DS02 du 09/11/2023 (4h)
Sujet A (MPI*)

Le sujet se compose de 5 exercices indépendants.
Calculatrice interdite.

* * *

Exercice 1

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $(\ |\ )$.
On pose $\forall\, x \in E$, $||x|| = \sqrt{(x|x)}$.

1. (a) Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
   (b) Dans quel cas a-t-on égalité ? Le démontrer.
2. Soit $E = \{f \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R}),\ \forall\, x \in [a,b]\ f(x) > 0\}$.
   Prouver que l'ensemble $\left\{\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t\ ,\ f \in E\right\}$ admet une borne inférieure m et déterminer la valeur de m.

* * *

Exercice 2

Soit E un espace euclidien.

1. Soit A un sous-espace vectoriel de E.
   Démontrer que $\left(A^{\perp}\right)^{\perp} = A$.
2. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
   (a) Démontrer que $(F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$.
   (b) Démontrer que $(F \cap G)^{\perp} = F^{\perp} + G^{\perp}$.

* * *

Exercice 3

Soient p et q deux entiers strictement positifs, et A, B deux matrices de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ (donc à p lignes et q colonnes) telles que

$$A^T A = B^T B.$$

1. Comparer $Ker(A)$ et $Ker(B)$.
2. Soit $f : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^p$ (resp. $g : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^p$) l'application linéaire de matrice A (resp. B) dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^q$ et de $\mathbb{R}^p$. On munit $\mathbb{R}^p$ de sa structure euclidienne canonique, et le produit scalaire est noté $\langle\ ,\ \rangle$. Montrer que
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^q, \qquad \langle f(x), f(y)\rangle = \langle g(x), g(y)\rangle.$$
3. Soient $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_r)$ et $(\varepsilon'_1, \cdots, \varepsilon'_r)$ deux bases d'un espace euclidien F de dimension r vérifiant
$$\forall (i,j) \in \{1, \cdots, r\}^2, \qquad \langle \varepsilon_i, \varepsilon_j\rangle = \langle \varepsilon'_i, \varepsilon'_j\rangle.$$
   Montrer qu'il existe une unique isométrie vectorielle $s \in \mathcal{O}(F)$ telle que
$$\forall i \in \{1, \cdots, r\}, \qquad s(\varepsilon_i) = \varepsilon'_i.$$
4. Montrer qu'il existe $U \in \mathcal{O}_p(\mathbb{R})$ telle que $A = UB$.

* * *

Exercice 4 : Cyclicité de $\mathbb{K}^*$ lorsque $\mathbb{K}$ est un corps fini

On rappelle que $\varphi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ désigne l'indicatrice d'Euler, c'est-à-dire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\varphi(n) = Card\{k \in [\![1, n]\!],\ pgcd(k, n) = 1\}.$$

Première partie :
Soit n un entier naturel. On note $\mathcal{D}_n$ l'ensemble des entiers naturels qui divisent n. On souhaite montrer que pour tout entier n strictement positif on a l'égalité $n = \sum\limits_{d \in \mathcal{D}_n} \varphi(d)$.

On pose $f(n) = \sum\limits_{d \in \mathcal{D}_n} \varphi(d)$.

1. Soient m_1, m_2 deux entiers naturels non nuls premiers entre eux.
   Redémontrer que $\varphi(m_1 m_2) = \varphi(m_1)\varphi(m_2)$.
2. Soit p un nombre premier. Pour tout entier $i \in \mathbb{N}^*$, calculer $\varphi(p^i)$.
   En déduire la valeur $f(p^k)$ pour tout entier k strictement positif.
3. Soient m_1 et m_2 deux entiers naturels non nuls premiers entre eux. Montrer que l'application

$$P : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{D}_{m_1} \times \mathcal{D}_{m_2} & \longrightarrow & \mathcal{D}_{m_1 m_2} \\ (d_1, d_2) & \longmapsto & d_1 d_2 \end{array} \right.$$

   est bien définie et qu'elle est bijective.
4. En déduire que lorsque m_1 et m_2 sont deux entiers naturels non nuls premiers entre eux on a la relation $f(m_1)f(m_2) = f(m_1 m_2)$.
5. Montrer que pour tout entier n strictement positif on a l'égalité $n = \sum\limits_{d \in \mathcal{D}_n} \varphi(d)$.

Seconde partie :
Soit $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ un corps de cardinal fini égal à $c + 1$ (avec $c \in \mathbb{N}^*$). L'ensemble des éléments inversibles de $\mathbb{K}$ est $\mathbb{K}^* = \mathbb{K} \setminus \{0\}$ et on souhaite montrer que le groupe $(\mathbb{K}^*, \cdot)$ de cardinal c est cyclique.
Pour tout entier d de $\mathcal{D}_c$, on note $N(d)$ le nombre d'éléments de $(\mathbb{K}^*, \cdot)$ qui sont d'ordre d.

6. Déterminer la valeur de $\sum\limits_{d \in \mathcal{D}_c} N(d)$.
7. Soit d un élément de $\mathcal{D}_c$.
   (a) On suppose qu'il existe un élément x d'ordre d dans $\mathbb{K}^*$ et on note H le sous-groupe de $(\mathbb{K}^*, \cdot)$ engendré par x. En introduisant un polynôme judicieux, montrer que tout élément d'ordre d de $\mathbb{K}^*$ est dans H.
   (b) Si x est d'ordre d dans $\mathbb{K}^*$, déterminer l'ordre de x^k dans $\mathbb{K}^*$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
   (c) Montrer que pour tous les éléments d de $\mathcal{D}_c$ on l'inégalité $N(d) \leq \varphi(d)$.
8. Montrer que pour tout entier d de $\mathcal{D}_c$, on a l'égalité $N(d) = \varphi(d)$.
9. En déduire que $(\mathbb{K}^*, \cdot)$ est un groupe cyclique.

* * *

Exercice 5 : Fonctions sous-gaussiennes

Première partie :
Soit $\lambda > 0$ fixé. On considère ici l'espace $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Dans toute la suite, on désigne par $\mathcal{E}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (*on ne demande pas de vérifier ce fait*) défini par

$$\mathcal{E} = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}),\ \exists (a, A) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \text{ tel que } \forall y \in \mathbb{R},\ |f(y)| \leq A \exp(-y^2/a)\}.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note $\tau_x\ :\ \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'application définie pour tout $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ par

$$\tau_x(f)(y) = f(y - x)$$

pour tout $y \in \mathbb{R}$. Enfin on définit la fonction $\gamma_\lambda\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$\gamma_\lambda(y) = \exp(-y^2/\lambda).$$

1. Pour tout $(f, g) \in \mathcal{E}^2$, montrer que fg est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Pour tous $f, g \in \mathcal{E}$, on définit

$$(f|g) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)g(y)\mathrm{d}y\ .$$

2. (a) Montrer que $(.\,|\,.)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{E}$.
   (b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\tau_x(\gamma_\lambda)$ appartient à $\mathcal{E}$.
3. (a) Soit $a > 0$. Montrer qu'il existe $c \geq 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{\lambda}\right) \exp\left(-\frac{y^2}{a}\right) \mathrm{d}y = c \exp\left(-\frac{x^2}{a+\lambda}\right)\ .$$

   Indication : On pourra montrer l'égalité

$$\frac{(y-x)^2}{\lambda} + \frac{y^2}{a} = \frac{a+\lambda}{a\lambda}(y - \frac{ax}{a+\lambda})^2 + \frac{x^2}{a+\lambda}\ .$$

   (b) Soit $g \in \mathcal{E}$. On considère $C(g)\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$C(g)(x) = (\tau_x(\gamma) \mid g).$$

      i. **Seulement pour les 5/2** : montrer que $C(g) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
      Les 3/2 admettront la continuité de $C(g)$.
      ii. Montrer que $C(g) \in \mathcal{E}$.

   (c) Montrer que $C\ :\ \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ (qui à g associe $C(g)$) définit un endomorphisme de $\mathcal{E}$.

Seconde partie :
Soit $\lambda > 0$ fixé. On considère maintenant l'ensemble $\mathcal{G}$ des fonctions g s'écrivant sous la forme $g = \sum_{i=1}^n \alpha_i \tau_{x_i}(\gamma_\lambda)$ où n est un entier strictement positif et $((x_i, \alpha_i))_{1 \leq i \leq n}$ est une famille d'éléments de $\mathbb{R}^2$:

$$\mathcal{G} = \{\sum_{i=1}^n \alpha_i \tau_{x_i}(\gamma_\lambda),\quad n \in \mathbb{N}^*,\ \forall i \in [\![1, n]\!]\ (x_i, \alpha_i) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\}.$$

On notera $\mathcal{H} = C(\mathcal{G})$ l'image de $\mathcal{G}$ par l'endomorphisme C introduit dans la question (3c).

4. Montrer que $\mathcal{G}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$ et que c'est le plus petit sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$ qui contient toutes les fonctions $\tau_x(\gamma_\lambda)$ pour $x \in \mathbb{R}$ arbitraire.
5. (a) Montrer qu'il existe $c_\lambda > 0$ telle que pour tout $(x, x') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ on a

$$(\tau_x(\gamma_\lambda) \mid \tau_{x'}(\gamma_\lambda)) = c_\lambda \gamma_{2\lambda}(x - x').$$

   Indication : On pourra remarquer que $\frac{1}{\lambda}((y-x)^2+(y-x')^2) = \frac{2}{\lambda}(y-(x+x')/2)^2+\frac{1}{2\lambda}(x'-x)^2$.

(b) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$C(\tau_x(\gamma_\lambda)) = c_\lambda \tau_x(\gamma_{2\lambda})$$

et que

$$\mathcal{H} = \{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda}), \quad n \in \mathbb{N}^*, \ \forall i \in [\![1, n]\!] \ (x_i, \alpha_i) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\}.$$

6. (a) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_i)_{1 \le i \le n}$ une famille de réels telle que pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$ on a $x_i \neq x_j$ lorsque $i \neq j$. Montrer que la fonction $\sum_{i=1}^n \alpha_i \tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda})$ est nulle si et seulement si $\alpha_i = 0$ pour tout $1 \le i \le n$ *(Indication : On pourra procéder par récurrence sur n).*

   (b) En déduire qu'il existe une unique application linéaire D de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{G}$ telle que $D \circ C(g) = g$ pour tout $g \in \mathcal{G}$ et $C \circ D(h) = h$ pour tout $h \in \mathcal{H}$.

   (c) Montrer que pour tout $h \in \mathcal{H}$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$ que $h(x) = (\tau_x(\gamma_\lambda)|D(h))$.

7. Pour tout $(h_1, h_2) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}$, on note

$$(h_1|h_2)_{\mathcal{H}} = c_\lambda (D(h_1)|D(h_2))$$

où c_λ est introduit dans la question (5a).

   (a) Vérifier que $(\ |\ )_{\mathcal{H}}$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{H}$.

   (b) Montrer que pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathcal{H}$ on a $h(x) = (\tau_x(\gamma_{2\lambda})|h)_{\mathcal{H}}$.

   (c) Montrer que pour tout $h \in \mathcal{H}$ on a

$$\|h\|_\infty \le \|h\|_{\mathcal{H}}$$

où on a posé $\|h\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |h(x)|$ et $\|h\|_{\mathcal{H}} = (h|h)_{\mathcal{H}}^{1/2}$.

* * *