

DS02 du 23/09/2025 (2h) Sujet B (MPI)

Le sujet se compose de 2 exercices indépendants.
Calculatrice interdite.

* * *

Exercice 1 : Calcul de deux intégrales impropres

L'objectif de cet exercice est de calculer les deux intégrales impropres

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)^2}{x^2} dx, \quad J = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx.$$

1. Montrer que l'intégrale I est convergente.
2. Montrer que pour tous réels $0 < a < b$, on a

$$\int_a^b \frac{\sin(x)}{x} dx = \left[\frac{1 - \cos(x)}{x} \right]_a^b + \int_{a/2}^{b/2} \frac{\sin^2(x)}{x^2} dx.$$

3. En déduire que l'intégrale J est convergente exprimer J en fonction de I .
4. Démontrer le *lemme de Riemann-Lebesgue* : si $h \in \mathcal{C}^1([\alpha, \beta], \mathbb{R})$, alors $\int_\alpha^\beta h(t) \sin(nt) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
Indication : utiliser une intégration par parties.
5. On introduit la suite d'intégrales $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)} dt.$$

- (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale impropre A_n est convergente.
- (b) En simplifiant $A_{n+1} - A_n$, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, A_n = \frac{\pi}{2}$.

$$6. \text{ On considère la fonction } h : \begin{cases} [0, \pi/2] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \begin{cases} \frac{1}{\sin(t)} - \frac{1}{t} & \text{si } t > 0, \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases} \end{cases},$$

et la suite d'intégrales $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad B_n = \int_0^{\pi/2} h(t) \sin((2n+1)t) dt.$$

- (a) Montrer que h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi/2]$.
- (b) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} B_n$, puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} (A_n - B_n)$.
- (c) En déduire enfin la valeur de l'intégrale J .

* * *

Exercice 2 : Etude de sommes doubles

Première partie

1. **Question de cours** : déterminer les réels x pour lesquels la série $\sum_{n \geq 0} x^n$ converge, et dans ce cas, calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ (on attend une démonstration détaillée).
2. Déterminer les réels x pour lesquels $\sum_{n \geq 0} nx^n$ converge.
3. Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$ pour x réel à préciser, en utilisant un produit de Cauchy.
4. Retrouver le résultat précédent en utilisant la suite de polynômes $Q_n(x) = \sum_{k=0}^n x^k$.

Deuxième partie

Soit $x \in]-1, 1[$.

5. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{nx^n}{1-x^n}$ converge et que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} nx^{n(1+k)}.$$

6. Montrer que la série $\sum_{p \geq 1} \frac{x^p}{(1-x^p)^2}$ converge et que

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x^p}{(1-x^p)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^n}{1-x^n}.$$

Troisième partie

On admet que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

7. Montrer que l'on peut définir une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ en posant pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = n \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^3(k+1)}.$$

8. Montrer que $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge et calculer sa somme.

Quatrième partie

On considère la famille $(b_{i,j})_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ définie, pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, par

$$b_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i > j, \\ -1 & \text{si } i = j, \\ \frac{1}{2^{j-i}} & \text{si } i < j. \end{cases}$$

9. Montrer l'existence de $\sum_{i=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} b_{i,j} \right)$ dans $\mathbb{R}$ et calculer sa valeur.
10. Montrer l'existence de $\sum_{j=0}^{+\infty} \left(\sum_{i=0}^{+\infty} b_{i,j} \right)$ dans $\mathbb{R}$ et calculer sa valeur.

11. Déterminer $\sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} |b_{i,j}|$ dans $[0, +\infty]$.

Cinquième partie

On considère la famille $(c_{i,j})_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ définie, pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, par

$$c_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i > j, \\ j & \text{si } i = j, \\ -2i3^{i-j} & \text{si } i < j. \end{cases}$$

12. Montrer l'existence de $\sum_{i=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} c_{i,j} \right)$ dans $\mathbb{R}$ et calculer sa valeur.

13. Soit $j \in \mathbb{N}$. Montrer que la série $\sum_{i \geq 0} c_{i,j}$ converge et que $\sum_{i=0}^{+\infty} c_{i,j} = \frac{1}{2} \left(\frac{3^j - 1}{3^{j-1}} \right)$.

14. Déterminer $\sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} |c_{i,j}|$ dans $[0, +\infty]$.

* * *