

Corrigé du DS01 du 14/09/2024 (4h)

Exercice 1 :

1. (a) Par croissances comparées, on a

$$nu_n = \frac{\sqrt{n}}{\ln(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty,$$

donc à partir d'un certain rang, on a l'inégalité $nu_n \geq 1$, c'est-à-dire $u_n \geq \frac{1}{n}$.

On en déduit par comparaison de SATP que $\sum u_n$ **diverge**.

- (b) Toujours par croissances comparées :

$$n^\alpha u_n = \frac{\ln(n)}{n^{\frac{3}{2}-\alpha}}$$

tend vers 0 lorsque $n \rightarrow +\infty$ dès que $\alpha < \frac{3}{2}$. Ainsi, en choisissant $\alpha \in]1, \frac{3}{2}[$ (par exemple $\alpha = 5/4$), on a $u_n = o(1/n^\alpha)$ avec $\alpha > 1$, donc $\sum u_n$ **converge**.

- (c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = \frac{1}{\binom{2n}{n}} = \frac{(n!)^2}{(2n)!} > 0$, donc on peut utiliser la règle de d'Alembert :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!} \times \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{4} < 1,$$

(la limite s'obtient simplement en considérant un équivalent) donc $\sum u_n$ **converge**.

2. (a) **Théorème de sommation des relations de comparaison, cas convergent :**

Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, et $(v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

On suppose que (v_n) est positive à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$ et que $\sum v_n$ converge.

(i) Si $u_n = O(v_n)$, alors $\sum u_n$ converge et $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = O\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$.

(ii) Si $u_n = o(v_n)$, alors $\sum u_n$ converge et $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = o\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$.

(iii) Si $u_n \sim v_n$, alors $\sum u_n$ converge et $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$.

- (b) Puisque $\frac{1}{k^3+k} \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{k^3} > 0$ et $\sum \frac{1}{k^3}$ converge, on en déduit d'après le théorème précédemment cité que $\sum \frac{1}{k^3+k}$ **converge** (ce qui justifie l'existence du reste R_n) et

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3+k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^3}.$$

Pour déterminer un équivalent de ce dernier reste, on procède classiquement par comparaison série-intégrale : la fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t^3}$ est continue et décroissante sur $]0, +\infty[$, donc

$$\forall k \geq 2, \quad \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^3} \leq \frac{1}{k^3} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^3},$$

donc par sommation et relation de Chasles, on obtient pour tous entiers $2 \leq n \leq N$:

$$\int_{n+1}^{N+1} \frac{dt}{t^3} \leq \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k^3} \leq \int_n^N \frac{dt}{t^3},$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{2(n+1)^2} - \frac{1}{2(N+1)^2} \leq \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k^3} \leq \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{2N^2}.$$

En passant à la limite lorsque $N \rightarrow +\infty$ dans cette inégalité, on obtient un encadrement du reste :

$$\frac{1}{2(n+1)^2} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \leq \frac{1}{2n^2},$$

ce qui donne immédiatement $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$. Finalement, $R_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$.

3. (a) Etudier la sommabilité de la famille complexe $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}} = (r^{|n|} e^{in\theta})_{n \in \mathbb{Z}}$ revient à étudier la sommabilité de la famille positive $(|u_n|)_{n \in \mathbb{Z}} = (r^{|n|})_{n \in \mathbb{Z}}$.

Par le théorème de sommation par paquets pour les familles de réels positifs, nous avons, dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |u_n| = |u_0| + \sum_{n \in \mathbb{N}^*} |u_n| + \sum_{n \in \mathbb{N}^*} |u_{-n}| = 1 + 2 \sum_{n \in \mathbb{N}^*} r^n.$$

Ainsi, la famille $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est sommable si et seulement si $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} r^n < +\infty$, c'est-à-dire si et seulement si $r < 1$.

- (b) Pour $r \in [0, 1[$ et $\theta \in \mathbb{R}$, on peut donc appliquer le théorème de sommation par paquets pour les familles complexes, qui donne ici :

$$S = \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n = u_0 + \sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n + \sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_{-n} = 1 + \sum_{n \in \mathbb{N}^*} r^n e^{in\theta} + \sum_{n \in \mathbb{N}^*} r^n e^{-in\theta},$$

c'est-à-dire

$$S = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (re^{i\theta})^n + \sum_{n=1}^{+\infty} (re^{-i\theta})^n = 1 + \underbrace{\frac{re^{i\theta}}{1 - re^{i\theta}}}_{=Z} + \underbrace{\frac{re^{-i\theta}}{1 - re^{-i\theta}}}_{=\bar{Z}}.$$

On peut simplifier :

$$Z = \frac{re^{i\theta}}{1 - re^{i\theta}} = \frac{re^{i\theta}(1 - re^{-i\theta})}{|1 - re^{i\theta}|^2} = \frac{re^{i\theta} - r^2}{|1 - re^{i\theta}|^2}.$$

donc

$$S = 1 + 2\operatorname{Re}(Z) = 1 + 2r \left(\frac{\cos(\theta) - r}{1 - 2r \cos(\theta) + r^2} \right) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\theta) + r^2}.$$

4. (a) Montrons par récurrence que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et strictement positive :

- $u_0 = 1 > 0$;
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_n > 0$. Alors $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n^2}$ est bien défini et strictement positif (comme quotient de réels strictement positifs).

Ensuite, (u_n) est décroissante car $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n^2} \leq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Ainsi, étant décroissante et minorée par 0, la suite (u_n) converge vers un réel $\ell \geq 0$.

En passant à la limite dans la relation $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n^2}$, on obtient l'équation "au point fixe" :

$$\ell = \frac{\ell}{1 + \ell^2} \iff \ell^3 = 0 \iff \ell = 0,$$

donc (u_n) converge vers 0.

(b) Soit $\alpha < 0$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha = u_n^\alpha ((1 + u_n^2)^{-\alpha} - 1).$$

Puisque $u_n^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, on a le développement asymptotique :

$$u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha = u_n^\alpha (1 - \alpha u_n^2 + o(u_n^2) - 1) = -\alpha u_n^{\alpha+2} + o(u_n^{\alpha+2}).$$

En choisissant $\alpha = -2$, on obtient $u_{n+1}^{-2} - u_n^{-2} = 2 + o(1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2$.

(c) D'après la question précédente, $u_{n+1}^{-2} - u_n^{-2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2 > 0$ et la série $\sum 2$ diverge, donc d'après le théorème de sommation des relations de comparaison, cas divergent, on obtient

$$\sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1}^{-2} - u_k^{-2}) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{n-1} 2,$$

c'est-à-dire

$$u_n^{-2} - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2n.$$

On en déduit $u_n^{-2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2n$, puis $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} (2n)^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{2n}}$.

* * *

Exercice 2 : extrait de l'épreuve EM Lyon 2022 (MP/PC/PSI)

1. Si $\mu \neq \lambda$, alors $u_n(\mu) = \frac{\omega_n + \mu}{n} = u_n(\lambda) + \frac{\mu - \lambda}{n}$. Vu que $\mu - \lambda \neq 0$, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\mu - \lambda}{n}$ diverge et puisque la série $\sum_{n \geq 1} u_n(\lambda)$ converge, on obtient par somme que **la série $\sum_{n \geq 1} u_n(\mu)$ diverge**.

2. (a) Par d -périodicité de la suite (ω_n) , on a $\omega_{md+k} = \omega_k$ pour tous entiers $(m, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, et donc $\forall m \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{md+1} \sum_{k=1}^d \omega_{md+k} = \frac{\Omega}{md+1}$, en notant $\Omega = \sum_{k=1}^d \omega_k$.

(b) Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a par télescopage

$$S_{(m+1)d} - S_{md} = \sum_{k=md+1}^{md+d} \frac{\omega_k}{k} = \sum_{j=1}^d \frac{\omega_{md+j}}{md+j} = \sum_{j=1}^d \frac{\omega_{md+j}}{md+j},$$

donc

$$\begin{aligned} S_{(m+1)d} - S_{md} - \frac{1}{md+1} \sum_{j=1}^d \omega_{md+j} &= \sum_{j=1}^d \omega_{md+j} \left(\frac{1}{md+j} - \frac{1}{md+1} \right) \\ &= \sum_{j=1}^d \omega_j \frac{1-j}{(md+1)(md+j)}. \end{aligned}$$

En multipliant par m^2 , on obtient

$$m^2 \left(S_{(m+1)d} - S_{md} - \frac{1}{md+1} \sum_{j=1}^d \omega_{md+j} \right) = \sum_{j=1}^d \omega_j \frac{(1-j)m^2}{(md+1)(md+j)}.$$

Pour tout $j \in [1, d]$, on a $\frac{(1-j)m^2}{(md+1)(md+j)} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \frac{1-j}{d^2}$. Par somme finie de limites lorsque $m \rightarrow +\infty$ (licite car la somme comporte d termes et d ne dépend pas de m), on obtient

$$m^2 \left(S_{(m+1)d} - S_{md} - \frac{1}{md+1} \sum_{j=1}^d \omega_{md+j} \right) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{d^2} \sum_{j=1}^d (1-j)\omega_j.$$

En notant $\alpha = \frac{1}{d^2} \sum_{j=1}^d (1-j)\omega_j$, on a donc

$$m^2 \left(S_{(m+1)d} - S_{md} - \frac{1}{md+1} \sum_{j=1}^d \omega_{md+j} \right) = \alpha + o(1),$$

c'est-à-dire

$$S_{(m+1)d} - S_{md} = \frac{1}{md+1} \sum_{j=1}^d \omega_{md+j} + \frac{\alpha}{m^2} + o\left(\frac{1}{m^2}\right).$$

(c) La question précédente implique notamment :

$$S_{(m+1)d} - S_{md} = \frac{\Omega}{md+1} + O(1/m^2).$$

- Si $\Omega = 0$, alors $S_{(m+1)d} - S_{md} = O(1/m^2)$, donc la série $\sum_{m \geq 1} (S_{(m+1)d} - S_{md})$ converge (absolument).
- Si $\Omega \neq 0$, on a $S_{(m+1)d} - S_{md} \sim \frac{\Omega}{m}$, donc par comparaison à la série harmonique, la série $\sum_{m \geq 1} (S_{(m+1)d} - S_{md})$ diverge.

Finalement, la série $\sum_{m \geq 1} (S_{(m+1)d} - S_{md})$ converge si et seulement si $\Omega = 0$.

- (d) • Si la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge, alors la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ converge, donc la suite extraite $(S_{md})_{m \geq 1}$ (formée des indices multiples de d) converge. Par le lien suite-série, on en déduit que la série télescopique $\sum_{m \geq 1} (S_{(m+1)d} - S_{md})$ converge.
- Réciproquement, si la série télescopique $\sum_{m \geq 1} (S_{(m+1)d} - S_{md})$ converge, alors (toujours par le lien suite-série), il existe la suite $(S_{md})_{m \geq 1}$ converge vers un réel S . Ainsi, pour la suite $(S_n)_{n \geq 1}$, l'extraction formée des rangs multiples de d converge. Montrons maintenant que les extractions de **toutes** les classes de congruence modulo d convergent, c'est-à-dire les suites $(S_{md+i})_{m \geq 1}$ avec $i \in [0, d-1]$ fixé. Cela résulte du fait que

$$S_{md+i} = S_{md} + \sum_{j=1}^i \frac{\omega_{md+j}}{md+j} = S_{md} + \sum_{j=1}^i \frac{\omega_j}{md+j} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} S,$$

puisque $\sum_{j=1}^i \frac{\omega_j}{md+j} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0$ comme somme de i termes tendant vers 0 (ici, i ne dépend pas de m).

Puisque les d classes de congruence modulo d partitionnent $\mathbb{N}$ et que toutes les suites $(S_{md+i})_{m \geq 1}$ convergent vers la même limite S (pour $i \in [0, d-1]$), on en déduit que la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ converge vers S .

On a donc bien montré les équivalences :

$$\sum_{n \geq 1} u_n \text{ converge} \iff \sum_{m \geq 1} (S_{(m+1)d} - S_{md}) \text{ converge} \iff \Omega = 0.$$

3. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Posons $\omega'_n = \omega_n + \lambda$. Comme (ω_n) , la suite (ω'_n) est d -périodique. En raisonnant avec (ω'_n) au lieu de (ω_n) , les questions 2.(c) et 2.(d) montrent que **la série de terme général $u_n(\lambda) = \frac{\omega'_n}{n}$ converge si et seulement si $\sum_{k=1}^d \omega'_k = 0$, c'est-à-dire si et seulement si $\lambda = -\Omega/d$.**
4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par division euclidienne, il existe un unique couple $(m, r) \in \mathbb{N} \times \llbracket 0, d-1 \rrbracket$ tel que $n = dm + r$. Dès lors, en sommant "par tranches successives" :

$$T_n = \sum_{k=1}^n \omega_k = \sum_{j=0}^{m-1} (\omega_{dj+1} + \dots + \omega_{d(j+1)}) + \omega_{dm+1} + \dots + \omega_{dm+r}.$$

Par la périodicité et l'hypothèse $\Omega = 0$, chaque paquet de taille d est nul car :

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad \omega_{dj+1} + \dots + \omega_{d(j+1)} = \omega_1 + \dots + \omega_d = \Omega = 0.$$

Donc

$$T_n = \omega_{dm+1} + \dots + \omega_{dm+r} = \omega_1 + \dots + \omega_r,$$

et on en déduit que

$$|T_n| \leq \sum_{k=1}^r |\omega_k| \leq \sum_{k=1}^{d-1} |\omega_k| = C_d,$$

ce qui montre que **(T_n) est bornée** car la constante C_d ne dépend pas de n .

- (b) C'est le principe de la "transformation d'Abel". En écrivant que $\omega_n = T_n - T_{n-1}$ pour tout $n \geq 1$, on obtient

$$\sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^n \frac{T_k - T_{k-1}}{a_k} = \sum_{k=1}^n \frac{T_k}{a_k} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{T_k}{a_{k+1}} = \sum_{k=1}^n T_k \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}} \right) + \frac{T_n}{a_{n+1}} - \frac{T_0}{a_1},$$

d'où la formule voulue puisque $T_0 = 0$.

- (c) Pour tout $k \geq 1$, on a en utilisant les notations des questions précédentes :

$$\left| T_k \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}} \right) \right| \leq C_d \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}} \right)$$

(la croissance de (a_n) donne $\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}} \geq 0$ pour tout k , ce qui permet d'enlever la valeur absolue).

On conclut alors par comparaison de SATP : la série télescopique $\sum_{k \geq 1} C_d \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}} \right)$ converge (d'après le lien suite-série puisque la suite $(1/a_k)$ converge, ici vers 0), donc la série $\sum_{k \geq 1} \left| T_k \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}} \right) \right|$ converge.

Finalement, **la série $\sum_{k \geq 1} T_k \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}} \right)$ converge absolument donc elle converge.**

- (d) La question précédente montre que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n T_k \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}} \right)$ existe dans $\mathbb{C}$.

En outre, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{T_n}{a_{n+1}} = 0$ car T_n est bornée et $a_{n+1} \rightarrow +\infty$.

Donc par somme et d'après 4.(b), les sommes partielles $\sum_{k=1}^n u_k$ possèdent une limite dans $\mathbb{C}$ lorsque $n \rightarrow +\infty$, c'est-à-dire que **la série $\sum_{k \geq 1} u_k$ converge.**

* * *

Exercice 3 : "Vrai ou Faux ?" AVEC justification

1. **FAUX** : si u est injective, alors u n'est pas nécessairement surjective.

Par exemple, $u : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (t, 0) \end{cases}$ est linéaire, injective (car $u(t) = u(t') \implies (t, 0) = (t', 0) \implies t = t'$) mais non surjective (son image est la droite $\text{Vect}(1, 0)$, et non pas $\mathbb{R}^2$ tout entier).

2. **VRAI** : si $\text{Ker}(u) = \{0_E\}$, alors u est injective.

En effet, si on suppose $\text{Ker}(u) = \{0_E\}$, alors par linéarité de u :

$$u(t) = u(t') \iff u(t - t') = 0_F \iff t - t' \in \text{Ker}(u) \iff t - t' \in \{0_E\} \iff t = t',$$

donc u est injective.

3. **VRAI** : si u est injective, alors $\text{Ker}(u) = \{0_E\}$.

En effet, si on suppose u injective, alors puisque $u(0_E) = 0_F$:

$$x \in \text{Ker}(u) \iff u(x) = 0_F \iff u(x) = u(0_E) \iff x = 0_E,$$

ce qui montre que $\text{Ker}(u)$ n'est constitué que du vecteur 0_E .

4. **VRAI** : $\text{Im}(u)$ est un SEV de F .

En effet, $0_F = u(0_E) \in \text{Im}(u)$, et pour tous vecteurs y_1, y_2 de $\text{Im}(u)$, il existe x_1, x_2 dans E tels que $y_1 = u(x_1)$ et $y_2 = u(x_2)$. Donc, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$\lambda y_1 + y_2 = \lambda u(x_1) + u(x_2) = u(\lambda x_1 + x_2) \in \text{Im}(u),$$

ce qui montre que $\text{Im}(u)$ est stable par combinaison linéaire.

5. **FAUX** : si $(e_1, \dots, e_n)$ est libre dans E , alors $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ n'est pas nécessairement libre dans F .

Par exemple, si on prend $u = 0_{\mathcal{L}(E, F)}$ (l'application qui envoie tout vecteur $x \in E$ sur 0_F), alors n'importe quelle famille libre $(e_1, \dots, e_n)$ se transforme par u en la famille $(0_F, \dots, 0_F)$, qui est évidemment liée.

6. **VRAI** : si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E , alors $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est génératrice de $\text{Im}(u)$.

En effet : soit $y \in \text{Im}(u)$. Il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$. Or, $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E , donc il existe des scalaires uniques $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tels que $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$. On en déduit que

$$y = u\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i u(e_i),$$

ce qui montre que tout vecteur de $\text{Im}(u)$ est CL de $(u(e_1), \dots, u(e_n))$, c'est-à-dire $\text{Im}(u) \subset \text{Vect}(u(e_1), \dots, u(e_n))$. L'inclusion réciproque est également vraie car les $u(e_i)$ sont dans $\text{Im}(u)$.

7. **VRAI** : si $\text{rg}(u) = \dim(E)$, alors u est injective.

En effet, d'après le théorème du rang, on a

$$\dim(\text{Ker}(u)) = \dim(E) - \text{rg}(u) = 0,$$

donc $\text{Ker}(u) = \{0_E\}$, ce qui implique l'injectivité de u .

8. **FAUX** : si $\text{rg}(u) = \dim(E)$, alors u n'est pas nécessairement surjective.

Par exemple, $u : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (t, 0) \end{cases}$ est linéaire, de rang 1 (puisque son image est la droite $\text{Vect}(1, 0)$), on a donc bien $\dim(\mathbb{R}) = \text{rg}(u)$ mais u non surjective puisque $\text{Im}(u) \neq \mathbb{R}^2$.

* * *

Exercice 4 : extrait de l'épreuve Mines Albi, Alès, Douai, Nantes 2002

Partie I

1. (a) L'application **w est linéaire** car $\text{Ker}(u^{i+j})$ et E sont bien des $\mathbb{R}$ -EV et car u^j est linéaire par composition d'applications linéaires.
De plus, si $y \in \text{Im}(w)$, alors il existe $x \in \text{Ker}(u^{i+j})$ tel que $y = w(x) = u^j(x)$, donc $u^i(y) = u^{i+j}(x) = 0_E$, ce qui montre l'inclusion **$\text{Im}(w) \subset \text{Ker}(u^i)$** .

- (b) **Enoncé du théorème du rang** : si $u : E \rightarrow F$ est une application linéaire et si E est de dimension finie, alors $\text{Im}(u)$ est de dimension finie et $\dim(E) = \dim(\text{Ker}(u)) + \dim(\text{Im}(u))$.
En appliquant ce théorème à w , on obtient :

$$\dim(\text{Ker}(u^{i+j})) = \dim(\text{Ker}(w)) + \dim(\text{Im}(w)).$$

Puisque $\text{Im}(w) \subset \text{Ker}(u^i)$, on a $\dim(\text{Im}(w)) \leq \dim(\text{Ker}(u^i))$. De plus,

$$\text{Ker}(w) = \{x \in \text{Ker}(u^{i+j}), u^j(x) = 0_E\} = \text{Ker}(u^{i+j}) \cap \text{Ker}(u^j) = \text{Ker}(u^j),$$

donc on a bien l'inégalité

$$\dim(\text{Ker}(u^{i+j})) \leq \dim(\text{Ker}(u^j)) + \dim(\text{Ker}(u^i)).$$

2. (a) Ici, $\text{rg}(u) = 2$ donc par le théorème du rang $\dim(\text{Ker}(u)) = \dim(E) - 2 = 1$.
On utilise la question **1b** avec $(i, j) = (1, 1)$, puis avec $(i, j) = (2, 1)$:

$$\dim(\text{Ker}(u^2)) \leq 2 \dim(\text{Ker}(u)) = 2,$$

$$\dim(\text{Ker}(u^3)) \leq \dim(\text{Ker}(u)) + \dim(\text{Ker}(u^2)) = 1 + \dim(\text{Ker}(u^2)).$$

Puisque $u^3 = 0_{\mathcal{L}(E)}$, on a $\text{Ker}(u^3) = E$, d'où les inégalités

$$3 - 1 \leq \dim(\text{Ker}(u^2)) \leq 2,$$

et donc **$\dim(\text{Ker}(u^2)) = 2$** .

- (b) Puisque $\text{rg}(u^2) = 3 - \dim(\text{Ker}(u^2)) = 1$, l'endomorphisme u^2 est non nul : **il existe donc $e \in E$ tel que $u^2(e) \neq 0_E$** .

Ensuite, montrons que la famille $\mathcal{B}' = (e, u(e), u^2(e))$ est libre : si $\alpha e + \beta u(e) + \gamma u^2(e) = 0_E$ avec $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$, alors en appliquant u^2 , on obtient (puisque $u^3 = 0$) $\alpha u^2(e) = 0_E$ donc $\alpha = 0$. D'où (en reportant dans la CL initiale) $\beta u(e) + \gamma u^2(e) = 0_E$, et en appliquant u , on obtient $\beta u^2(e) = 0_E$, ce qui amène $\beta = 0$, puis $\gamma u^2(e) = 0_E$ et enfin $\gamma = 0$ (toujours en reportant).

La famille $\mathcal{B}'$ étant libre et de cardinal $3 = \dim(E)$, **c'est une base de E** .

- (c) Par définition, $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = \text{Mat}_{(e, u(e), u^2(e))}(u(e), u^2(e), u^3(e)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

3. (a) On a $\text{rg}(u) = 1$ donc u est non nul, ce qui montre **l'existence d'un vecteur $e \in E$ tel que $u(e) \neq 0_E$** .

De plus, $u(e) \in \text{Ker}(u) \setminus \{0_E\}$ (car u^2 est nul) et $\text{Ker}(u)$ est de dimension 2 (par le théorème du rang), donc on peut **compléter la famille libre $(u(e))$ en une base $(u(e), f)$ de $\text{Ker}(u)$, qui est en particulier libre**.

Montrons maintenant que $\mathcal{B}'' = (e, u(e), f)$ est une base de E : on a $(u(e), f)$ libre et $e \notin \text{Ker}(u) = \text{Vect}(u(e), f)$, donc $\mathcal{B}''$ est libre. De plus, elle est de cardinal $3 = \dim(E)$ donc **il s'agit bien d'une base de E** .

- (b) Par définition, $\text{Mat}_{\mathcal{B}''}(u) = \text{Mat}_{(e, u(e), f)}(u(e), u^2(e), u(f)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Partie II

4. Par produit matriciel :

$$N = T - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha\gamma \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M = N^2 - N = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & \alpha\gamma - \beta \\ 0 & 0 & -\gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M^3 = (N(N - I_3))^3 = N^3(N - I_3)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(car N et $N - I_3$ commutent et $N^3 = 0$).

De plus, en effectuant l'opération élémentaire $L_1 \leftarrow L_1 + \alpha L_2$, on transforme la matrice M en la matrice $-N$, donc $\text{rg}(M) = \text{rg}(-N) = \text{rg}(N)$.

Enfin, on a $\text{rg}(N) \in \{0, 1, 2\}$ car la première colonne de N est nulle donc $\text{rg}(N) < 3$, et

les cas $\text{rg}(N) = 0, 1, 2$ sont tous possibles (en prenant par exemple $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ou

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ou } N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}).$$

5. Notons u et v les endomorphismes de E ayant pour matrices respectives N et M dans la base $\mathcal{B}$. D'après 4., on a $u^3 = v^3 = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $\text{rg}(u) = \text{rg}(v) = 2$, donc d'après 2c., il existe deux bases

$\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ de E telles que $\text{Mat}_{\mathcal{B}_1}(u) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_2}(v) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = J$. Ceci montre que N et

M sont toutes deux semblables à J , et donc **N et M sont semblables.**

6. (a) Si $\text{rg}(N) = 1$, alors α ou γ est nul (sinon $\text{rg}(N) = 2$ car les deux dernières colonnes de N sont libres), donc $\alpha\gamma = 0$, ce qui amène $N^2 = 0$.

On en déduit $M^2 = (N(N - I_3))^2 = N^2(N - I_3)^2 = 0$.

En introduisant les endomorphismes u et v ayant pour matrices N et M dans la base $\mathcal{B}$, on peut refaire le raisonnement de la question précédente, mais cette fois dans le cadre de la question 3b. (puisque $u^2 = v^2 = 0$ et $\text{rg}(u) = \text{rg}(v) = 1$), qui montre que **M et N sont encore semblables.**

(b) Si $\text{rg}(N) = 0$, alors $N = M = 0$, donc **N et M sont encore semblables.**

7. On a

$$T(I_3 + M) = (I_3 + N)(I_3 - N + N^2) = I_3 + N^3 = I_3$$

et de même $(I_3 + M)T = I_3$, donc **T est inversible avec $T^{-1} = I_3 + M$.**

8. Vu que M et N sont semblables, il existe $P \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $M = P^{-1}NP$. Donc

$$T^{-1} = I_3 + M = I_3 + P^{-1}NP = P^{-1}(I_3 + N)P = P^{-1}TP,$$

ce qui montre que T est semblable à son inverse. On en déduit que A est semblable à son inverse : en effet, il existe par hypothèse $Q \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $T = Q^{-1}AQ$, donc **A est inversible** (comme T) et

$$Q^{-1}A^{-1}Q = T^{-1} = P^{-1}TP = P^{-1}Q^{-1}AQP.$$

Ainsi, $A^{-1} = (QP^{-1}Q^{-1})A(QPQ^{-1})$ ce qui montre que **A est semblable à A^{-1} .**

9. Prenons une matrice de symétrie ($A^2 = A$), par exemple $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Vu que A est

inversible et $A^{-1} = A$, on a évidemment A semblable à A^{-1} , mais A n'est pas semblable à T , sinon on aurait $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(T) = 3$, alors que $\text{Tr}(A) = 1$.

La réciproque annoncée est donc fausse.

10. (a) En résolvant le système $(A - I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, on obtient

$$\text{Ker}(A - I_3) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right), \text{ donc puisque } A \text{ représente } u \text{ dans la base}$$

$\mathcal{B} = (a, b, c)$, on en déduit $\text{Ker}(u - \text{Id}_E) = \text{Vect}(a, b - c)$.

Ainsi, la famille $(e_1, e_2) = (a, b - c)$ engendre $\text{Ker}(u - \text{Id}_E)$ et elle est clairement libre, donc c'est **une base de $\text{Ker}(u - \text{Id}_E)$** , qui est donc **un SEV de dimension 2**.

- (b) La famille (e_1, e_2) est libre, et $c \notin \text{Ker}(u - \text{Id}_E) = \text{Vect}(e_1, e_2)$ (puisque par lecture des colonnes de A , $u(c) = -b + 2c \neq c$), donc (e_1, e_2, c) est libre, et de cardinal $3 = \dim(E)$, donc il s'agit d'une **base de E** .

$$\text{Enfin, } \text{Mat}_{(e_1, e_2, c)}(u) = \text{Mat}_{(e_1, e_2, c)}(u(e_1), u(e_2), c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = T,$$

puisque $u(e_1) = e_1$, $u(e_2) = e_2$ (par définition de $\text{Ker}(u - \text{Id}_E)$), et $u(c) = -b + 2c = c - e_2$.

- (c) La question précédente montre que A est semblable à T , matrice triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale, donc d'après la question 8., les matrices **A et A^{-1} sont semblables**.

* * *