DS02 du 12/10/2024 (4h)
Sujet A (MPI*)

Le sujet se compose de 2 exercices indépendants.
Calculatrice interdite.

* * *

Exercice 1 : Nombres algébriques et entiers algébriques

Notations
On notera respectivement $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Q}$ les corps des nombres complexes, réels et rationnels, et $\mathbb{Z}$ l'anneau des entiers relatifs.
Pour un entier $n \geq 1$, on dit qu'un nombre complexe z est une *racine n-ième de l'unité* si $z^n = 1$, et que z est une *racine de l'unité* s'il existe $k \geq 1$ tel que z soit une racine k-ième de l'unité.
Pour $R \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, on notera $R[X]$ l'anneau des polynômes à coefficients dans R. Un polynôme non nul est *unitaire* si son coefficient dominant est égal à 1.
Un polynôme $P \in \mathbb{Q}[X]$ est *irréductible dans* $\mathbb{Q}[X]$ si P n'est pas constant et si l'égalité $P = QR$ avec $Q, R \in \mathbb{Q}[X]$ implique que Q ou R est constant.
Un nombre complexe x est appelé *nombre algébrique* s'il existe $P \in \mathbb{Q}[X]$ non nul tel que $P(x) = 0$.
On dit que $x \in \mathbb{C}$ est un *entier algébrique* s'il existe $P \in \mathbb{Z}[X]$ **unitaire** tel que $P(x) = 0$.
On **admet** le résultat suivant :

Théorème 1
L'ensemble des entiers algébriques est un sous-anneau de $\mathbb{C}$.

Le problème est consacré à l'étude des polynômes unitaires $P \in \mathbb{Z}[X]$, irréductibles dans $\mathbb{Q}[X]$ et qui possèdent beaucoup de racines de module 1.

Partie I

Le but de cette partie est d'introduire les notions de polynôme minimal et de degré d'un nombre algébrique, et de montrer que le polynôme minimal d'un entier algébrique est à coefficients entiers.
Dans les questions 1. *à* 4.*, on fixe un nombre algébrique α. Soit*

$$I(\alpha) = \{P \in \mathbb{Q}[X],\ P(\alpha) = 0\}.$$

1. Montrer que $I(\alpha)$ est un idéal de $\mathbb{Q}[X]$, différent de $\{0\}$.

Il existe donc un unique polynôme unitaire $\Pi_\alpha \in \mathbb{Q}[X]$, appelé polynôme minimal de α, tel que

$$I(\alpha) = \{\Pi_\alpha Q,\ Q \in \mathbb{Q}[X]\}.$$

On appelle degré de α le degré du polynôme Π_α.

2. Montrer que α est de degré 1 si et seulement si $\alpha \in \mathbb{Q}$.
3. (a) Montrer que Π_α est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.
   (b) Soit $P \in \mathbb{Q}[X]$ un polynôme unitaire, irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$. Montrer que si z est une racine complexe de P, alors P est le polynôme minimal de z.
4. (a) Soient $A, B \in \mathbb{Q}[X]$ deux polynômes qui possèdent une racine commune dans $\mathbb{C}$. Montrer que A et B ne sont pas premiers entre eux dans $\mathbb{Q}[X]$.
   (b) Montrer que les racines de Π_α dans $\mathbb{C}$ sont simples.
5. (a) Montrer que si $\alpha \in \mathbb{Q}$ est un entier algébrique, alors $\alpha \in \mathbb{Z}$.

(b) Montrer que si $\alpha \in \mathbb{C}$ est un entier algébrique, alors $\Pi_\alpha \in \mathbb{Z}[X]$.
Indication : utiliser le théorème admis en introduction ainsi que la question 5.(a).

6. (a) Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ un entier algébrique de degré 2 et de module 1. Montrer que α est une racine de l'unité.

   (b) Montrer que $\frac{3+4i}{5}$ est un nombre algébrique de degré 2 et de module 1 mais n'est pas une racine de l'unité.

Partie II

Le but de cette partie est d'introduire et d'étudier une certaine classe d'entiers algébriques, qui ne sont pas des racines de l'unité et dont le polynôme minimal possède beaucoup de racines de module 1.
Un polynôme unitaire de degré $d \geq 1$

$$P = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i \in \mathbb{C}[X]$$

est dit réciproque si $a_i = a_{d-i}$ *pour* $0 \leq i \leq d$.

7. (a) Montrer qu'un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ unitaire de degré d est réciproque si et seulement si $X^d P\left(\frac{1}{X}\right) = P$.

   (b) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme unitaire réciproque. Montrer que si $x \in \mathbb{C}$ est une racine de P, alors $x \neq 0$ et $\frac{1}{x}$ est aussi une racine de P, avec la même multiplicité.

Si α est un nombre algébrique de polynôme minimal Π_α, les racines complexes de Π_α différentes de α sont appelées les conjugués de α. On notera $C(\alpha)$ l'ensemble des conjugués de α. L'ensemble $C(\alpha)$ est donc vide si α est de degré 1.

8. Soit x un nombre algébrique de module 1 et tel que $x \notin \{-1, 1\}$. Montrer que $\frac{1}{x}$ est un conjugué de x. En déduire que Π_x est réciproque.

On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des nombres réels $\alpha \in]1, +\infty[$ qui sont aussi des entiers algébriques de degré au moins 2 et qui vérifient

$$\max_{\gamma \in C(\alpha)} |\gamma| = 1.$$

9. Soit α un élément de $\mathcal{S}$ et soit $\gamma \in C(\alpha)$ de module 1.

   (a) Montrer que le polynôme minimal de α est réciproque et que $\frac{1}{\alpha}$ est un conjugué de α.

   (b) Montrer que γ n'est pas une racine de l'unité.

   (c) Montrer que tous les conjugués de α autres que $\frac{1}{\alpha}$ sont de module 1.

10. Montrer que le degré de tout élément de $\mathcal{S}$ est un entier pair, supérieur ou égal à 4.

Partie III

Dans cette partie, on étudie une famille infinie d'éléments de l'ensemble $\mathcal{S}$ introduit dans la partie II. Pour tout entier $n \geq 2$, on définit $P_n \in \mathbb{Z}[X]$ par

$$P_n(X) = X^4 - (6+n)X^3 + (10+n)X^2 - (6+n)X + 1.$$

11. Vérifier que P_n n'a pas de racine dans $\mathbb{Q}$ et que P_n a au moins une racine réelle strictement plus grande que 1. On fixe une telle racine α_n dans la suite.

12. Montrer que si $x \in \mathbb{C}$ est une racine de P_n, alors $\frac{1}{x}$ est aussi une racine de P_n, avec la même multiplicité.

On note α_n, $\frac{1}{\alpha_n}$, γ_n, $\frac{1}{\gamma_n}$ les racines de P_n dans $\mathbb{C}$ et on pose :

$$t_n = \alpha_n + \frac{1}{\alpha_n}, \qquad s_n = \gamma_n + \frac{1}{\gamma_n}.$$

13. Montrer que $t_n + s_n = 6 + n$ et $t_n s_n = 8 + n$.
14. Montrer que s_n est réel et que $0 < s_n < 2$. En déduire que γ_n n'est pas réel et que γ_n est de module 1.
15. (a) Montrer que t_n et s_n sont irrationnels.
    (b) En déduire que P_n est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$ et que $\alpha_n \in \mathcal{S}$.
    (c) Montrer que $\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

* * *

Exercice 2 : Méthode de Laplace et applications

On admettra la formule $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y^n}{n!} = e^y$, valable pour tout réel y.

Partie I : exponentielle tronquée

Pour x réel strictement positif et n entier naturel, on pose

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k x^k}{k!} \text{ et } R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n^k x^k}{k!}.$$

1. Justifier l'existence de $R_n(x)$. Que vaut la somme $T_n(x) + R_n(x)$?
2. En appliquant la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction $t \mapsto e^{nt}$, prouver pour tout réel x strictement positif, pour tout entier n, la relation :

$$R_n(x) = \frac{e^{nx} n^{n+1}}{n!} \int_0^x \left(ue^{-u}\right)^n \, \mathrm{d}u\,.$$

Soit y un réel strictement positif. On pose

$$a_n = \frac{n^{n+1}}{n!} y^n.$$

3. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_{n+1}/a_n$. En déduire que, si $y < e^{-1}$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0.$$

4. On suppose dans cette question que $x \in]0,1[$. Montrer que la fonction $u \mapsto ue^{-u}$ admet, sur $[0,x]$, un maximum M tel que $M < e^{-1}$. En déduire qu'au voisinage de l'infini,

$$R_n(x) = o(e^{nx}) \text{ puis que } T_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{nx}.$$

5. Démontrer la relation $n! = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \, e^{-t} \, \mathrm{d}t$ pour tout n entier naturel.

6. Pour tout entier $n \geqslant 1$, montrer l'identité suivante :

$$T_n(x) = e^{nx} \frac{n^{n+1}}{n!} \int_x^{+\infty} (ue^{-u})^n \, \mathrm{d}u\,.$$

7. En déduire que, si $x > 1$, alors $T_n(x) = o(e^{nx})$ lorsque n tend vers $+\infty$.
   On pourra l'écrire $(ue^{-u})^n \leqslant (xe^{-x})^{n-1} ue^{-u}$ pour $u \geqslant x$.

Une estimation asymptotique de $T_n(x)$, pour $x = 1$, sera obtenue dans la suite du problème.

Partie II : méthode de Laplace

On admettra la formule de l'intégrale de Gauss :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2} \, \mathrm{d}t = \sqrt{2\pi}.$$

Soit $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur laquelle on fait les hypothèses suivantes :
H1 : $f(0) = 1$
H2 : $f''(0) = -1$
H3 : Pour tout $x \in]-1, 1[\setminus\{0\}, \quad 0 < f(x) < 1$
H4 : les nombres $f(-1)$ et $f(1)$ appartiennent à l'intervalle $[0, 1[$.
Pour $x \in]-1, 1[\setminus\{0\}$, on pose

$$\varphi(x) = -\frac{1}{x^2} \ln\big(f(x)\big).$$

8. Montrer que $f'(0) = 0$ puis, à l'aide d'un développement limité, déterminer $k = \lim\limits_{x\to 0} \varphi(x)$.

On prolonge φ en posant $\varphi(0) = k$.

9. Montrer que la fonction φ, sur $]-1, 1[$, est minorée par un réel strictement positif. En déduire l'existence d'un réel a strictement positif tel que pour tout $x \in [-1, 1]$, on ait

$$f(x) \leqslant e^{-ax^2}.$$

   Indication : on pourra distinguer les cas où $f(1)$ et $f(-1)$ sont non nuls des cas où l'un des deux au moins est nul.

Pour tout n entier naturel non nul, on définit une fonction $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$g_n(u) = \begin{cases} \left(f\left(\dfrac{u}{\sqrt{n}}\right)\right)^n & \text{si } u \in [-\sqrt{n}, \sqrt{n}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

On admet le théorème suivant (qui est au programme et sera étudié ultérieurement) :

Théorème 2 (Convergence dominée)
Soit $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continues par morceaux, telles que
— *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la suite réelle $(g_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel noté $g(x)$.*
— *La fonction $g : x \mapsto g(x)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.*
— *Il existe une fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ intégrable sur $\mathbb{R}$ telle que*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ |g_n(x)| \leq h(x).$$

Alors les fonctions g_n et g sont intégrables sur $\mathbb{R}$ et $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} g_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}} g$.

10. En appliquant le théorème de convergence dominée à la suite (g_n) précédemment définie, montrer que

$$\int_{-1}^{1} \big(f(x)\big)^n \, \mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2\pi}{n}}.$$

   On en déduit de la même manière (et on ne demande pas de le montrer) que

$$\int_{0}^{1} \big(f(x)\big)^n \, \mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}. \tag{1}$$

Partie III : formule de Stirling

Avertissement : même si elle fait partie du programme, on (re)démontre dans cette partie la formule de Stirling.

11. Pour tout entier $n \geqslant 1$, déduire de la question 5 que
$$n! = n^{n+1}e^{-n}(I_n + J_n),$$
avec
$$I_n = \int_{-1}^{1} (x+1)^n e^{-nx} \, \mathrm{d}x \text{ et } J_n = \int_{1}^{+\infty} (x+1)^n e^{-nx} \, \mathrm{d}x\,.$$
12. Montrer que pour tout $x \geqslant 1$, $x + 1 \leqslant 2^x$. En déduire une majoration de J_n.
13. En appliquant la méthode de Laplace, donner un équivalent de I_n.
14. En déduire que
$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Partie IV : formule de Bernstein

On reprend les notations $T_n(x)$ et $R_n(x)$ introduites dans la partie I.

15. Pour tout entier n non nul, montrer l'identité suivante :
$$R_n(1) = \frac{n^{n+1}}{n!}\int_0^1 (1-t)^n e^{nt} \, \mathrm{d}t\,.$$
16. En déduire un équivalent de $R_n(1)$ lorsque n tend vers l'infini. Prouver que
$$T_n(1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}e^n.$$

* * *