DS02 du 12/10/2024 (4h)
Sujet B (MPI)

Le sujet se compose de 4 exercices indépendants.
Calculatrice interdite.

* * *

Exercice 1 : Questions sur les séries et intégrales

1. La série $\sum_{n\geq 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$ est-elle convergente ? Absolument convergente ?
2. La fonction $f : x \mapsto \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x^2-4}}$ est-elle intégrable sur $]2,+\infty[$?
3. Soit a un réel strictement positif. La fonction $g : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{1+x^{2a}}}$ est-elle intégrable sur $]0,+\infty[$?

* * *

Exercice 2 : Questions sur les structures algébriques

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}, \cdots, \overline{n}\}$ de sa structure d'anneau commutatif.

1. Rappeler la définition des deux lois internes de cet anneau et donner les éléments neutres respectifs.
2. Quels sont les éléments inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$? Démontrer.
3. Montrer que :
$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \text{ est un corps} \iff n \text{ est premier} \iff \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \text{ est intègre.}$$
4. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $6x \equiv 9\ [15]$
5. Qu'est-ce que la fonction indicatrice d'Euler $\varphi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$?
6. Enoncer et démontrer le théorème d'Euler.
7. Déterminer les deux derniers chiffres de $N = 53^{799}$.

* * *

Exercice 3 : Hyperplans de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

On fixe un entier $n \geq 2$. On note $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées à n lignes, n colonnes et à coefficients réels. On note $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des formes linéaires sur E.
Les éléments de E sont notés $M = (m_{i,j})$, la matrice élémentaire $E_{i,j}$ est la matrice de E dont les coefficients sont nuls à l'exception de celui qui se trouve sur la i^e ligne et sur la j^e colonne, qui vaut 1.
L'objectif du problème est de montrer que tout hyperplan vectoriel de E contient au moins une matrice inversible.

1. Redémontrer que la trace $Tr : E \to \mathbb{R}$ (somme des éléments diagonaux) est une forme linéaire, et que pour tout $U \in E$, l'application $T_U : M \mapsto Tr(UM)$ est aussi une forme linéaire.
   Dans la suite, on notera $H_U = Ker(T_U)$ pour tout $U \in E$.
2. Pour A, B dans E, exprimer $Tr(AB)$ et $Tr(A^T B)$ en fonction des coefficients de A et B, où A^T désigne la transposée de A. En déduire que $Tr(AB) = Tr(BA)$.
3. Soit $U \in E$.
   (a) Si U est nulle, déterminer H_U.
   (b) Si U n'est pas nulle, montrer que l'on peut trouver un couple d'entiers (i_0, j_0) tel que $T_U(E_{i_0,j_0}) \neq 0$. Décrire alors $Im(T_U)$ puis déterminer la dimension de H_U.
4. Pour $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, on note $T_{i,j} = T_{E_{j,i}}$.
   (a) Les indices k et l étant fixés, calculer $T_{i,j}(E_{k,l})$.
   (b) En déduire que les n^2 éléments $T_{i,j}$ forment une base de E^*.
   (c) Montrer que $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E^* \\ U & \longmapsto & \varphi(U) = T_U \end{array} \right.$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
5. On considère H un hyperplan vectoriel de E.
   (a) Soit A une matrice de E qui n'est pas dans H. Montrer que H et $Vect(A)$ sont supplémentaires dans E.
   (b) Construire alors un élément $\ell \in E^*$ tel que $H = Ker(\ell)$.
   (c) Prouver l'existence d'un élément $U \in E$ non nul tel que $H = H_U$.
6. Pour $1 \leq r \leq n$, on note $J_r = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} E_{i,i}$ et $A = E_{2,1} + E_{3,2} + \cdots + E_{n,n-1} + E_{1,n}$.
   (a) Prouver que A est inversible.
   (b) Prouver que A appartient à l'hyperplan H_{J_r}.
7. Conclure que chaque hyperplan H de E contient au moins une matrice inversible.
   Indication : lorsque $H = H_U$ avec U de rang r, on rappelle l'existence de matrices P, Q inversibles telles que $Q^{-1}UP = J_r$.

* * *

Exercice 4 : Méthode de Laplace et applications

On admettra la formule $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y^n}{n!} = e^y$, valable pour tout réel y.

Partie I : exponentielle tronquée

Pour x réel strictement positif et n entier naturel, on pose

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k x^k}{k!} \text{ et } R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n^k x^k}{k!}.$$

1. Justifier l'existence de $R_n(x)$. Que vaut la somme $T_n(x) + R_n(x)$?
2. En appliquant la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction $t \mapsto e^{nt}$, prouver pour tout réel x strictement positif, pour tout entier n, la relation :

$$R_n(x) = \frac{e^{nx} n^{n+1}}{n!} \int_0^x (ue^{-u})^n \, \mathrm{d}u\,.$$

Soit y un réel strictement positif. On pose

$$a_n = \frac{n^{n+1}}{n!} y^n.$$

3. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{n+1}/a_n$. En déduire que, si $y < e^{-1}$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0.$$

4. On suppose dans cette question que $x \in]0,1[$. Montrer que la fonction $u \mapsto ue^{-u}$ admet, sur $[0,x]$, un maximum M tel que $M < e^{-1}$. En déduire qu'au voisinage de l'infini,

$$R_n(x) = o(e^{nx}) \text{ puis que } T_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{nx}.$$

5. Démontrer la relation $n! = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n\, e^{-t}\, \mathrm{d}t$ pour tout n entier naturel.
6. Pour tout entier $n \geqslant 1$, montrer l'identité suivante :

$$T_n(x) = e^{nx} \frac{n^{n+1}}{n!} \int_x^{+\infty} (ue^{-u})^n \, \mathrm{d}u\,.$$

7. En déduire que, si $x > 1$, alors $T_n(x) = o(e^{nx})$ lorsque n tend vers $+\infty$.
   On pourra l'écrire $(ue^{-u})^n \leqslant (xe^{-x})^{n-1} ue^{-u}$ pour $u \geqslant x$.

Une estimation asymptotique de $T_n(x)$, pour $x = 1$, sera obtenue dans la suite du problème.

Partie II : méthode de Laplace

On admettra la formule de l'intégrale de Gauss :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2} \, \mathrm{d}t = \sqrt{2\pi}.$$

Soit $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur laquelle on fait les hypothèses suivantes :
H1 : $f(0) = 1$
H2 : $f''(0) = -1$
H3 : Pour tout $x \in]-1,1[\setminus\{0\}$, $\;0 < f(x) < 1$
H4 : les nombres $f(-1)$ et $f(1)$ appartiennent à l'intervalle $[0,1[$.
Pour $x \in]-1,1[\setminus\{0\}$, on pose

$$\varphi(x) = -\frac{1}{x^2} \ln\big(f(x)\big).$$

8. Montrer que $f'(0) = 0$ puis, à l'aide d'un développement limité, déterminer $k = \lim_{x \to 0} \varphi(x)$.

On prolonge φ en posant $\varphi(0) = k$.

9. Montrer que la fonction φ, sur $]-1, 1[$, est minorée par un réel strictement positif. En déduire l'existence d'un réel a strictement positif tel que pour tout $x \in [-1, 1]$, on ait

$$f(x) \leqslant e^{-ax^2}.$$

Indication : on pourra distinguer les cas où $f(1)$ et $f(-1)$ sont non nuls des cas où l'un des deux au moins est nul.

Pour tout n entier naturel non nul, on définit une fonction $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$g_n(u) = \begin{cases} \left(f\left(\dfrac{u}{\sqrt{n}}\right)\right)^n & \text{si } u \in [-\sqrt{n}, \sqrt{n}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

On admet le théorème suivant (qui est au programme et sera étudié ultérieurement) :

Théorème 1 (Convergence dominée)
Soit $(g_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continues par morceaux, telles que

- *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la suite réelle $(g_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers un réel noté $g(x)$.*
- *La fonction $g : x \mapsto g(x)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.*
- *Il existe une fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ intégrable sur $\mathbb{R}$ telle que*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ |g_n(x)| \leq h(x).$$

Alors les fonctions g_n et g sont intégrables sur $\mathbb{R}$ et $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} g_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}} g$.

10. En appliquant le théorème de convergence dominée à la suite (g_n) précédemment définie, montrer que

$$\int_{-1}^{1} \big(f(x)\big)^n \, \mathrm{d}x \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2\pi}{n}}.$$

On en déduit de la même manière (et on ne demande pas de le montrer) que

$$\int_{0}^{1} \big(f(x)\big)^n \, \mathrm{d}x \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}. \tag{1}$$

Partie III : formule de Stirling

Avertissement : même si elle fait partie du programme, on (re)démontre dans cette partie la formule de Stirling.

11. Pour tout entier $n \geqslant 1$, déduire de la question 5 que

$$n! = n^{n+1} e^{-n} (I_n + J_n),$$

avec

$$I_n = \int_{-1}^{1} (x+1)^n e^{-nx} \, \mathrm{d}x \text{ et } J_n = \int_{1}^{+\infty} (x+1)^n e^{-nx} \, \mathrm{d}x\,.$$

12. Montrer que pour tout $x \geqslant 1$, $x + 1 \leqslant 2^x$. En déduire une majoration de J_n.
13. En appliquant la méthode de Laplace, donner un équivalent de I_n.
14. En déduire que

$$n! \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Partie IV : formule de Bernstein

On reprend les notations $T_n(x)$ et $R_n(x)$ introduites dans la partie I.

15. Pour tout entier n non nul, montrer l'identité suivante :

$$R_n(1) = \frac{n^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n e^{nt} \, \mathrm{d}t \, .$$

16. En déduire un équivalent de $R_n(1)$ lorsque n tend vers l'infini. Prouver que

$$T_n(1) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2} e^n.$$

* * *