

Corrigé du DS02 du 23/09/2025 (2h)

Sujet A (MPI*)

Autour du lemme de Cesàro et de la transformée de Laplace

Partie I : Lemme de Cesàro et applications

1. (a) Soit un réel $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $(k \geq n_0 \implies |u_k - \ell| \leq \varepsilon)$.
Pour tout entier $n \geq n_0$, on a alors

$$|\sigma_n - \ell| = \left| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n (u_k - \ell) \right| = \frac{1}{n+1} \left| \sum_{k=0}^{n_0-1} (u_k - \ell) + \sum_{k=n_0}^n (u_k - \ell) \right|,$$

donc par inégalité triangulaire :

$$|\sigma_n - \ell| \leq \frac{C_{n_0}}{n+1} + \frac{1}{n+1} \sum_{k=n_0}^n |u_k - \ell| \leq \frac{C_{n_0}}{n+1} + \frac{n - n_0 + 1}{n+1} \varepsilon,$$

en posant $C_{n_0} = \left| \sum_{k=0}^{n_0-1} (u_k - \ell) \right| \in \mathbb{R}^+$. Puisque $\frac{C_{n_0}}{n+1} + \frac{n-n_0+1}{n+1} \varepsilon \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \varepsilon$, il existe $n_1 \geq n_0$ tel que $(n \geq n_1 \implies |\sigma_n - \ell| \leq 2\varepsilon)$, ce qui montre bien que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n = \ell$.

- (b) Traitons seulement le cas où $\ell = +\infty$, le cas $\ell = -\infty$ s'en déduit directement en remplaçant (u_n) par $(-u_n)$. Supposons $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ et fixons un réel $A > 0$.

Par définition d'une limite infinie, il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $(k \geq n_0 \implies u_k \geq 2A)$. Alors, pour tout $n \geq n_0$:

$$\sigma_n = \frac{1}{n+1} \left(\sum_{k=0}^{n_0-1} u_k + \sum_{k=n_0}^n u_k \right) = \frac{C_{n_0}}{n+1} + \frac{1}{n+1} \sum_{k=n_0}^n u_k \geq \frac{C_{n_0}}{n+1} + \frac{n - n_0 + 1}{n+1} 2A,$$

en posant $C_{n_0} = \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k$. Puisque $\frac{C_{n_0}}{n+1} + \frac{n-n_0+1}{n+1} 2A \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2A$, il existe $n_1 \geq n_0$ tel que $(n \geq n_1 \implies \sigma_n \geq A)$, ce qui montre que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n = +\infty$.

2. (a) Avec la suite $(u_k) = \left(\frac{1}{k+1} \right)_{k \in \mathbb{N}}$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{kn} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u_k = \sigma_{n-1},$$

donc puisque $u_k \rightarrow 0$, on en déduit par (Cesàro) que $v_n \rightarrow 0$.

- (b) Très classique (fait en cours) : par décroissance de la fonction continue $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$, on a

$$\forall k \geq 2, \quad \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^k \frac{dx}{x},$$

donc en sommant :

$$\forall n \geq 2, \quad \int_2^{n+1} \frac{dx}{x} \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \leq \int_1^n \frac{dx}{x},$$

c'est-à-dire

$$\ln(n+1) - \ln(2) \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \leq \ln(n).$$

En ajoutant 1, on obtient

$$\ln(n) + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln(2) + 1 \leq nv_n \leq \ln(n) + 1,$$

et donc $nv_n \sim \ln(n)$, c'est-à-dire $v_n \sim \frac{\ln(n)}{n}$.

3. (a) Puisque $e_k \rightarrow \alpha$, on obtient par le lemme de Cesàro que

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n e_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \alpha.$$

Or, par télescopage on a

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n e_k = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n (u_{k+1} - u_k) = \frac{u_{n+1} - u_0}{n+1}.$$

On obtient donc $\frac{u_n - u_0}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \alpha$, ce qui entraîne par opérations algébriques sur les limites que $\frac{u_n}{n} \rightarrow \alpha$. Donc $u_n \sim n\alpha$ (puisque $\alpha \neq 0$).

- (b) On peut utiliser le théorème de sommation des relations de comparaisons, cas divergent. Puisque $e_n \sim \alpha$ et puisque la série à termes positifs $\sum \alpha$ diverge (α étant non nul), les sommes partielles sont équivalentes :

$$\sum_{k=0}^{n-1} e_k \sim \sum_{k=0}^{n-1} \alpha = n\alpha,$$

et donc par télescopage

$$u_n - u_0 \sim n\alpha,$$

et on déduit comme précédemment que $u_n \sim n\alpha$.

4. (a) L'idée est de se ramener à une moyenne de Cesàro en travaillant avec la suite $(v_n) = (\ln(u_n))$ (bien définie car $u > 0$ par hypothèse). Puisque

$$\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = \ln(u_{n+1}/u_n) \rightarrow \ln(\ell),$$

le lemme de Cesàro donne

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (\ln(u_{k+1}) - \ln(u_k)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln(\ell),$$

c'est-à-dire

$$\frac{\ln(u_n) - \ln(u_0)}{n} \rightarrow \ln(\ell).$$

Par opérations algébriques sur les limites, on obtient $\frac{\ln(u_n)}{n} \rightarrow \ln(\ell)$, et par continuité de l'exponentielle :

$$\sqrt[n]{u_n} = u_n^{1/n} = \exp\left(\frac{1}{n} \ln(u_n)\right) \rightarrow \ell.$$

Remarque

On peut aussi faire une démonstration "à la main" : à $\varepsilon \in]0, \ell[$ fixé, on a à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$:

$$0 < \ell - \varepsilon \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \ell + \varepsilon,$$

donc par récurrence (puisque $u_n > 0$) :

$$n \geq n_0 \implies (\ell - \varepsilon)^{n-n_0} u_{n_0} \leq u_n \leq (\ell + \varepsilon)^{n-n_0} u_{n_0}.$$

- (b) Si $\ell = 0$ ou $\ell = +\infty$, alors la méthode de la question précédente reste valable, en posant $\ln(0) = -\infty$ et $\ln(+\infty) = +\infty$, puisque le lemme de Cesàro reste vrai avec des limites infinies.
- (c) Avec $u_n = n!$, on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = n+1 \rightarrow +\infty$ donc par la question précédente, $\sqrt[n]{n!} \rightarrow +\infty$.
Avec $u_n = \frac{n^n}{n!}$, on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e^{n \ln(1+1/n)} \rightarrow e$ (faire un *DL*) donc par la question précédente, $\sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} \rightarrow e$.

5. On décompose l'expression : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = \frac{a_0 b_n}{n} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k (b_{n-k} - b) + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k b.$$

Puisque $a_k \rightarrow a$ et $b_k \rightarrow b$, les suites (a_k) et (b_k) sont bornées, et on a

$$\left| \frac{a_0 b_n}{n} \right| \leq \frac{|a_0| \|b\|_\infty}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k (b_{n-k} - b) \right| = \left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} a_{n-k} (b_k - b) \right| \leq \|a\|_\infty \times \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |b_k - b| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

(en utilisant le lemme de Cesàro avec $|b_k - b| \rightarrow 0$), et enfin

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k b \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} ab$$

(toujours par le lemme de Cesàro avec $a_k b \rightarrow ab$). Donc par somme

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} ab.$$

ATTENTION !

La quantité $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ n'est pas une moyenne de Cesàro car le terme de la somme dépend de "k" et de "n", c'est pourquoi on décompose.

6. Notons pour $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \sum_{k=0}^n a_k$ et $B_n = \sum_{k=0}^n b_k$. On a par hypothèse $A_n \rightarrow A$ et $B_n \rightarrow B$.

ATTENTION !

Vu qu'on a seulement supposé que $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont convergentes (et pas absolument convergentes), on ne peut pas affirmer que le produit de Cauchy $\sum c_n$ converge. Avec ces hypothèses trop faibles, il est donc impossible d'affirmer que la suite (C_n) converge vers AB , c'est pourquoi on s'embête à considérer la moyenne de Cesàro de (C_n) , qui elle va quand même converger.

Posons pour $n \in \mathbb{N}$, $M_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n C_k$. On a pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$C_k = \sum_{j=0}^k c_j = \sum_{j=0}^k \sum_{p=0}^j a_{j-p} b_p = \sum_{p=0}^k \sum_{j=p}^k a_{j-p} b_p = \sum_{p=0}^k b_p \sum_{q=0}^{k-p} a_q = \sum_{p=0}^k b_p A_{k-p} = \sum_{p=0}^k A_p b_{k-p}.$$

En re-sommant sur k et divisant par n , on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$M_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n C_k = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n \sum_{p=0}^k A_p b_{k-p} = \frac{1}{n} \sum_{p=0}^n \sum_{k=p}^n A_p b_{k-p} = \frac{1}{n} \sum_{p=0}^n A_p \sum_{q=0}^{n-p} b_q = \frac{1}{n} \sum_{p=0}^n A_p B_{n-p}.$$

En utilisant la question précédente, on en déduit que $M_n \rightarrow AB$.

Partie II : Réciproques partielles du lemme de Cesàro

7. La suite $(u_n) = ((-1)^n)$ diverge, et pourtant sa moyenne de Cesàro $\sigma_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n (-1)^k$ converge vers 0, puisque $0 \leq \sigma_n \leq \frac{1}{n+1}$.

8. (a) Supposons (u_n) croissante et $\sigma_n \rightarrow \ell \in \mathbb{R}$, le cas décroissant se déduit de ce cas en remplaçant (u_n) par $(-u_n)$. Par le théorème de la limite monotone (u_n) converge vers un réel L ou vers $+\infty$. D'après 1.(a) et 1.(b), puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ (finie ou infinie), le seul cas possible est $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$.

(b) Identique à la question précédente.

9. Démontrons d'abord l'indication : pour tout entier $n \geq 1$:

$$\sum_{k=0}^n k e_k = \sum_{k=0}^n k u_{k+1} - \sum_{k=0}^n k u_k = \sum_{k=1}^{n+1} (k-1) u_k - \sum_{k=1}^n k u_k = n u_{n+1} - \sum_{k=1}^n u_k.$$

On en déduit

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} = \frac{1}{n} \left(\sum_{k=0}^n k e_k + \sum_{k=1}^n u_k \right) = \frac{n+1}{n} \left(\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n k e_k + \sigma_n - \frac{u_0}{n+1} \right).$$

Par le lemme de Cesàro appliqué à $k e_k \rightarrow 0$ (par hypothèse), on a $\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n k e_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc puisque $\sigma_n \rightarrow \ell$, on déduit par somme et produits de limites que $u_{n+1} \rightarrow \ell$, et donc $u_n \rightarrow \ell$.

10. (a) Pour $0 \leq n < m$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^m u_k - (m-n)u_n &= \sum_{k=n+1}^m (u_k - u_n) = \sum_{k=n+1}^m (u_k - u_{k-1} + u_{k-1} + \cdots - u_{n-1} + u_{n+1} - u_n) \\ &= \sum_{k=n+1}^m \left(\sum_{j=n}^{k-1} e_j \right) = \sum_{j=n}^{m-1} \left(\sum_{k=j+1}^m e_j \right) = \sum_{j=n}^{m-1} (m-j) e_j \end{aligned}$$

- (b) Pour $2 \leq n < m$, on a

$$(m+1)\sigma_m - (n+1)\sigma_n = \sum_{k=n+1}^m u_k,$$

donc

$$\left| \frac{(m+1)\sigma_m - (n+1)\sigma_n}{m-n} - u_n \right| = \frac{1}{m-n} \left| \sum_{k=n+1}^m u_k - (m-n)u_n \right|,$$

et on déduit de la question précédente :

$$\left| \frac{(m+1)\sigma_m - (n+1)\sigma_n}{m-n} - u_n \right| = \left| \sum_{j=n}^{m-1} \frac{m-j}{m-n} e_j \right|.$$

En outre, il existe par hypothèse une constante $C > 0$ telle que $\forall j \in \mathbb{N}^*, |e_j| \leq \frac{C}{j}$, et on a $0 < \frac{m-j}{m-n} \leq 1$ pour tout $n \leq j \leq m-1$, donc

$$\left| \frac{(m+1)\sigma_m - (n+1)\sigma_n}{m-n} - u_n \right| \leq \sum_{j=n}^{m-1} \frac{C}{j} \leq \sum_{j=n}^{m-1} \int_{j-1}^j \frac{C dt}{t} = \int_{n-1}^{m-1} \frac{C dt}{t} = C \ln \left(\frac{m-1}{n-1} \right).$$

On en déduit finalement :

$$\begin{aligned} |u_n - \ell| &\leq \left| u_n - \frac{(m+1)\sigma_m - (n+1)\sigma_n}{m-n} \right| + \left| \frac{(m+1)\sigma_m - (n+1)\sigma_n}{m-n} - \ell \right| \\ &\leq C \ln \left(\frac{m-1}{n-1} \right) + \left| \frac{(m+1)\sigma_m - (n+1)\sigma_n}{m-n} - \ell \right| \\ &= C \ln \left(\frac{m-1}{n-1} \right) + \left| \frac{(m+1)(\sigma_m - \ell) - (n+1)(\sigma_n - \ell)}{m-n} \right| \\ &\leq C \ln \left(\frac{m-1}{n-1} \right) + \frac{(m+1)|\sigma_m - \ell| + (n+1)|\sigma_n - \ell|}{m-n} \\ &\leq C \ln \left(\frac{m-1}{n-1} \right) + \frac{m+1}{m-n} (|\sigma_m - \ell| + |\sigma_n - \ell|). \end{aligned}$$

- (c) Posons conformément à l'indication $m_n(\alpha) = 1 + \lfloor \alpha n \rfloor$ avec $\alpha > 1$ réel et $n \geq 2$ entier. On a bien $m_n(\alpha)$ entier et $m_n(\alpha) \geq \alpha n > n$, donc d'après la question précédente :

$$|u_n - \ell| \leq C \ln \left(\frac{m_n(\alpha) - 1}{n - 1} \right) + \frac{m_n(\alpha) + 1}{m_n(\alpha) - n} (|\sigma_{m_n(\alpha)} - \ell| + |\sigma_n - \ell|).$$

Or, $m_n(\alpha) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \alpha n$ (facile par encadrement), donc par opérations sur les limites :

$$w_n(\alpha) = C \ln \underbrace{\left(\frac{m_n(\alpha) - 1}{n - 1} \right)}_{\underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} \alpha} + \underbrace{\frac{m_n(\alpha) + 1}{m_n(\alpha) - n}}_{\underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} \frac{\alpha}{\alpha - 1}} \underbrace{(|\sigma_{m_n(\alpha)} - \ell| + |\sigma_n - \ell|)}_{\underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} C \ln(\alpha).$$

Montrons maintenant que $u_n \rightarrow \ell$. Etant donné un réel $\varepsilon > 0$, on peut choisir $\alpha > 1$ tel que $0 < C \ln(\alpha) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ (puisque $C \ln(\alpha) \underset{\alpha \rightarrow 1^+}{\rightarrow} 0$). Avec ce α , on a pour tout $n \geq 2$:

$$|u_n - \ell| \leq w_n(\alpha),$$

avec $w_n(\alpha) \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} C \ln(\alpha) \leq \varepsilon/2$, donc à partir d'un certain rang $n_0 \geq 2$ on a $w_n(\alpha) \leq \varepsilon$ et donc $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$, ce qui montre bien que $u_n \rightarrow \ell$.

Partie III : Variante continue du lemme de Cesàro

11. Comme pour le lemme de Cesàro classique, on utilise une méthode de découpe.

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $f \underset{+\infty}{\rightarrow} \ell$, il existe un réel $x_0 > 0$ tel que $(t \geq x_0 \implies |f(t) - \ell| \leq \varepsilon/2)$.

Pour tout réel $x \geq x_0 > 0$, on a donc

$$\left| \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt - \ell \right| = \left| \frac{1}{x} \int_0^x (f(t) - \ell) dt \right| \leq \underbrace{\frac{1}{x} \int_0^{x_0} |f(t) - \ell| dt}_{=C(x_0)} + \underbrace{\frac{1}{x} \int_{x_0}^x |f(t) - \ell| dt}_{\leq \varepsilon/2} \leq \frac{C(x_0)}{x} + \frac{(x - x_0)\varepsilon}{2x}.$$

Mais $\frac{C(x_0)}{x} + \frac{(x - x_0)\varepsilon}{2x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\rightarrow} \varepsilon/2$, donc il existe $x_1 \geq x_0$ tel que $(x \geq x_1 \implies \frac{C(x_0)}{x} + \frac{(x - x_0)\varepsilon}{2x} \leq \varepsilon)$.

Ainsi, pour $x \geq x_1 > 0$, on a $|\frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt - \ell| \leq \varepsilon$, ce qui montre bien que $\frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\rightarrow} \ell$.

12. Avec $f : t \mapsto \cos(t)$, qui est bien continue sur $\mathbb{R}^+$, on a $\frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = \frac{\sin(x)}{x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$ (puisque bornée par $1/x$), mais f ne possède pas de limite en $+\infty$ (puisque par exemple la suite $(f(n\pi)) = ((-1)^n)$ diverge, alors que $n\pi \rightarrow +\infty$).

13. (a) On suppose $f(x+1) - f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$. Montrons que $\frac{f(x)}{x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$. Pour cela, on va se ramener à des entiers et utiliser le lemme de Cesàro classique, appliqué à la suite $v_k = f(k+1) - f(k)$. Puisque $v_k \rightarrow 0$, on a $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (f(k+1) - f(k)) \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$, c'est-à-dire $\frac{f(n) - f(0)}{n} \rightarrow 0$, et donc $\frac{f(n)}{n} \rightarrow 0$.

Étendons maintenant ce résultat à des réels : étant donné un réel $x > 1$, on a $x = n + t$ avec $n = \lfloor x \rfloor \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leq t < 1$, donc

$$f(x) = f(n + t) = f(t) + \sum_{k=0}^{n-1} (f(k+1+t) - f(k+t)),$$

donc

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{f(t)}{x} + \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{n-1} (f(k+1+t) - f(k+t)).$$

On a donc affaire à une moyenne de Cesàro **mais qui dépend d'un paramètre t** . Majorons tout indépendamment de $t = \lfloor x \rfloor \in [0, 1[$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto f(k+1+t) - f(k+t)$ est continue sur le segment $[0, 1]$, donc bornée, et de même pour $t \mapsto f(t)$, donc

$$\left| \frac{f(x)}{x} \right| \leq \frac{M_0}{x} + \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{n-1} F_k,$$

où $M_0 = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|$ et $F_k = \sup_{t \in [0,1]} |f(k+1+t) - f(k+t)| = \sup_{u \in [k, k+1]} |f(u+1) - f(u)|$.

Reste à passer à la limite lorsque $x \rightarrow +\infty$: puisque $n = \lfloor x \rfloor \leq x$, on a

$$\left| \frac{f(x)}{x} \right| \leq \frac{M_0}{x} + \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{n-1} F_k \leq \frac{M_0}{n} + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} F_k.$$

Mais $f(u+1) - f(u) \xrightarrow{u \rightarrow +\infty} 0$ par hypothèse, donc pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe $u_0 > 0$ tel que $(u \geq u_0 \implies |f(u+1) - f(u)| \leq \varepsilon)$, et donc pour tout entier $k \geq u_0$, on a $F_k = \sup_{u \in [k, k+1]} |f(u+1) - f(u)| \leq \varepsilon$. Ainsi, la suite (F_k) converge vers 0, donc par le lemme

de Césaro, $\frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} F_k \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0$, ce qui entraîne par composition de limites que

$$\frac{M_0}{n} + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} F_k = \frac{M_0}{\lfloor x \rfloor} + \frac{1}{\lfloor x \rfloor} \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor - 1} F_k \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0,$$

et donc finalement $\frac{f(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

- (b) Si $f(x+1) - f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell$, alors la fonction $g : x \mapsto f(x) - \ell x$ est également continue sur $[0, +\infty[$ et vérifie $g(x+1) - g(x) = f(x+1) - f(x) - \ell \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, donc d'après la question précédente, $g(x)/x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, c'est-à-dire $f(x)/x - \ell \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, donc $f(x)/x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell$.

Partie IV : Transformée de Laplace

14. Pour tout réel $t > 0$, la fonction $x \mapsto e^{-tx} f(x)$ est continue sur $[0, +\infty[$ (puisque f l'est), et vu que f est bornée, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad |e^{-tx} f(x)| \leq M e^{-tx},$$

où $M = \sup_{\mathbb{R}^+} |f|$. Puisque la fonction $x \mapsto e^{-tx}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ (c'est un exemple de référence), on en déduit que $x \mapsto e^{-tx} f(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, donc l'intégrale qui définit $\mathcal{L}(f)(t)$ est bien convergente. Ainsi, $\mathcal{L}(f)$ est bien définie sur $]0, +\infty[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

15. (a) Tout d'abord, la fonction $F : x \mapsto \int_x^{+\infty} f$ est bien définie sur $\mathbb{R}^+$ puisque $\int_0^{+\infty} f$ converge par hypothèse. Puisque f est continue sur $\mathbb{R}^+$, la fonction $G : x \mapsto \int_0^x f$ est une primitive $\mathcal{C}^1$ de f sur $\mathbb{R}^+$ (d'après le théorème fondamental de l'analyse). Or, nous avons :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad F(x) = \int_0^{+\infty} f - \int_0^x f = C - G(x),$$

(où C est une cte réelle), ce qui montre que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et $F' = -G' = -f$. Enfin, F est continue (car $\mathcal{C}^1$) sur $[0, +\infty[$ et $F(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ (reste d'une intégrale convergente), donc F est bornée sur $\mathbb{R}^+$.

- (b) Soit $t > 0$. On a par intégration par parties généralisée :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f)(t) &= \int_0^{+\infty} e^{-tx} f(x) dx = - \int_0^{+\infty} e^{-tx} F'(x) dx = - [e^{-tx} F(x)]_{x=0}^{x=+\infty} - t \int_0^{+\infty} e^{-tx} F(x) dx \\ &= F(0) - t \int_0^{+\infty} e^{-tx} F(x) dx \end{aligned}$$

(valide car $e^{-tx} F(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$).

On montre ensuite que la dernière intégrale tend vers 0 lorsque $t \rightarrow 0^+$ avec (encore!) une

méthode de découpe : étant donné $\varepsilon > 0$, il existe $x_0 > 0$ tq $(x \geq x_0 \implies |F(x)| \leq \varepsilon/2)$.
Donc, pour tout réel $t > 0$:

$$\left| t \int_0^{+\infty} e^{-tx} F(x) dx \right| \leq t \int_0^{x_0} |F(x)| dx + \int_{x_0}^{+\infty} t e^{-tx} |F(x)| dx \leq tC(x_0) + \frac{\varepsilon}{2} \int_0^{+\infty} t e^{-tx} dx = tC(x_0) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Or, $tC(x_0) \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{} 0$, donc il existe $t_0 > 0$ tel que

$$0 < t \leq t_0 \implies tC(x_0) \leq \frac{\varepsilon}{2} \implies \left| t \int_0^{+\infty} e^{-tx} F(x) dx \right| \leq \varepsilon.$$

On a donc prouvé que $\lim_{t \rightarrow 0^+} t \int_0^{+\infty} e^{-tx} F(x) dx = 0$, et donc $\lim_{t \rightarrow 0^+} \mathcal{L}(f)(t) = F(0) = \int_0^{+\infty} f$.

* * *