Corrigé du DS02 du 12/10/2024 (4h)
Sujet A (MPI*)

* * *

Exercice 1 : Nombres algébriques et entiers algébriques
Extrait du sujet X-ENS MP Math A 2019

Partie I

1. $I(\alpha)$ contient clairement le polynôme nul $0_{\mathbb{Q}[X]}$, $I(\alpha)$ est stable par somme (puisque si P, Q sont dans $I(\alpha)$, alors $(P+Q)(\alpha) = P(\alpha) + Q(\alpha) = 0 + 0 = 0$ donc $P + Q \in I(\alpha)$), et $I(\alpha)$ est absorbant (puisque si $P \in I(\alpha)$ et $Q \in \mathbb{Q}[X]$, alors $(PQ)(\alpha) = P(\alpha)Q(\alpha) = 0Q(\alpha) = 0$ donc $PQ \in I(\alpha)$).
   Ainsi, $I(\alpha)$ est un idéal de $\mathbb{Q}[X]$. De plus, $I(\alpha)$ contient au moins un élément non nul de $\mathbb{Q}[X]$ car α est un nombre algébrique.
2. Vu que les polynômes constants non nuls ne sont jamais dans $I(\alpha)$, l'unique générateur unitaire Π_α de l'idéal $I(\alpha)$ est nécessairement de degré ≥ 1.
   Si α est de degré 1, alors $\Pi_\alpha = X + q$ avec $q \in \mathbb{Q}$, donc $0 = \Pi_\alpha(\alpha) = \alpha + q$, ce qui montre que $\alpha = -q \in \mathbb{Q}$.
   Réciproquement, si $\alpha \in \mathbb{Q}$, alors le polynôme $X - \alpha \in \mathbb{Q}[X]$ est dans $I(\alpha)$, donc Π_α divise $X - \alpha$. On en déduit que $\deg(\Pi_\alpha) \leq 1$, donc $\deg(\Pi_\alpha) = 1$ (d'après la remarque faite au début de la question), ce qui montre que α est de degré 1.
3. (a) On a déjà dit que Π_α est non constant. De plus, si $\Pi_\alpha = QR$ avec Q, R dans $\mathbb{Q}[X]$, alors
   $$0 = \Pi_\alpha(\alpha) = Q(\alpha)R(\alpha),$$
   donc $Q(\alpha) = 0$ ou $R(\alpha) = 0$ (par intégrité de $\mathbb{C}$), c'est-à-dire que Q ou R est dans $I(\alpha)$.
   Si $Q \in I(\alpha)$, alors Π_α divise Q, mais on a aussi Q divise Π_α, donc Q et Π_α sont associés dans $\mathbb{Q}[X]$ (égaux à une constante non nulle près), ce qui amène R constant. Symétriquement, si $R \in I(\alpha)$, alors on aura Q constant. Donc Π_α est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

   (b) Si $P(z) = 0$ avec $z \in \mathbb{C}$ et $P \in \mathbb{Q}[X]$, alors $P \in I(\alpha)$ donc Π_z divise P.
   Si de plus P est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$, on en déduit que Π_z est constant ou associé à P. Mais Π_z est non constant (en tant que polynôme minimal) donc Π_z et P sont associés (égaux à une constante non nulle près). Si enfin on suppose également que P est unitaire, alors puisque Π_z l'est aussi, on obtient $P = \Pi_z$.
4. (a) Supposons $A(\alpha) = B(\alpha) = 0$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$ et A, B dans $\mathbb{Q}[X]$.
   Si A et B sont premiers entre eux dans $\mathbb{Q}[X]$, alors il existe U, V dans $\mathbb{Q}[X]$ tels que $AU + BV = 1$ (théorème de Bézout), donc en évaluant en $X = \alpha$ on obtient la contradiction $0 = 1$. Donc A et B ne sont pas premiers entre eux dans $\mathbb{Q}[X]$.

   (b) Si $z \in \mathbb{C}$ est une racine de Π_α de multiplicité ≥ 2, alors $\Pi_\alpha(z) = \Pi'_\alpha(z) = 0$, donc Π_α et Π'_α (qui sont bien dans $\mathbb{Q}[X]$) ne sont pas premiers entre eux dans $\mathbb{Q}[X]$ d'après la question précédente. Il existe donc $D \in \mathbb{Q}[X]$ non constant qui divise Π_α et Π'_α dans $\mathbb{Q}[X]$.
   Mais Π_α étant irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$, on a nécessairement D associé à Π_α et donc Π_α divise Π'_α, ce qui est impossible puisque Π_α est non nul.
   On en déduit que toutes les racines complexes de Π_α sont de multiplicité 1.
5. (a) Si $\alpha \in \mathbb{Q}$ est un entier algébrique, alors il existe un polynôme $P = X^d + m_{d-1}X^{d-1} + \cdots + m_0$ dans $\mathbb{Z}[X]$ (avec $d \in \mathbb{N}^*$) tel que $P(\alpha) = 0$. En notant $\alpha = a/b$ avec $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ et $pgcd(a, b) = 1$, on obtient dans $\mathbb{Z}$:
   $$a^d = -\sum_{k=0}^{d-1} m_k a^k b^{d-k} = -b\left(\sum_{k=0}^{d-1} m_k a^k b^{(d-1)-k}\right),$$

donc b divise a^d. Mais b est premier avec a, donc en appliquant d fois le lemme de Gauss, on obtient que b divise a^{d-1}, puis $a^{d-2}\cdots$, puis 1, donc $b=1$ et finalement $\alpha = a \in \mathbb{Z}$.

(b) Si $\alpha \in \mathbb{C}$ est un entier algébrique, alors il existe un polynôme $P = X^d + m_{d-1}X^{d-1} + \cdots + m_0$ dans $\mathbb{Z}[X]$ (avec $d \in \mathbb{N}^*$) tel que $P(\alpha) = 0$. Par ailleurs, le polynôme minimal de α est de la forme :

$$\Pi_\alpha = X^n + q_{n-1}X^{n-1} + \cdots + q_0 \in \mathbb{Q}[X], \qquad 1 \leq n \leq d.$$

Notons $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ les racines complexes de Π_α (elles sont distinctes d'après la question 4.(b)). Ces nombres complexes sont également racines de P (puisque Π_α divise P), donc ce sont des entiers algébriques. Puisque l'ensemble des entiers algébriques est un sous-anneau de $\mathbb{C}$ (admis), on en déduit par les relations coefficients-racines que les coefficients de Π_α (qui sont des polynômes en $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$) sont des entiers algébriques. Mais ces coefficients sont rationnels par hypothèse donc ce sont des entiers par la question 5.(a), ce qui prouve que $\Pi_\alpha \in \mathbb{Z}[X]$.

6. (a) Par la question précédente, Π_α est de la forme

$$\Pi_\alpha = X^2 + aX + b, \qquad (a,b) \in \mathbb{Z}^2.$$

Le cas $\alpha \in \mathbb{R}$ est facile, car dans ce cas, étant de module 1, α vaut 1 ou -1, donc vérifie $\alpha^2 = 1$.

Si $\alpha \notin \mathbb{R}$, alors puisque Π_α est à coefficients réels, on a en notant $\alpha = e^{i\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\Pi_\alpha = (X-\alpha)(X-\overline{\alpha}) = X^2 - 2Re(\alpha)X + |\alpha|^2 = X^2 - 2\cos(\theta)X + 1,$$

donc par identification $2\cos(\theta) \in \mathbb{Z}$, c'est-à-dire

$$\cos(\theta) \in \{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\}.$$

On en déduit $\alpha \in \{e^{\pm i\frac{2\pi}{3}}, \pm i, e^{\pm i\frac{\pi}{3}}\}$ (vu que α non réel) donc on a $\alpha^3 = 1$ ou $\alpha^4 = 1$ ou $\alpha^6 = 1$. Finalement, α est une racine de l'unité.

(b) Notons $\alpha = \frac{3+4i}{5}$. On obtient facilement $|\alpha| = 1$. De plus, α est un nombre algébrique car il est racine de

$$P = (X-\alpha)(X-\overline{\alpha}) = X^2 - 2Re(\alpha)X + |\alpha|^2 = X^2 - \frac{6}{5}X + 1 \in \mathbb{Q}[X].$$

En outre, Π_α divise P mais $\deg(\Pi_\alpha) > 1$ puisque $\alpha \notin \mathbb{Q}$, donc $\deg(\Pi_\alpha) = 2 = \deg(P)$, d'où α est de degré 2. Vu que P est unitaire, on en déduit aussi que $\Pi_\alpha = P$. Ce polynôme n'est pas à coefficients entiers donc α n'est pas un entier algébrique (d'après 5.(b)). Si α était une racine de l'unité, on aurait α entier algébrique (puisque racine de $X^n - 1 \in \mathbb{Z}[X]$ avec $n \in \mathbb{N}^*$). Ce n'est pas le cas, donc α n'est pas une racine de l'unité.

Partie II

7. (a) En notant $P(X) = \displaystyle\sum_{i=0}^{d} a_i X^i \in \mathbb{C}[X]$ (unitaire de degré d), on a

$$X^d P(1/X) = \sum_{i=0}^{d} a_i X^{d-i} = \sum_{i=0}^{d} a_{d-i} X^i,$$

donc par identification des coefficients, on a $X^d P(1/X) = P$ si et seulement si $a_{d-i} = a_i$ pour tout $i \in [\![0, d]\!]$.

(b) Soit un polynôme P unitaire réciproque de degré d. Si $x \in \mathbb{C}$ vérifie $P(x) = 0$, alors avec les notations précédentes on a $x \neq 0$ sinon $0 = P(0) = a_0 = a_d$, impossible car $a_d = 1$.

De plus, $x^d P(1/x) = P(x) = 0$, donc $P(1/x) = 0$.

Comparons maintenant les multiplicités des racines x et $1/x$.

Si x est de multiplicité $m \in [\![1, d]\!]$, alors $P(X) = (X - x)^m Q(X)$ avec $\deg(Q) = d - m$ et $Q(x) \neq 0$, donc on peut réécrire :

$$P(X) = X^d P(1/X) = X^d \left(\frac{1}{X} - x\right)^m Q(1/X) = \left(X - \frac{1}{x}\right)^m (-x)^m X^{d-m} Q(1/X).$$

Le polynôme $R(X) = (-x)^m X^{d-m} Q(1/X)$ vérifie $R(1/x) = (-x)^m x^{m-d} Q(x) \neq 0$, donc $1/x$ est racine de P de multiplicité m, comme x.

8. Puisque $|x| = 1$ et $x \notin \{-1, 1\}$, on a $x \notin \mathbb{R}$ donc le nombre algébrique x est de degré $d \geq 2$.
On a aussi $\frac{1}{x} = \overline{x} \neq x$, donc $1/x$ est une autre racine de Π_x (puisque ce polynôme est à coefficients rationnels donc réels), c'est-à-dire un conjugué de x.
Montrons maintenant que Π_x est réciproque, en montrant que le polynôme $P(X) = X^d \Pi_x(1/X) \in \mathbb{Q}[X]$ est égal à Π_x. Déjà, on a $P(x) = x^d \Pi_x(1/x) = 0$, donc Π_x divise P. Mais $\deg(\Pi_x) = d = \deg(P)$ donc Π_x et P sont associés dans $\mathbb{Q}[X]$, c'est-à-dire $P = \lambda \Pi_x$ avec $\lambda \in \mathbb{Q}^*$.
Reste à calculer λ : ce rationnel est le coefficient dominant de $P = X^d \Pi_x(1/X)$, donc le coefficient constant de Π_x, ou encore le produit des racines complexes de Π_x.
En outre, le polynôme Π_x étant irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$ et unitaire, il s'agit du polynôme minimal de toutes ses racines complexes (d'après la question 3.(b)), qui sont de multiplicité 1 (d'après 4.(b)), et non rationnelles (car ce sont des nombres algébriques de degré $\deg(\Pi_x) = d \geq 2$).
Enfin, l'ensemble des racines complexes de Π_x est stable par $y \mapsto \frac{1}{y}$ (vu la relation $X^d \Pi_x(1/X) = \lambda \Pi_x$), donc en regroupant ces racines par paires d'inverses (aucune racine n'est nulle ni égale à son inverse puisque différente de 1 et -1), on obtient que leur produit λ vaut 1.
Donc finalement, $X^d \Pi_x(1/X) = \Pi_x$, c'est-à-dire que Π_x est réciproque.

Remarque
Au passage, on a montré que Π_x possède un nombre pair de racines complexes, donc Π_x est de degré pair.

9. (a) Comme on l'a déjà dit à la question 8., Π_α est le polynôme minimal de toutes ses racines complexes, donc a fortiori $\Pi_\alpha = \Pi_\gamma$. De plus, $|\gamma| = 1$ et $\gamma \notin \{-1, 1\}$ sinon on aurait γ de degré 1, et donc Π_α de degré 1, impossible car α est de degré ≥ 2. Donc par la question précédente, Π_γ est un polynôme réciproque. On conclut que Π_α est un polynôme réciproque. Par la question 7.(b), on obtient enfin que $\frac{1}{\alpha}$ est aussi racine de Π_α, et $\frac{1}{\alpha} \neq \alpha$ (car $\alpha > 1$), donc $\frac{1}{\alpha}$ est un conjugué de α.
   (b) S'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\gamma^n = 1$, alors Π_γ divise $X^n - 1$ donc en particulier toutes les racines complexes de Π_γ sont de module 1, ce qui contredit le fait que $\alpha > 1$ est racine de Π_γ. Donc γ n'est pas une racine de l'unité.
   (c) Π_α est un polynôme réciproque, donc l'ensemble de ses racines (qui sont toutes simples) ne contient pas 0 et est stable par $y \mapsto \frac{1}{y}$ (et aucune racine n'est égale à son inverse, comme vu dans la question 8.). Puisque $\alpha \in \mathcal{S}$, les conjugués de α sont tous de module ≤ 1. Si un des conjugués $\beta \notin \{\alpha, \frac{1}{\alpha}\}$ est de module < 1, alors $\frac{1}{\beta}$ est aussi un conjugué de α, mais de module > 1, ce qui est contradictoire. Tous les conjugués de α autres que $\frac{1}{\alpha}$ sont donc de module 1.
10. Soit $\alpha \in \mathcal{S}$. Vu la structure de l'ensemble des racines de Π_α donnée à la question précédente, ces racines sont en nombre pair, donc $\deg(\Pi_\alpha)$ est pair, ce qui montre que α est de degré pair.
Enfin, α n'est pas de degré 2, sinon les seules racines de Π_α seraient $\alpha > 1$ et $\frac{1}{\alpha} < 1$, donc il n'y aurait aucune racine de module 1, ce qui contredit $\alpha \in \mathcal{S}$. Ainsi, α est de degré ≥ 4.

Partie III

11. Si P_n possède une racine rationnelle, notée $\alpha = a/b$ avec $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ et $pgcd(a, b) = 1$, alors

$$0 = b^4 P_n(a/b) = a^4 - (6+n)a^3 b + (10+n)a^2 b^2 - (6+n)ab^3 + b^4 \qquad (*),$$

donc b divise a^4. Mais b est premier avec a, donc b par le lemme de Gauss, b divise a^3. En itérant, on obtient que b divise 1, donc $b = 1$. Symétriquement, la formule $(*)$ montre que a divise b^4,

donc de même, on obtient $a = 1$. Finalement, la seule racine rationnelle possible est $\alpha = 1$, et elle ne fonctionne pas ($P_n(1) = -n \neq 0$). Donc P_n ne possède pas de racine dans $\mathbb{Q}$.
Enfin, la fonction continue $x \mapsto P_n(x)$ vérifie $P_n(1) = -n < 0$ et $P_n \underset{+\infty}{\to} +\infty$, donc par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel $\alpha_n > 1$ tel que $P_n(\alpha_n) = 0$.

12. P_n est unitaire et ses coefficients sont symétriques, donc P_n est un polynôme réciproque. Par la question 7.(b), on en déduit que si x est racine de P_n, alors $x \neq 0$ et $1/x$ est racine de P_n, avec même multiplicité que x.

13. En factorisant P_n, on obtient les relations-coefficients racines :

$$P_n = (X - \alpha_n)(X - \frac{1}{\alpha_n})(X - \gamma_n)(X - \frac{1}{\gamma_n}) = X^4 - \sigma_1 X^3 + \sigma_2 X^2 - \sigma_3 X^3 + \sigma_4,$$

où

$$\sigma_1 = \alpha_n + \frac{1}{\alpha_n} + \gamma_n + \frac{1}{\gamma_n} = t_n + s_n,$$

$$\sigma_2 = \underbrace{\alpha_n \frac{1}{\alpha_n}}_{=1} + \underbrace{\alpha_n\gamma_n + \alpha_n \frac{1}{\gamma_n} + \gamma_n \frac{1}{\alpha_n} + \frac{1}{\alpha_n}\frac{1}{\gamma_n}}_{=t_n s_n} + \underbrace{\gamma_n \frac{1}{\gamma_n}}_{=1} = 2 + t_n s_n$$

(par ailleurs σ_3 est la somme des produits trois par trois des racines, et σ_4 le produit des racines, mais on n'en a pas besoin ici).
En identifiant les coefficients de P_n de degré 3 et 2, on obtient donc

$$t_n + s_n = 6 + n, \qquad t_n s_n = (10 + n) - 2 = 8 + n.$$

14. On a par définition $\alpha_n \in]1, +\infty[$ donc $t_n = \alpha_n + \frac{1}{\alpha_n} \in \mathbb{R}$. On en déduit que $s_n = 6 + n - t_n \in \mathbb{R}$. De plus, t_n et s_n sont les racines du polynôme

$$Q_n = (X - t_n)(X - s_n) = X^2 - (t_n + s_n)X + t_n s_n = X^2 - (6 + n)X + (8 + n).$$

Vu que $Q_n(0) = 8 + n > 0$ et $Q_n(2) = 4 - 12 - 2n + 8 + n = -n < 0$, la fonction continue $x \mapsto Q_n(x)$ possède une racine dans $]0, 2[$ par le théorème des valeurs intermédiaires.
Une étude rapide de la fonction $\varphi : x \mapsto x + \frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$ montre que $\min \varphi = \varphi(1) = 2$, donc puisque $\alpha_n > 0$, on a $t_n = \varphi(\alpha_n) \geq 2$. Nécessairement, la racine de Q_n qui se trouve dans $]0, 2[$ est donc s_n. Mais γ_n ne peut alors pas être réel, sinon on aurait $s_n = \varphi(\gamma_n) \geq 2$ si $\gamma_n > 0$ et $s_n < 0$ si $\gamma_n > 0$, contredisant ainsi que $0 < s_n < 2$. D'où $\gamma_n \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.
Enfin, γ_n étant une racine complexe non réelle du polynôme à coefficients réels P_n, on en déduit que $\overline{\gamma_n}$ est une autre racine de P_n, nécessairement égale à $\frac{1}{\gamma_n}$ (puisque les deux autres racines α_n et $\frac{1}{\alpha_n}$ sont réelles). Donc $\overline{\gamma_n} = \frac{1}{\gamma_n}$, ce qui entraîne $|\gamma_n| = (\gamma_n\overline{\gamma_n})^{1/2} = 1$.

15. (a) Q_n étant unitaire et à coefficients entiers, ses racines t_n et s_n sont des entiers algébriques. Si t_n ou s_n est rationnel, alors ils le sont tous les deux (puisque leur somme est un entier), donc par la question 5.(a), on obtient que t_n et s_n sont dans $\mathbb{Z}$. Mais $s_n \in]0, 2[$, donc nécessairement $s_n = 1$, ce qui est impossible car $Q_n(1) = 3 \neq 0$.
On en conclut que t_n et s_n sont irrationnels.

    (b) Déjà, P_n n'a aucune racine rationnelle (cf. 11.), donc ne possède pas de diviseur de degré 1 dans $\mathbb{Q}[X]$.
Supposons P_n réductible dans $\mathbb{Q}[X]$. Il se décompose donc sous la forme $P_n = R_n T_n$ avec R_n et T_n de degré 2 dans $\mathbb{Q}[X]$, et on peut les supposer unitaires. Un de ces deux facteurs, par exemple R_n, a pour racine γ_n (qui est racine de P_n), mais aussi $\overline{\gamma_n} = \frac{1}{\gamma_n}$ car les coefficients de R_n sont rationnels, donc réels. Puisque $\overline{\gamma_n} \neq \gamma_n$, on obtient que

$$R_n = (X - \gamma_n)(X - \overline{\gamma_n}) = X^2 - 2Re(\gamma_n)X + |\gamma_n|^2 = X^2 - 2Re(\gamma_n)X + 1 \in \mathbb{Q}[X],$$

Mais on a aussi $2Re(\gamma_n) = \gamma_n + \overline{\gamma_n} = \gamma_n + \frac{1}{\gamma_n} = s_n \notin \mathbb{Q}$, donc on a une contradiction, qui prouve que P_n est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.
Ainsi, P_n est unitaire et irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$, donc il s'agit du polynôme minimal de ses quatre racines complexes (par 3.(b)). En particulier α_n est un entier algébrique de degré 4 (puisque $\Pi_{\alpha_n} = P_n$) qui vérifie $\alpha_n > 1$ et $C(\alpha_n) = \{\frac{1}{\alpha_n}, \gamma_n, \overline{\gamma_n}\}$ avec $|\frac{1}{\alpha_n}| < 1$ et $|\gamma_n| = |\overline{\gamma_n}| = 1$, donc $\max_{z \in C(\alpha_n)} |z| = 1$, ce qui prouve que $\alpha_n \in \mathcal{S}$.

(c) Puisque $s_n \in]0,2[$ et $\alpha_n > 1$ on a

$$\alpha_n + 1 > \alpha_n + \frac{1}{\alpha_n} = t_n = 6 + n - s_n > 4 + n$$

donc $\alpha_n > 3 + n$ (pour tout entier $n \geq 2$), ce qui montre que $\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

* * *

Exercice 2 : Méthode de Laplace et applications Extrait du sujet Mines-Ponts PC 2017 Math 2

Partie I : exponentielle tronquée

1. Pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}$ fixés, on pose pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_k = \frac{n^k x^k}{k!}$. On a $u_k > 0$ pour tout $k \geq n+1$, ainsi que

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{n^{k+1}x^{k+1}}{(k+1)!} \times \frac{k!}{n^k x^k} = \frac{nx}{k+1} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0 < 1,$$

donc par $\sum\limits_{k\geq n+1} u_k$ converge par la règle de d'Alembert, ce qui justifie l'existence de $R_n(x)$.
En outre, en utilisant la formule admise, on a

$$T_n(x) + R_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(nx)^k}{k!} = e^{nx}.$$

2. Pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, la fonction $g : t \mapsto e^{nt}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, donc on peut appliquer la formule de Taylor avec reste intégral à tout ordre. A l'ordre n entre les points 0 et $x > 0$, cela donne :

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(k)}(0)}{k!}x^k + \frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n g^{(n+1)}(t)dt,$$

c'est-à-dire

$$e^{nx} = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}x^k}_{=T_n(x)} + \frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n n^{n+1} e^{nt}dt.$$

Donc

$$R_n(x) = e^{nx} - T_n(x) = \frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n n^{n+1}e^{nt}dt \underset{u=x-t}{=} \frac{n^{n+1}}{n!}\int_0^x u^n e^{n(x-u)}du,$$

c'est-à-dire

$$R_n(x) = \frac{e^{nx}n^{n+1}}{n!}\int_0^x (ue^{-u})^n du.$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \dfrac{n^{n+1}}{n!}y^n > 0$ et

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+2}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{n^{n+1}}y = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} y = e^{(n+1)\ln(1+\frac{1}{n})}y = e^{1+o(1)}y \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^1 y.$$

Si $0 < y < e^{-1}$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ donc la série $\sum a_n$ converge par la règle de d'Alembert, ce qui entraîne que (a_n) tend vers 0.

4. Soit $x \in]0,1[$. En dérivant, on montre facilement que $\varphi : u \mapsto ue^{-u}$ est strictement croissante sur $[0,1]$, donc sur $[0,x]$. Donc $\max\limits_{u\in[0,x]} ue^{-u} = \varphi(x) < \varphi(1) = e^{-1}$. En notant $M_x = \max\limits_{u\in[0,x]} ue^{-u}$ (cette notation est meilleure que le "M" suggéré par l'énoncé), on a donc $M_x < e^{-1}$, ainsi que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$0 \leq R_n(x) = \frac{e^{nx}n^{n+1}}{n!}\int_0^x \varphi(u)^n du \leq \frac{e^{nx}n^{n+1}}{n!}\int_0^x M_x^n du = \left(x\frac{n^{n+1}}{n!}M_x^n\right)e^{nx}.$$
Or, puisque $0 < M_x < 1$, on obtient d'après 3. que $x\frac{n^{n+1}}{n!}M_x^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui prouve que $R_n(x) = o(e^{nx})$.
Enfin, $T_n(x) = e^{nx} - R_n(x) = e^{nx} + o(e^{nx})$ donc $T_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{nx}$.

5. Montrons par récurrence que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}dt = n!$$
(avec bien sûr convergence de l'intégrale).
   - Pour $n = 0$, on a
   $$\forall x > 0, \qquad \int_0^x e^{-t}dt = 1 - e^{-x},$$
   donc en passant à la limite lorsque $x \to +\infty$, on obtient que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t}dt$ converge et vaut $1 = 0!$.
   - Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}dt$ converge et soit égale à $n!$. Dans ce cas, par intégration par parties généralisée :
   $$\int_0^{+\infty} t^{n+1}e^{-t}dt = \left[-t^{n+1}e^{-t}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty}(n+1)t^n e^{-t}dt = (n+1)\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}dt,$$
   donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^{n+1}e^{-t}dt$ converge et vaut $(n+1)n! = (n+1)!$.

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$. Toujours par la formule de la question 2., nous avons :
$$T_n(x) = e^{nx} - R_n(x) = \frac{e^{nx}}{n!}\left(n! - n^{n+1}\int_0^x u^n e^{-nu}du\right)$$
En utilisant le changement de variable généralisé $y = nu$ dans l'intégrale, ceci se réécrit :
$$T_n(x) = \frac{e^{nx}}{n!}\left(n! - \int_0^{nx} y^n e^{-y}dy\right).$$
En utilisant 5., il vient alors :
$$T_n(x) = \frac{e^{nx}}{n!}\left(\int_0^{+\infty} y^n e^{-y}dy - \int_0^{nx} y^n e^{-y}dy\right) = \frac{e^{nx}}{n!}\int_{nx}^{+\infty} y^n e^{-y}dy,$$
et en réutilisant le changement de variable $y = nu$, on obtient la formule demandée :
$$T_n(x) = \frac{e^{nx}n^{n+1}}{n!}\int_x^{+\infty}(ue^{-u})^n du.$$

7. Si $x > 1$, alors par décroissance et positivité de $\varphi : u \mapsto ue^{-u}$ sur $[1,+\infty[$ (facile à établir en dérivant) :
$$u \geq x \implies (ue^{-u})^{n-1} \leq (xe^{-x})^{n-1} \implies (ue^{-u})^n \leq (xe^{-x})^{n-1}ue^{-u},$$
donc
$$0 \leq T_n(x) \leq \frac{e^{nx}n^{n+1}}{n!}\int_x^{+\infty}(xe^{-x})^{n-1}ue^{-u}du = C_x\left(\frac{n^{n+1}}{n!}(xe^{-x})^n\right)e^{nx},$$
où $C_x = \dfrac{e^x}{x}\displaystyle\int_x^{+\infty} ue^{-u}du$ est indépendant de n.
Puisque $0 < xe^{-x} < e^{-1}$, on a $C_x\frac{n^{n+1}}{n!}(xe^{-x})^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (encore d'après la question 3.), et donc $T_n(x) = o(e^{nx})$ lorsque $n \to +\infty$.

Partie II : méthode de Laplace

8. Par la formule de Taylor-Young à l'ordre 1 en 0 (qui s'applique car f est dérivable en 0), on a

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + o(x) = 1 + x(f'(0) + \varepsilon(x)),$$

où $\varepsilon(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.
Si $f'(0) > 0$, alors il existe $\delta \in]0,1[$ tel que $(-\delta < x < \delta \implies f'(0) + \varepsilon(x) \geq \frac{1}{2}f'(0))$, et donc

$$0 < x < \delta \implies f(x) \geq 1 + \frac{x}{2}f'(0) > 1,$$

ce qui contredit l'hypothèse **H3**.
De même, si $f'(0) < 0$, alors il existe $\delta \in]0,1[$ tel que

$$-\delta < x < 0 \implies f'(0) + \varepsilon(x) \leq \frac{1}{2}f'(0) \implies f(x) \geq 1 + \frac{x}{2}f'(0) > 1,$$

ce qui est également contradictoire. Donc $f'(0) = 0$.
Appliquons alors la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 en 0 (possible car f est deux fois dérivable en 0) :

$$f'(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2}f''(0) + o(x^2) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2),$$

qui donne $\varphi(x) = -\frac{1}{x^2}\ln\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{-x^2/2}{-x^2} = \frac{1}{2}$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x) = k = \frac{1}{2}$.

9. Vu que $f > 0$ sur $]-1,1[$, la fonction $\varphi : x \mapsto -\frac{1}{x^2}\ln(f(x))$ (prolongée en 0 par sa limite $k = 1/2$) est continue sur $]-1,1[$ par composition.
Etudions φ au voisinage de 1^-. Par continuité de f en 1, $f(x) \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} f(1) \in [0,1[$, donc deux cas se présentent :
   - Si $f(1) \in]0,1[$, alors $\varphi(x) \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} -\ln(f(1)) > 0$.
   - Si $f(1) = 0$, alors $\varphi(x) \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} +\infty$.

   Dans les deux cas, il existe donc $m_1 > 0$ et $0 < \delta < 1$ tel que

$$\forall x \in [\delta, 1[, \quad \varphi(x) \geq m_1.$$

   En raisonnant de même en -1^+ (on peut car f est continue en -1 et $f(-1) \in [0,1[$), on obtient l'existence de $m_2 > 0$ et $0 < \delta' < 1$ tel que

$$\forall x \in]-1, -\delta'], \quad \varphi(x) \geq m_2.$$

   Enfin, sur le segment $[-\delta', \delta] \subset]-1,1[$, la fonction continue φ est bornée et atteint ses bornes. En particulier, il existe donc $x_0 \in [-\delta', \delta]$ tel que

$$\forall x \in [-\delta', \delta], \quad \varphi(x) \geq \varphi(x_0) = -\ln(f(x_0))/x_0^2 > 0.$$

   Finalement, $\forall x \in]-1,1[$, $\varphi(x) \geq a = \min(m_1, m_2, \varphi(x_0)) > 0$, ce qui montre que φ est minorée sur $]-1,1[$ par un réel $a > 0$.
   On en conclut par croissance de l'exponentielle que

$$\forall x \in]-1,1[, \quad f(x) = e^{-x^2\varphi(x)} \leq e^{-ax^2},$$

   et cette inégalité reste vraie par continuité de f et de $x \mapsto e^{-ax^2}$ en ± 1 (ce qui permet le passage à la limite dans l'inégalité).

10. Appliquons le théorème de convergence dominée à la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$:
    - Chaque g_n est continue sur le segment $[-\sqrt{n}, \sqrt{n}]$ (par composition et continuité de f sur $[-1,1]$), et nulle en dehors de ce segment, donc chaque g_n est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ (mais pas nécessairement continue).

- Pour $u \in \mathbb{R}$ fixé, on a $u \in [-\sqrt{n}, \sqrt{n}]$ pour n assez grand :
$$g_n(u) = f(u/\sqrt{n})^n = e^{n\ln(f(u/\sqrt{n}))}.$$
Or, en réutilisant le DL_2 de f en 0 de la question 8. :
$$f(u/\sqrt{n}) = 1 - \frac{u^2}{2n} + \underset{n\to+\infty}{o}(1/n),$$
donc
$$g_n(u) = e^{n\ln(1-\frac{u^2}{2n}+o(1/n))} = e^{-u^2/2+o(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-u^2/2},$$
et la fonction $g : u \mapsto e^{-u^2/2}$ est bien continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, car continue.
- Par l'inégalité de la question 9., on a par positivité de f :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall u \in [-\sqrt{n}, \sqrt{n}], \qquad |g_n(u)| = g_n(u) = f(u/\sqrt{n})^n \leq (e^{-au^2/n})^n = e^{-au^2},$$
et cette inégalité reste vraie en dehors de $[-\sqrt{n}, \sqrt{n}]$ puisque g_n y est nulle. Donc
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall u \in \mathbb{R}, \qquad |g_n(u)| \leq h(u),$$
avec $h : u \mapsto e^{-au^2}$ intégrable sur $\mathbb{R}$ car continue, paire et négligeable devant $1/u^2$ en $+\infty$.

Le théorème s'applique donc et on en déduit que les g_n et g sont intégrables sur $\mathbb{R}$ et
$$\int_{\mathbb{R}} g_n(u)du \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}} g(u)du = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2/2}du = \sqrt{2\pi}.$$
Mais pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$\int_{\mathbb{R}} g_n(u)du = \int_{-\sqrt{n}}^{\sqrt{n}} f(u/\sqrt{n})^n du \underset{u=x\sqrt{n}}{=} \sqrt{n}\int_{-1}^{1} f(x)^n dx,$$
donc finalement :
$$\sqrt{n}\int_{-1}^{1} f(x)^n dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sqrt{2\pi},$$
c'est-à-dire $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)^n dx \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2\pi}{n}}$.

Partie III : formule de Stirling

11. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En utilisant la formule de la question 5. et en effectuant le changement de variable affine $t = n(x+1)$, on obtient :
$$n! = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}dt = \int_{-1}^{+\infty} n^n(x+1)^n e^{-n(x+1)} n dx = n^{n+1}e^{-n}\int_{-1}^{+\infty} (x+1)^n e^{-nx}dx.$$
En notant $I_n = \int_{-1}^{1}(x+1)^n e^{-nx}\,\mathrm{d}x$ et $J_n = \int_{1}^{+\infty}(x+1)^n e^{-nx}\,\mathrm{d}x$, on obtient par relation de Chasles :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad n! = n^{n+1}e^{-n}(I_n + J_n).$$
12. La fonction $f : x \mapsto 2^x - x - 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f' : x \mapsto \ln(2)2^x - 1$, donc $\forall x \geq 1,\ f'(x) \geq 2\ln(2) - 1 = \ln(4) - \ln(e) > 0$, ce qui montre que f est croissante sur $[1, +\infty[$, et donc
$$\forall x \geq 1, \qquad f(x) \geq f(1) = 0,$$
ce qui donne l'inégalité $x + 1 \leq 2^x$ pour tout $x \geq 1$.
On en déduit par croissance de l'intégrale la majoration :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad 0 \leq J_n \leq \int_1^{+\infty} 2^{nx}e^{-nx}dx = \int_1^{+\infty} e^{nx(\ln(2)-1)}dx = \frac{e^{(\ln(2)-1)n}}{n(1-\ln(2))} = \frac{(2/e)^n}{n(1-\ln(2))},$$
ce qui prouve au passage que $J_n = o((2/e)^n)$.

13. Il est facile de vérifier que $f : x \mapsto (x+1)e^{-x}$ satisfait les 4 hypothèses **H1,H2,H3,H4** (avec une simple étude de fonction). On en conclut d'après la question 10. que

$$I_n = \int_{-1}^{1} f(x)^n dx \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2\pi}{n}}.$$

14. Enfin,

$$n! = n^{n+1}e^{-n}(I_n + J_n) = n^{n+1}e^{-n}\left(\sqrt{\frac{2\pi}{n}} + o(1/\sqrt{n}) + o((2/e)^n)\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi}\ n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n},$$

ce qui permet de retrouver la formule de Stirling :

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\ (n/e)^n.$$

Partie IV : formule de Bernstein

15. En reprenant la formule de la question 2. avec $x = 1$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad R_n(1) = \frac{e^n n^{n+1}}{n!} \int_0^1 (ue^{-u})^n du.$$

Avec le changement de variable affine $u = 1 - t$, on obtient

$$R_n(1) = \frac{n^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n e^{nt} dt.$$

16. Il est facile de vérifier que $f : t \mapsto (1-t)e^t$ satisfait les 4 hypothèses **H1,H2,H3,H4** (avec une simple étude de fonction). On en conclut d'après la question 10. que

$$R_n(1) = \frac{n^{n+1}}{n!} \int_0^1 f(t)^n dt \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{n+1}}{n!} \times \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

En combinant ceci avec la formule de Stirling, on obtient :

$$R_n(1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{n+1}}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}} \times \sqrt{\frac{\pi}{2n}} = \frac{e^n}{2}.$$

Enfin :

$$T_n(1) = e^n - R_n(1) = e^n - \frac{e^n}{2} + o(e^n) \sim \frac{e^n}{2}.$$

* * *