X-ENS-ESPCI 2020 - PC

Partie I

1. Soient $A, B \in Sym^+(p)$ et a, b des réels positifs. On a bien $aA + bB \in Sym^+(p)$ puisque $aA + bB$ est symétrique (égale à sa transposée) et que pour tout $u \in \mathbb{R}^p$ on a :
$$u^T(aA + bB)u = \underbrace{a}_{\geqslant 0}\underbrace{u^T Au}_{\geqslant 0} + \underbrace{b}_{\geqslant 0}\underbrace{u^T Bu}_{\geqslant 0} \geqslant 0$$

2. Soit $v \in \mathbb{R}^p$. La matrice $A = v\ v^T$ est bien symétrique $\left(A^T = \left(v\ v^T\right)^T = v\ v^T = A\right)$ et pour tout $u \in \mathbb{R}^p$ il vient $u^T Au = u^T\left(v\ v^T\right)u = \left(u^T v\right)\left(v^T u\right)$. Or $v^T u$ est une matrice 1×1 (le produit scalaire canonique de u par v) donc égale à sa transposée $u^T v$ et on a bien
$$u^T Au = \left(u^T v\right)^2 \geqslant 0$$

3. a) Soient $u = (u_1, \cdots, u_p)^T,\ v = (v_1, \cdots, v_p)^T$ dans $\mathbb{R}^p$.
Notons $w = u \odot v = (w_1, \cdots, w_p)^T$. On a par définition : $\forall i \in \{1, \cdots, p\}\quad w_i = u_i v_i$.
Notons $A = u\ u^T = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant p}$, $B = v\ v^T = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant p}$ et $C = A \odot B = (c_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant p}$.
On a par définition : $\forall i, j \in \{1, \cdots, p\}\quad c_{i,j} = a_{i,j} b_{i,j}$.

   De plus pour $(i, j) \in \{1, \cdots, p\}^2$ on a $a_{i,j} = u_i u_j$ et $b_{i,j} = v_i v_j$ donc : $c_{i,j} = u_i u_j v_i v_j = w_i w_j = \left(w\ w^T\right)_{i,j}$.
Cela donne $C = w\ w^T$, ou encore $\left(u\ u^T\right) \odot \left(v\ v^T\right) = (u \odot v)(u \odot v)^T$.

   b) Remarquons que c'est le théorème spectral qui garantit l'existence d'une base orthonormale $(u_1, \cdots, u_p)$ de vecteurs propres pour A (réelle et symétrique) introduite dans l'énoncé.

   • Pour tout $k \in \{1, \cdots, p\}$ on a $0 \leqslant u_k^T Au_k = \lambda_k \|u_k\|^2$ et comme $\|u_k\|^2 > 0$ il vient $\lambda_k \in \mathbb{R}_+$.

   • Notons $B = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k\ u_k\ u_k^T$. Pour tout $j \in \{1, \cdots, p\}$ on a :
$$Bu_j = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k u_k\ u_k^T u_j = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k u_k \underbrace{\langle u_k, u_j\rangle}_{\delta_{j,k}} = \lambda_j u_j = Au_j$$

   Ce qui prouve que $B = A$ puisque les endomorphismes canoniquement associés coïncident sur la base $(u_1, \cdots, u_p)$ de $\mathbb{R}^p$.

   c) Par la question précédente, deux matrices A et B de $Sym^+(p)$ s'écrivent sous la forme $A = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k\ u_k\ u_k^T$ et $B = \sum_{k=1}^{p} \mu_k\ v_k\ v_k^T$ où les λ_k et le μ_k sont des réels <u>positifs</u> et où $(u_1, \cdots, u_p)$ et $(v_1, \cdots, v_p)$ sont des *bon* de vecteurs propres pour A et B respectivement. On a déjà (voir les coefficients) que $A \odot B$ est symétrique. De plus, on peut vérifier sans difficulté (sur les coefficients) la bilinéarité du produit $\odot$ dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. Il vient alors, avec la question **3-a)**
$$A \odot B = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \lambda_k \mu_l \left(u_k\ u_k^T\right) \odot \left(v_l\ v_l^T\right) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \lambda_k \mu_l (u_k \odot v_l)(u_k \odot v_l)^T$$

   La question **2)** donne que chaque $(u_k \odot v_l)(u_k \odot v_l)^T$ appartient à $Sym^+(p)$ et la question **1)** donne ensuite que $A \odot B$ appartient à $Sym^+(p)$.

Partie II

4. On a posé $P=\sum_{k=0}^{n}a_kX^k$ avec $a_0,\cdots,a_n\in\mathbb{R}_+$.

   a) On montre aisément par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$ à partir de la définition des puissances pour la lois $\odot$, que pour toute matrice A de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ on a
   $$\forall (i,j)\in\{1,\cdots,p\}^2 \quad \left[A^{(n)}\right]_{i,j}=A_{i,j}^n$$
   Alors si $(i,j)\in\{1,\cdots,p\}^2$ on a par définition de $P[A]$:
   $$P[A]_{i,j}\overset{déf}{=}P(A_{i,j})=\sum_{k=0}^{n}a_kA_{i,j}^k=\sum_{k=0}^{n}a_k\left[A^{(k)}\right]_{i,j}=(\sum_{k=0}^{n}a_kA^{(k)})_{i,j}$$
   cette dernière égalité provenant de la définition de coefficients d'une combinaison linéaire de matrices.

   Cela donne bien $P[A]=\sum_{k=0}^{n}a_kA^{(k)}$ puisque ces matrices ont mêmes coefficients.

   b) Soit $A\in Sym^+(p)$. La question **3-c)** donne (par récurrence immédiate) que $A^{(k)}\in Sym^+(p)$ pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, mais aussi pour $k=0$ car alors $A^{(0)}=u\ u^T$ avec $u=(1,\cdots,1)^T$ et la question **2)** donne $A^{(0)}\in Sym^+(p)$. A nouveau la question **1)** donne $P[A]=\sum_{k=0}^{n}a_kA^{(k)}\in Sym^+(p)$ (les coefficients a_k sont positifs).

5. Soit $A\in Sym^+(p)$. On note ici $P_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}X^k$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

   a) Pour $(i,j)\in\{1,\cdots,p\}^2$ on a : $\forall n\in\mathbb{N}\quad P_n[A]_{i,j}\overset{déf}{=}P_n(A_{i,j})=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}A_{i,j}^k\longrightarrow\exp(A_{i,j})$. CQFD.

   b) Notons que si A est une matrice symétrique, alors pour toute fonction f , la matrice $f[A]$ est encore symétrique puisque : $\forall i,j\qquad f[A]_{i,j}=f(A_{i,j})=f(A_{j,i})=f[A]_{j,i}$.
   Ainsi $\exp(A)$ est déjà symétrique et il reste à voir qu'elle est positive. Comme les coefficients de P_n sont positifs, la question **4)** donne $P_n[A]\in Sym^+(p)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Cela donne que pour tout $u=(u_1,\cdots,u_p)^T$ dans $\mathbb{R}^p$ on a
   $$\forall n\in\mathbb{N}\quad 0\leqslant u^TP_n[A]u=\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}P_n[A]_{i,j}u_iu_j$$
   La question **5-a)** donne, lorsque n tend vers $+\infty$: $0\leqslant\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\exp(A_{i,j})u_iu_j=u^T\exp[A]u$. CQFD.

   c) Soit $u\in\mathbb{R}^p$. Remarquons que $\exp[A]\odot\left(uu^T\right)=\left(e^{A_{i,j}}u_iu_j\right)_{1\leqslant i,j\leqslant p}$.

   La question **2)** donne $uu^T\in Sym^+(p)$ et comme $\exp[A]\in Sym^+(p)$ la question **3-c)** donne
   $$\exp[A]\odot\left(uu^T\right)\in Sym^+(p)$$

6. a) Cette matrice $A=(\langle x_i,x_j\rangle)_{1\leqslant i,j\leqslant p}$ est symétrique, par symétrie du produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^d$ et si $u\in\mathbb{R}^p$ alors
   $$u^TAu=\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}\langle x_i,x_j\rangle u_iu_j=|\sum_{i=1}^{n}u_ix_i|^2\geqslant 0$$

   b) On pose ici $u_i=\exp\left(-\frac{|x_i|^2}{2}\right)$. Il vient alors, pour $(i,j)\in\{1,\cdots,p\}^2$ et par définition de $\odot$
   $$\begin{aligned}\left(\exp[A]\odot\left(uu^T\right)\right)_{i,j} &= (\exp[A])_{i,j}\times\left(uu^T\right)_{i,j}\\ &= \exp(A_{i,j})u_iu_j=\exp(\langle x_i,x_j\rangle)\exp(-\tfrac{|x_i|^2}{2})\exp(-\tfrac{|x_j|^2}{2})\\ &= \exp[-\tfrac{1}{2}(|x_i|^2+|x_j|^2-2\langle x_i,x_j\rangle)]=\exp(-\tfrac{1}{2}|x_i-x_j|^2)\end{aligned}$$

c) D'après la question **5-c)** la matrice précédente $\exp[A]\odot(uu^T)$ appartient donc à $Sym^+(p)$ et pour obtenir exactement la matrice K demandée il suffit d'appliquer ce qu'on vient d'obtenir aux vecteurs $x_i'=\frac{1}{\sqrt{\lambda}}x_i$, $1\leqslant i\leqslant p$ puisque $\exp(-\frac{1}{2}\left|x_i'-x_j'\right|^2)=\exp(-\frac{1}{2\lambda}\left|x_i-x_j\right|^2)$.

Partie III

7. Montrons que la fonction $\varphi : y\in\mathbb{R}\longmapsto \exp\left(-y^2/a\right)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$ et paire. Au voisinage de $+\infty$ on a $\exp\left(-y^2/a\right)=o\left(1/y^2\right)$ et comme $y\mapsto 1/y^2$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ φ l'est aussi. Le caractère local de l'intégrabilité donne que φ est intégrable sur $[0,+\infty[$ et enfin sur $\mathbb{R}$ par parité.

   Soient alors f,g dans $\mathcal{E}$. Il existe (a,A) et (b,B) dans $\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ tels que pour tout $y\in\mathbb{R}$ $|f(y)|\leqslant A\exp\left(-y^2/a\right)$ et $|g(y)|\leqslant B\exp\left(-y^2/b\right)$. On a en particulier $|g(y)|\leqslant B$ et $\forall y\in\mathbb{R}$ $|f(y)g(y)|\leqslant AB\exp\left(-y^2/a\right)=AB\varphi(y)$.

   Par domination, $f\times g$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et $(f\mid g)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(y)g(y)\,dy$ existe bien.

8. a) $(f\mid f)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(y)^2\,dy$ est clairement positif (positivité de l'intégrale) et si $(f\mid f)=0$ alors $\forall y\in\mathbb{R}$ $f(y)^2=0$ puisque la fonction f^2 est continue et positive.

   Remarque : La bilinéarité et la symétrie étant évidentes on a que $(.|.)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{E}$.

   b) Soit $x\in\mathbb{R}$. L'application $f=\tau_x(\gamma_\lambda)$ est définie par $f:y\longmapsto\exp(-\frac{(y-x)^2}{\lambda})$. Elle vérifie

$$\lim_{x\to\pm\infty}\exp(\tfrac{y^2}{2\lambda})f(y)=\lim_{x\to\pm\infty}\exp[\tfrac{1}{\lambda}(-\tfrac{y^2}{2}+2xy-x^2)]=0\quad\text{car }\lambda>0$$

   la fonction $y\mapsto\exp(\frac{y^2}{2\lambda})f(y)$, continue sur $\mathbb{R}$ et possédant une limite en $-\infty$ et en $+\infty$, est bornée. et donc aux voisinages de $\pm\infty$ on a $|f(y)|=O[\exp(-\frac{y^2}{2\lambda})]$. Cela prouve que $f=\tau_x(\gamma_\lambda)$ appartient à $\mathcal{E}$ (car "a" $=2\lambda>0$).

9. a) Partons du membre de droite pour prouver l'égalité proposée, qui n'est autre que la forme canonique du trinôme en y :

$$\begin{aligned}\tfrac{a+\lambda}{a\lambda}\left(y-\tfrac{ax}{a+\lambda}\right)^2+\tfrac{x^2}{a+\lambda}&=\tfrac{a+\lambda}{a\lambda}\left(y^2-2\tfrac{axy}{a+\lambda}+\tfrac{a^2x^2}{(a+\lambda)^2}\right)+\tfrac{x^2}{a+\lambda}\\&=\tfrac{a+\lambda}{a\lambda}y^2-2\tfrac{xy}{\lambda}+\tfrac{ax^2}{\lambda(a+\lambda)}+\tfrac{x^2}{a+\lambda}\\&=\tfrac{1}{\lambda}y^2+\tfrac{1}{a}y^2-2\tfrac{xy}{\lambda}+\tfrac{x^2}{\lambda}=\tfrac{(y-x)^2}{\lambda}+\tfrac{y^2}{a}\end{aligned}$$

   Il vient alors

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-\tfrac{(y-x)^2}{\lambda})\exp(-\tfrac{y^2}{a})dy&=\int_{-\infty}^{+\infty}\exp[-\tfrac{a+\lambda}{a\lambda}\left(y-\tfrac{ax}{a+\lambda}\right)^2-\tfrac{x^2}{a+\lambda}]\,dy\\&=\exp\left(-\tfrac{x^2}{a+\lambda}\right)\int_{-\infty}^{+\infty}\exp[-\tfrac{a+\lambda}{a\lambda}\left(y-\tfrac{ax}{a+\lambda}\right)^2\,dy\end{aligned}$$

   Or l'application $\psi:t\longmapsto t+\frac{ax}{a+\lambda}$ est une bijection de classe C^1 strictement croissante de $\mathbb{R}$ sut lui-même qui autorise le changement de variable "$y=\psi(t)=t+\frac{ax}{a+\lambda}$" dans l'intégrale généralisée suivante. Il donne (puisque $dy=dt$) :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-\tfrac{(y-x)^2}{\lambda})\exp(-\tfrac{y^2}{a})dy=\exp\left(-\tfrac{x^2}{a+\lambda}\right)\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-\tfrac{a+\lambda}{a\lambda}t^2)dt$$

   La constante (par rapport à $x\in\mathbb{R}$), $c=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp(-\frac{a+\lambda}{a\lambda}t^2)dt$, convient donc.

b) Soit $g \in \mathcal{E}$. Il existe donc $(a, A) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ tel que : $\forall y \in \mathbb{R}\ \ |g(y)| \leqslant A \exp(-y^2/a)$. On a pour $x \in \mathbb{R}$:

$$C(g)(x) = (\tau_x(\gamma_\lambda) | g) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{\lambda}\right) g(y)\, dy$$

• Montrons que $C(g)$ est continue sur $\mathbb{R}$ à l'aide du théorème de continuité sous le signe intégrale.

Si on pose

$$\begin{array}{rcl} G : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{\lambda}\right) g(y) = \tau_x(\gamma_\lambda)(y)\, g(y) \end{array}$$

alors on a :

⇝ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'application $y \longmapsto G(x, y)$ est continue par morceaux (car g est continue) et intégrable. En effet $\tau_x(\gamma_\lambda) \in \mathcal{E}$ d'après **8-a)** et g aussi donc la question **7)** donne que leur produit $\tau_x(\gamma_\lambda)\, g$ est intégrable.

⇝ Pour tout $y \in \mathbb{R}$, l'application $x \longmapsto G(x, y)$ est continue car $x \mapsto \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{\lambda}\right)$ l'est et que $g(y)$ est une constante.

⇝ On a enfin l'hypothèse de domination suivante :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad |G(x, y)| = \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{\lambda}\right) |g(y)| \leqslant 1 \times A \exp(-y^2/a) = \varphi(x) \ \text{ qui est intégrable}$$

Le théorème évoqué donne la continuité de $C(g)$, comme fonction de x.

• Déterminons ensuite une majoration prouvant que $C(g)$ appartient à $\mathcal{E}$. On a déjà pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$|C(g)(x)| = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{\lambda}\right) |g(y)|\, dy \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{\lambda}\right) A \exp(-y^2/a)\ dy$$

Utilisons alors l'égalité de la question **9-a)** où on avait trouvé "c" $= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{a+\lambda}{a\lambda} t^2\right) dt$. Cela donne ici :

$$|C(g)(x)| \leqslant A\ \exp\left(-\frac{x^2}{a+\lambda}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{a+\lambda}{a\lambda} t^2\right) dt$$

Le réel $\lambda > 0$ étant fixé dans cette partie et (a, A) ne dépendant que du choix de g dans $\mathcal{E}$ on obtient ainsi deux constantes strictement positives

$$B = A \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{a+\lambda}{a\lambda} t^2\right) dt \quad \text{et} \quad b = a + \lambda$$

vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R}\quad |C(g)(x)| \leqslant B \exp(-x^2/b)$, ce qui prouve que $C(g) \in \mathcal{E}$.

c) Soient g et h dans $\mathcal{E}$ et α, β dans $\mathbb{R}$. On a pour tout réel x :

$$\begin{aligned} C(\alpha g + \beta h)(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{\lambda}\right) (\alpha g + \beta h)(y)\, dy = \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{\lambda}\right) g(y)\, dy + \beta \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{\lambda}\right) h(y)\, dy \\ &= [\alpha C(g) + \beta C(h)](x) \end{aligned}$$

ce qui prouve que $C(\alpha g + \beta h) = \alpha C(g) + \beta C(h)$ et le fait que C est un endomorphisme de $\mathcal{E}$.

Partie IV

10. Soit $\mathcal{F}$ un sous-espace de $\mathcal{E}$ contenant toutes les fonctions $\tau_x(\gamma_\lambda)$, $x \in \mathbb{R}$. Il contient alors leurs combinaisons linéaires donc $\mathcal{F} \supset \mathcal{G}$. Par ailleurs $\mathcal{G}$ contient l'application nulle (prendre $n = 1$, $x_1 = \alpha_1 = 0$) et toutes les fonctions $\tau_x(\gamma_\lambda)$, $x \in \mathbb{R}$ (prendre $n = 1$, $x_1 = x, \alpha_1 = 1$). Il est de plus clairement stable par combinaison linéaire. C'est donc le plus petit sous-espace de $\mathcal{E}$ contenant toutes les fonctions $\tau_x(\gamma_\lambda)$, $x \in \mathbb{R}$.

11. a) On a d'abord :

$$(\tau_x(\gamma_\lambda)\,|\tau_{x'}(\gamma_\lambda)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\tfrac{(y-x)^2}{\lambda})\exp(-\tfrac{(y-x')^2}{\lambda})dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\tfrac{1}{\lambda}[(y-x)^2+(y-x')^2]dy$$

et en utilisant la remarque de l'énoncé (que l'on ne demande pas de démontrer cette fois) :

$$\begin{aligned}(\tau_x(\gamma_\lambda)\,|\tau_{x'}(\gamma_\lambda)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-\tfrac{(x-x')^2}{2\lambda} - \tfrac{2}{\lambda}(y-(\tfrac{x+x'}{2}))^2]dy \\ &= \exp(-\tfrac{(x-x')^2}{2\lambda})\int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-\tfrac{2}{\lambda}(y-\tfrac{x+x'}{2})^2]dy \\ &= \exp(-\tfrac{(x-x')^2}{2\lambda})\int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-\tfrac{2}{\lambda}t^2]dt\end{aligned}$$

... la dernière égalité étant obtenue, comme en **9-a),** par le changement de variable affine $y = t + \frac{x+x'}{2}$.

Si on pose $\boxed{c_\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\frac{2}{\lambda}t^2)dt}$ on a bien : $(\tau_x(\gamma_\lambda)\,|\tau_{x'}(\gamma_\lambda)) = c_\lambda\ \gamma_{2\lambda}(x-x')$.

b) • Il s'ensuit que pour x fixé on a, en utilisant que $\gamma_{2\lambda}$ est paire :

$$\forall x' \in \mathbb{R} \quad C(\tau_x(\gamma_\lambda))(x') = (\tau_{x'}(\gamma_\lambda)\,|\tau_x(\gamma_\lambda)) = c_\lambda\ \gamma_{2\lambda}(x'-x) = c_\lambda\tau_x(\gamma_{2\lambda})(x')$$

et on a donc l'égalité des fonctions : $C(\tau_x(\gamma_\lambda)) = c_\lambda\tau_x(\gamma_{2\lambda})$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

• Comme C est linéaire et que $\mathcal{G}$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des $\tau_x(\gamma_\lambda)$, $x \in \mathbb{R}$ il vient que $\mathcal{H} = C(\mathcal{G})$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des $C(\tau_x(\gamma_\lambda))$, $x \in \mathbb{R}$, autrement dit (avec ce qui précède) des $c_\lambda\tau_x(\gamma_{2\lambda})$, $x \in \mathbb{R}$ ou plus simplement (vu que c_λ est une constante non nulle) : $\mathcal{H}$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des $\tau_x(\gamma_{2\lambda})$, $x \in \mathbb{R}$. CQFD.

12. a) Appelons $(\mathcal{P}_n)$ la propriété de l'énoncé, à démontrer par récurrence sur n.

Initialisation : Supposons que $(\alpha_1, x_1) \in \mathbb{R}^2$ sont tels que $\alpha_1\tau_{x_1}(\gamma_{2\lambda}) = 0$. On a alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ $\alpha_1 \exp(-\frac{(x-x_1)^2}{2\lambda}) = 0$ et donc $\alpha_1 = 0$. Ainsi $(\mathcal{P}_1)$ est vraie.

Hérédité : Supposons que $(\mathcal{P}_{n-1})$ est vraie pour un certain entier $n \geqslant 2$.

Supposons ensuite que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda}) = 0$. On a la relation :

$$(1) \qquad \forall x \in \mathbb{R} \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \exp(-\tfrac{(x-x_i)^2}{2\lambda}) = 0$$

En dérivant (1) et en simplifiant par le facteur $-\frac{1}{\lambda}$ il vient

$$(2) \qquad \forall x \in \mathbb{R} \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x-x_i)\exp(-\tfrac{(x-x_i)^2}{2\lambda}) = 0$$

A x fixé, la combinaison $x \times (1) - (2)$ donne

$$(3) \qquad \forall x \in \mathbb{R} \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \exp(-\tfrac{(x-x_i)^2}{2\lambda}) = 0$$

et alors la combinaison $x_n \times (1) - (3)$ donne

$$(4) \qquad \forall x \in \mathbb{R} \quad \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i(x_n-x_i)\exp(-\tfrac{(x-x_i)^2}{2\lambda}) = 0$$

ce qui n'est autre que $\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i (x_n - x_i) \tau_{x_i} (\gamma_{2\lambda}) = 0$. L'hypothèse de récurrence donne alors $\forall i \in \{1, \cdots, n-1\} \quad \alpha_i (x_n - x_i)$ et comme les x_i sont distincts il vient $\forall i \in \{1, \cdots, n-1\} \quad \alpha_i = 0$ et un retour à (1) donne alors $\alpha_n = 0$. CQFD.

b) *Remarques initiales :*

- Ce qui précède donne qu'un élément h de $\mathcal{H} \backslash \{0\}$ s'écrit de façon unique sous la forme : $h = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \tau_{x_i} (\gamma_{2\lambda})$, si on exige que les α_i sont non nuls (autrement dit on n'écrit que les vecteurs $\tau_{x_i} (\gamma_{2\lambda})$ qui apparaissent vraiment).

- Le programme PC n'aborde pas la notion de base d'un espace de dimension infinie et nous allons donc nous en passer. Ce qui est en jeu ici ce sont les familles $\mathcal{T} = \{\tau_x (\gamma_\lambda), \ x \in \mathbb{R}\}$ et $\mathcal{U} = \{\tau_x (\gamma_{2\lambda}), \ x \in \mathbb{R}\}$ d'éléments de $\mathcal{E} = \mathcal{C} (\mathbb{R}, \mathbb{R})$ qui sont en fait des *bases* des sous-espaces $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$.

• *Unicité :* Si D existe alors $\forall x \in \mathbb{R} \quad (D \circ C) (\tau_x(\gamma_\lambda)) = \tau_x(\gamma_\lambda)$ et la question **11-b)** donne $c_\lambda D (\tau_x(\gamma_{2\lambda})) = \tau_x(\gamma_\lambda)$ et nécessairement

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad D (\tau_x(\gamma_{2\lambda})) = \tfrac{1}{c_\lambda} \tau_x(\gamma_\lambda)$$

et pour $h = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \tau_{x_i} (\gamma_{2\lambda})$ quelconque dans $\mathcal{H}$ on a nécessairement :

$$(*) \quad D (h) = D(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \tau_{x_i} (\gamma_{2\lambda})) = \frac{1}{c_\lambda} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \tau_{x_i} (\gamma_\lambda)$$

• *Existence :* Réciproquement, puisque toute fonction h de $\mathcal{H} \backslash \{0\}$ s'écrit de manière unique $h = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \tau_{x_i} (\gamma_{2\lambda})$ on définit bien une application D de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{G}$ par la formule $(*)$ ci-dessus. On pose de plus $h(0) = 0$. On vérifie aisément de D est linéaire et à valeurs dans $\mathcal{G}$. Ensuite :

- Pour $g \in \mathcal{G} \backslash \{0\}$ s'écrivant de manière unique $g = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \tau_{x_i} (\gamma_\lambda)$ on a :

$$(D \circ C) (g) = D[C(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \tau_{x_i} (\gamma_\lambda))] = D[\sum_{i=1}^{n} \alpha_i c_\lambda \tau_{x_i} (\gamma_{2\lambda}))] = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i c_\lambda D(\tau_{x_i} (\gamma_{2\lambda})) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \tau_{x_i} (\gamma_\lambda) = g$$

- De même (les rôles de λ et 2λ s'inversent) : $\forall h \in \mathcal{H} \quad (C \circ D)(h) = h$.

c) Soit $h \in \mathcal{H}$ et $g = D(h)$. Pour $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$h(x) = (C \circ D)(h)(x) = C(g)(x) = (\tau_x (\gamma_\lambda) | g) = (\tau_x (\gamma_\lambda) | D(h))$$

13. a) Même si l'énoncé ne nous le fait pas dire, on a vu à la question **8-a** que la formule $(f \mid g) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(y) g(y) \, dy$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{E}$. Dès lors, compte tenu de la linéarité de D il est clair que la formule

$$(h_1 | h_2)_{\mathcal{H}} = c_\lambda (D(h_1) \mid D(h_2))$$

définit une application bilinéaire, symétrique et positive sur $\mathcal{H}^2$. Enfin si $h \in \mathcal{H}$ vérifie $(h|h)_{\mathcal{H}} = 0$ alors (avec **8-a**) on a $D(h) = 0$ (puisque $c_\lambda \neq 0$) et en appliquant C il vient $h = 0$. L'application $(.|.)_{\mathcal{H}}$ est donc bien un produit scalaire sur $\mathcal{H}$.

b) On utilise **12-c** et le fait (vu plus haut) que $\tau_x(\gamma_\lambda) = c_\lambda D (\tau_x(\gamma_{2\lambda}))$. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathcal{H}$ on a :

$$(*) \qquad h(x) = (\tau_x (\gamma_\lambda) | D(h)) = c_\lambda (D (\tau_x(\gamma_{2\lambda})) | D(h)) = (\tau_x(\gamma_{2\lambda}) | h)_{\mathcal{H}}$$

c) L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne pour tout $h \in \mathcal{H}$ et $x \in \mathbb{R}$:

$$|h(x)| = |(\tau_x(\gamma_{2\lambda}) | h)_{\mathcal{H}}| \leqslant \|\tau_x(\gamma_{2\lambda})\|_{\mathcal{H}} \|h\|_{\mathcal{H}}$$

En prenant "h" $= \tau_x(\gamma_{2\lambda})$ et "x" $= x$ dans $(*)$ il s'ensuit :

$$1 = \tau_x(\gamma_{2\lambda})(x) = (\tau_x(\gamma_{2\lambda}) | \tau_x(\gamma_{2\lambda}))_{\mathcal{H}} = \|\tau_x(\gamma_{2\lambda})\|_{\mathcal{H}}^2$$

On a donc $\forall x \in \mathbb{R} \ |h(x)| \leqslant 1 \times \|h\|_{\mathcal{H}}$ puis $\|h\|_\infty \leqslant \|h\|_{\mathcal{H}}$.

Partie V

Dans cette partie $\lambda > 0$, $x_1, \cdots, x_p$ et $a_1, \cdots, a_p$ sont fixés dans $\mathbb{R}$ et les x_i sont deux à deux distincts.

14. Supposons que $\mathcal{S}_*$ est non vide. Soient alors h_1 et h_2 dans $\mathcal{S}_*$. L'élément $h = \frac{1}{2}(h_1 + h_2)$ appartient encore à $\mathcal{S}$ puisque :
$$\forall i \in \{1, \cdots, p\} \quad h(x_i) = \frac{1}{2}(h_1(x_i) + h_2(x_i)) = \frac{1}{2} \times 2a_i = a_i$$
On a donc $J(h_1) = J(h_2) = J_* \leqslant J(h)$. De plus l'identité du parallélogramme donne
$$\|h_1 + h_2\|_{\mathcal{H}}^2 + \|h_1 - h_2\|_{\mathcal{H}}^2 = 2\|h_1\|_{\mathcal{H}}^2 + 2\|h_1\|_{\mathcal{H}}^2$$
ou encore :
$$\|h\|_{\mathcal{H}}^2 + \left\|\tfrac{h_1 - h_2}{2}\right\|_{\mathcal{H}}^2 = \frac{1}{2}\|h_1\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{1}{2}\|h_2\|_{\mathcal{H}}^2 = 2J_*$$
et donc : $J_* \leqslant J(h) = \frac{1}{2}\|h\|_{\mathcal{H}}^2 = J_* - \frac{1}{2}\left\|\frac{h_1 - h_2}{2}\right\|_{\mathcal{H}}^2$ ce qui oblige $\left\|\frac{h_1 - h_2}{2}\right\|_{\mathcal{H}}^2 = 0$ et donc $h_1 = h_2$.
On a bien prouvé que $\mathcal{S}_*$ admet au plus un élément.

Remarque : pour les questions suivantes il est bon maintenant d'interpréter $\mathcal{S}$ et $\mathcal{H}_0$, qui sont des parties de $\mathcal{H}$, à l'aide du produit scalaire sur $\mathcal{H}$.

D'après la question **13-b** on a pour $h \in \mathcal{H}$ et $i \in \{1, \cdots, p\}$ $\boxed{h(x_i) = (\tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda})|h)_{\mathcal{H}}}$.
Ainsi, si on note $e_i = \tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda})$ pour $i \in \{1, \cdots, p\}$, alors on a une autre écriture de $\mathcal{S}$ et $\mathcal{H}_0$:
$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \{h \in \mathcal{H} \ / \ \forall i \in \{1, \cdots, p\} \quad (e_i|h)_{\mathcal{H}} = a_1\} \\ \mathcal{H}_0 &= \{h \in \mathcal{H} \ / \ \forall i \in \{1, \cdots, p\} \quad (e_i|h)_{\mathcal{H}} = 0\} \end{aligned}$$

15. Supposons que $\widetilde{h} \in \mathcal{S}_*$ existe. Pour tout $h_0 \in \mathcal{H}_0$ et $t \in \mathbb{R}$ on a :
$$\forall i \in \{1, \cdots, p\} \quad (\widetilde{h} + t\ h_0)(x_i) = \widetilde{h}(x_i) + t\ h_0(x_i) = a_i$$
donc $\widetilde{h} + t\ h_0 \in \mathcal{S}$ et on a alors $\forall t \in \mathbb{R} \ \ J(\widetilde{h} + t\ h_0) \geqslant J_* = J(\widetilde{h})$ ou encore :
$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \left\|\widetilde{h} + t\ h_0\right\|_{\mathcal{H}}^2 \geqslant \left\|\widetilde{h}\right\|_{\mathcal{H}}^2$$
Par développement du carré, et simplification il vient : $\forall t \in \mathbb{R} \ \ 2t\left(\widetilde{h}|h_0\right)_{\mathcal{H}} + t^2\|h_0\|_{\mathcal{H}}^2 \geqslant 0$ et cela n'est possible que si $\left(\widetilde{h}|h_0\right)_{\mathcal{H}} = 0$ car sinon la somme, équivalente en 0 à son premier terme, changerait de signe au passage de la valeur 0. On a donc : $\forall h_0 \in \mathcal{H}_0 \quad \left(\widetilde{h}|h_0\right)_{\mathcal{H}} = 0$.

16. a) On vient de voir que $\mathcal{S}_* \subset \mathcal{S} \cap \mathcal{H}_0^{\perp}$ lorsque $\mathcal{S}_*$ est non vide, et c'est trivial si $\mathcal{S}_*$ est vide.

    Réciproquement, supposons que $\widetilde{h} \in \mathcal{S} \cap \mathcal{H}_0^{\perp}$ (si cette partie est non vide, sinon c'est trivial). Pour tout h de $\mathcal{S}$ on a $h - \widetilde{h} \in \mathcal{H}_0$ donc le théorème de Pythagore donne
$$\forall h \in \mathcal{S} \quad \|h\|_{\mathcal{H}}^2 = \left\|\widetilde{h}\right\|_{\mathcal{H}}^2 + \left\|h - \widetilde{h}\right\|_{\mathcal{H}}^2 \geqslant \left\|\widetilde{h}\right\|_{\mathcal{H}}^2$$
    et donc $\forall h \in \mathcal{S} \ \ J(h) = \frac{1}{2}\ \|h\|_{\mathcal{H}}^2 \geqslant \frac{1}{2}\ \left\|\widetilde{h}\right\|_{\mathcal{H}}^2 = J(\widetilde{h})$ et $J(\widetilde{h}) = \min\limits_{\mathcal{S}} J(h)$ donc $\widetilde{h} \in \mathcal{S}_*$.

    b) *Rappel :* Pour un sev F d'un espace préhilbertien E on a toujours $F \subset \left(F^{\perp}\right)^{\perp}$. Notons alors $\mathcal{V}_p = vect(e_1, \cdots, e_p)$. Par la définition de l'énoncé on a alors $\mathcal{H}_0 = \mathcal{V}_p^{\perp}$ et donc $\mathcal{V}_p \subset \left(\mathcal{V}_p^{\perp}\right)^{\perp} = (\mathcal{H}_0)^{\perp}$.

    Remarque : On a en fait $\mathcal{H}_0^{\perp} = \mathcal{V}_p$! En effet comme $\mathcal{V}_p = vect(e_1, \cdots, e_p)$ est un sous-espace vectoriel **de dimension finie** de $\mathcal{H}$, le cours sur les espaces préhilbertiens donne $\mathcal{H} = \mathcal{V}_p \oplus \mathcal{V}_p^{\perp}$ et $\left(\mathcal{V}_p^{\perp}\right)^{\perp} = \mathcal{V}_p$. Comme on a en fait $\mathcal{H}_0 = \mathcal{V}_p^{\perp}$ il vient
$$\mathcal{H} = (\mathcal{H}_0)^{\perp} \oplus \mathcal{H}_0$$

17. On déduit de la question précédente que si on trouve un vecteur $h_\alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda})$ de $\mathcal{V}_p$ qui appartient à $\mathcal{S}$ alors c'est h_* l'unique élément de $\mathcal{S}_*$.

a) Calculons les produits scalaires $(e_i|e_j)_\mathcal{H}$. La formule $h(x) = (\tau_x(\gamma_{2\lambda})|h)_\mathcal{H}$ de la question **13-b** appliquée à "x" $= x_i$ et "h" $= e_j = \tau_{x_j}(\gamma_{2\lambda})$ donne $\tau_{x_j}(\gamma_{2\lambda})(x_i) = (e_i|e_j)_\mathcal{H}$ soit

$$(e_i|e_j)_\mathcal{H} = \exp\left(-\frac{1}{2\lambda}(x_j - x_i)^2\right)$$

Alors pour $j \in \{1, \cdots, p\}$ $\quad h_\alpha(x_j) = (e_j|h_\alpha)_\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (e_i|e_j)_\mathcal{H}$ et

$$h_\alpha \in \mathcal{S} \Longleftrightarrow \forall j \in \{1, \cdots, p\} \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \exp\left(-\tfrac{1}{2\lambda}(x_i - x_j)^2\right) = a_j \Longleftrightarrow \mathcal{K}\alpha = a$$

où $\mathcal{K} = \left(\exp\left(-\frac{1}{2\lambda}(x_i - x_j)^2\right)\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est la matrice du système linéaire ci-dessus. On reconnaît exactement la matrice symétrique positive (avec $d = 1$) de la question **6)**.

b) Montrons que $\mathcal{K} = ((e_i|e_j)_\mathcal{H})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est inversible. En effet si $u \in \mathbb{R}^p$ vérifie $\mathcal{K}u = 0$ alors $0 = u^T\mathcal{K}u = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}(e_i|e_j)_\mathcal{H} u_i u_j = ||\sum_{i=1}^{n} u_i e_i||^2_\mathcal{H}$ puis $\sum_{i=1}^{n} u_i e_i = 0_E$ et $u = (0, \cdots, 0)$ puisque la famille de vecteurs $(e_1, \cdots, e_p)$ est libre (démontré en **12-a)**.

18. Le système est donc de Cramer et admet une unique solution $\alpha_* = \mathcal{K}^{-1}a$ telle que, en notant

$$\mathcal{S}_* = \{h_{\alpha_*}\} \quad \text{où} \quad h_{\alpha_*} = \sum_{i=1}^{p} \alpha_{*i}\, e_i = \sum_{i=1}^{p} \alpha_{*i} \tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda})$$

Remarque : on vient donc de démontrer que $\mathcal{S}_*$ n'est pas vide, et dans le même temps que c'est un singleton.

On a enfin $J_* = J(h_{\alpha_*}) = \frac{1}{2}\|h_*\|^2_\mathcal{H} = \frac{1}{2}||\sum_{i=1}^{p} \alpha_{*i}\, e_i||^2_\mathcal{H} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}(e_i|e_j)_\mathcal{H}\, \alpha_{*i}\alpha_{*j} = \frac{1}{2}\, \alpha_*^T\mathcal{K}\alpha_*$ et, puisque $\alpha_* = \mathcal{K}^{-1}a$: $J_* = \frac{1}{2}\, a^T\left(\mathcal{K}^{-1}\right)^T .\mathcal{K}\ \left(\mathcal{K}^{-1}a\right)$. Finalement :

$$\boxed{J_* = \tfrac{1}{2}\, a^T\mathcal{K}^{-1}a}$$

la dernière égalité provenant de ce que $\mathcal{K}$ est symétrique et donc $\mathcal{K}^{-1}$ aussi.