sum_{j=0}^{+\infty}\left(\sum_{i=0}^{+\infty} c_{i,j}\right)$ diverge grossièrement.

Si on avait $\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} |c_{i,j}| < +\infty$, alors la famille $(c_{i,j})$ serait sommable donc par le théorème de Fubini on aurait convergence de la série $\sum_{j=0}^{+\infty}\left(\sum_{i=0}^{+\infty} c_{i,j}\right)$.

Ce n'est pas le cas, donc $\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} |c_{i,j}| = +\infty$.

* * *