

DS02 du 23/09/2025 (2h)

Sujet A (MPI*)

Le sujet se compose d'un problème.
Calculatrice interdite.

* * *

Autour du lemme de Cesàro et de la transformée de Laplace

Notations

Soit E une partie de $\mathbb{C}$.

À toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans E , ce que l'on note $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$, on associe la suite $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des sommes partielles de Cesàro définie par

$$\forall n \geq 0, \quad \sigma_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k$$

et la suite $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des écarts définie par

$$\forall n \geq 0, \quad e_n = u_{n+1} - u_n.$$

À toute série $\sum_{n \geq 0} a_n$ avec $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$, on associe la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des sommes partielles définie par

$$\forall n \geq 0, \quad S_n = \sum_{k=0}^n a_k.$$

Si la série $\sum_{n \geq 0} a_n$ est convergente, on note S sa somme définie par

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \lim_{N \rightarrow +\infty} S_N$$

et $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des restes définie par

$$\forall n \geq 0, \quad R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k.$$

Étant donné un intervalle I de $\mathbb{R}$, on note

$$\mathcal{C}^0(I) = \{f : I \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ continue sur } I\}, \quad \mathcal{C}_b^0(I) = \{f : I \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ continue et bornée sur } I\}.$$

Partie I : Lemme de Cesàro et applications

1. (a) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{C}$. Démontrer que

$$\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \right) \Rightarrow \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n = \ell \right). \quad (\text{Cesàro})$$

- (b) Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à valeurs réelles, démontrer que le résultat subsiste si $\ell = +\infty$ ou $\ell = -\infty$.

2. (a) En utilisant (Cesàro), calculer la limite de la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ définie par $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{kn}$.

- (b) Puis, à l'aide d'une comparaison série-intégrale, donner un équivalent de $(v_n)_{n \geq 1}$.

3. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\alpha \in \mathbb{R}^*$. On suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} e_n = \alpha$.

- (a) En utilisant (Cesàro), donner un équivalent de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- (b) Retrouver ce résultat par un théorème de comparaison de séries à termes positifs.
4. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in]0, +\infty[^\mathbb{N}$ et $\ell \in]0, +\infty[$. On suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$.
- (a) Démontrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell$.
- (b) Démontrer que le résultat subsiste si $\ell = 0$ ou $\ell = +\infty$.
- (c) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n!}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}}$.
5. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^\mathbb{N}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^\mathbb{N}$, $a \in \mathbb{C}$ et $b \in \mathbb{C}$. On suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = b$. Démontrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) = ab.$$

6. Soit $\sum_{n \geq 0} a_n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n$ deux séries de nombres complexes, convergentes de sommes respectives A et B . On note $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de terme général $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ et $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles associées définie par $C_n = \sum_{k=0}^n c_k$. Démontrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^n C_k \right) = AB. \quad (\text{Cauchy})$$

Partie II : Réciproques partielles du lemme de Cesàro

7. Vérifier que la réciproque de (Cesàro) n'est pas toujours vraie en exhibant une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$ qui ne converge pas et telle que $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$.
8. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$ et $\ell \in \mathbb{R}$.
- (a) Démontrer que

$$\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n = \ell \text{ et } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ monotone} \right) \Rightarrow \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \right).$$

- (b) Démontrer que le résultat subsiste pour $\ell = +\infty$ ou $\ell = -\infty$.

9. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^\mathbb{N}$ et $\ell \in \mathbb{C}$. Démontrer que

$$\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n = \ell \text{ et } e_n = o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \Rightarrow \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \right). \quad (\text{Hardy faible})$$

Indication : on pourra démontrer que pour tout $n \geq 1$,

$$\sum_{k=0}^n k e_k = n u_{n+1} - \sum_{k=1}^n u_k.$$

10. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^\mathbb{N}$ et $\ell \in \mathbb{C}$. Le but de cette question est de démontrer que

$$\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n = \ell \text{ et } e_n = O\left(\frac{1}{n}\right) \right) \Rightarrow \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \right). \quad (\text{Hardy fort})$$

On suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n = \ell$ et $e_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$.

- (a) Soit $0 \leq n < m$. Démontrer que

$$\sum_{k=n+1}^m u_k - (m-n)u_n = \sum_{j=n}^{m-1} (m-j)e_j.$$

- (b) En déduire qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tous $2 \leq n < m$, on a

$$\left| \frac{(m+1)\sigma_m - (n+1)\sigma_n}{m-n} - u_n \right| \leq C \ln \left(\frac{m-1}{n-1} \right)$$

et

$$|u_n - \ell| \leq C \ln \left(\frac{m-1}{n-1} \right) + \frac{m+1}{m-n} (|\sigma_m - \ell| + |\sigma_n - \ell|).$$

- (c) En déduire (Hardy fort).

Indication : on pourra prendre $m = 1 + \lfloor \alpha n \rfloor$ avec un paramètre $\alpha > 1$ à choisir, où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de $x \in \mathbb{R}$.

Partie III : Variante continue du lemme de Cesàro

11. Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, +\infty[)$ et $\ell \in \mathbb{R}$. Démontrer que

$$\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \right) \Rightarrow \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = \ell \right).$$

12. À l'aide d'un contre-exemple, démontrer que la réciproque du résultat de la question précédente est fausse.

13. Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, +\infty[)$ et $\ell \in \mathbb{R}$. On veut démontrer que :

$$\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x+1) - f(x) = \ell \right) \Rightarrow \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \ell \right).$$

- (a) Montrer ce résultat pour $\ell = 0$.

- (b) En se ramenant au cas précédent, montrer le cas général.

Partie IV : Transformée de Laplace

14. Soit $f \in \mathcal{C}_b^0([0, +\infty[)$. On définit la transformée de Laplace de f par la fonction

$$\mathcal{L}(f) : t \in]0, +\infty[\mapsto \int_0^{+\infty} e^{-tx} f(x) dx.$$

Démontrer que $\mathcal{L}(f)$ est bien définie sur $]0, +\infty[$.

15. Soit $f \in \mathcal{C}_b^0([0, +\infty[)$. Le but de cette question est de démontrer que

$$\left(\int_0^{+\infty} f(x) dx \text{ converge} \right) \Rightarrow \left(\lim_{t \rightarrow 0^+} \mathcal{L}(f)(t) = \int_0^{+\infty} f(x) dx \right).$$

On suppose que $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ converge.

- (a) Démontrer que la fonction

$$F : x \in [0, +\infty[\mapsto \int_x^{+\infty} f(t) dt$$

est bien définie, continue et bornée sur $[0, +\infty[$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et vérifie $F' = -f$.

- (b) Démontrer que $\lim_{t \rightarrow 0^+} \mathcal{L}(f)(t) = \int_0^{+\infty} f(x) dx$ par une intégration par parties.

On a donc montré que la transformée de Laplace est prolongeable continûment en 0.