Corrigé du DS01 du 09/09/2025 (4h)

Exercice 1 : Etude d'une série produit

1. (a) Puisqu'on a $\sum_{k=1}^{n}(u_{k+1}-u_k) = u_{n+1}-u_1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on en déduit que la série $\sum(u_{k+1}-u_k)$ converge si et seulement si la suite (u_{n+1}) converge, ce qui équivaut à la convergence de (u_n).

   (b) On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$u_{n+1}-u_n = H_{n+1}-H_n-\ln(n+1)+\ln(n) = \frac{1}{n+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$
$$= \frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}+o(1/n)\right)-\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}+o(1/n^2) \sim -\frac{1}{2n^2}.$$

   (c) Puisque la série $\sum -\frac{1}{2n^2}$ converge, on déduit (par le critère des équivalents pour les suites de signe constant) que la série $\sum(u_{n+1}-u_n)$ converge. Ainsi, par la question 1., la suite (u_n) converge vers un réel γ. On a donc le DL $u_n = \gamma + o(1)$, c'est-à-dire
$$H_n = \ln(n)+\gamma+o(1) \sim \ln(n).$$

2. Si $\alpha > 0$, on obtient par le critère spécial des séries alternées que $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge (puisque la suite $n \mapsto 1/n^\alpha$ décroît vers 0).
Si $\alpha \leq 0$, alors $\left|\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right| = n^{|\alpha|} \geq 1$, donc $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ diverge grossièrement (son terme général ne tend pas vers 0).
Ainsi, la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 0$.

3. (a) Pour tout $n \geq 2$, on a $c_n = (-1)^n \sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k(n-k))^\alpha}$. Une étude rapide montre que la fonction polynôme $x \mapsto x(n-x)$ est maximale en $x = n/2$, d'où la minoration :
$$|c_n| \geq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{((n/2)(n-n/2))^\alpha} = (n-1)\times(4/n^2)^\alpha = \frac{4^\alpha(n-1)}{n^{2\alpha}}.$$
(puisque $\alpha > 0$).

   (b) Si $0 < \alpha \leq 1/2$, alors $\frac{4^\alpha(n-1)}{n^{2\alpha}} \sim 4^\alpha n^{1-2\alpha} \geq 4^\alpha$ (vu que $1-2\alpha \geq 0$), donc par la minoration précédente c_n ne tend pas vers 0. La série $\sum c_n$ est donc grossièrement divergente.

4. (a) On obtient facilement $\frac{1}{X(n-X)} = \frac{1/n}{X} + \frac{1/n}{n-X}$.

   (b) On en déduit pour tout $n \geq 2$:
$$c_n = (-1)^n \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k(n-k)} = \frac{(-1)^n}{n}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n-k}\right) = (-1)^n\frac{2H_{n-1}}{n}.$$

   (c) En posant $v_n = \frac{H_{n-1}}{n}$, on a :
$$\forall n \geq 2, \qquad v_{n+1}-v_n = \frac{H_n}{n+1}-\frac{H_{n-1}}{n} = \frac{1-H_{n-1}}{n(n+1)} \leq 0$$
(puisque $H_{n-1} \geq 1$ de par sa définition). Donc (v_n) est décroissante.

(d) $c_n = (-1)^n 2v_n$ avec $(2v_n)$ décroissante par la question précédente, et $2v_n = \frac{2H_{n-1}}{n} \sim \frac{2\ln(n-1)}{n} \to 0$, donc la série $\sum c_n$ converge par le critère spécial des séries alternées.

* * *

Exercice 2 : Etude d'un procédé de sommation

1. (a) Avec la formule du binôme, $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$, donc si $a_n = \alpha$, alors $a_n^* = \alpha$.

   (b) Puisque $\alpha \neq 0$, les deux séries $\sum a_n$ et $\sum a_n^*$ (qui sont égales) sont divergentes.

2. (a) Si $a_n = z^n$, alors toujours par la formule du binôme :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_n^* = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}z^k = \frac{(1+z)^n}{2^n} = \left(\frac{1+z}{2}\right)^n.$$

   (b) i. Si $|z| < 1$, alors la série géométrique $\sum a_n = \sum z^n$ converge par le cours et sa somme vaut $A(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \frac{1}{1-z}$.

   ii. Si $|z| < 1$, alors la série géométrique $\sum a_n^* = \sum \left(\frac{1+z}{2}\right)^n$ converge car $\left|\frac{1+z}{2}\right| \leq \frac{1+|z|}{2} < 1$. De plus, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n^* = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1+z}{2}\right)^n = \frac{1}{1-(1+z)/2} = \frac{2}{1-z} = 2A(z)$.

   (c) i. Si $|z| \geq 1$, alors la série géométrique $\sum a_n = \sum z^n$ diverge grossièrement.

   ii. Si $z = -2$, alors la série géométrique $\sum a_n^* = \sum (-1/2)^n$ converge car $|-1/2| < 1$.

   iii. Si $z = e^{i\theta}$ avec $0 < |\theta| < \pi$, alors la série géométrique $\sum a_n^* = \sum \left(\frac{1+e^{i\theta}}{2}\right)^n$ converge car $\left|\frac{1+e^{i\theta}}{2}\right| = \left|\frac{2\cos(\theta/2)}{2e^{-i\theta/2}}\right| = |\cos(\theta/2)|$ (en multipliant numérateur et dénominateur par $e^{-i\theta/2}$), et on a $|\cos(\theta/2)| < 1$ (vu que $\theta/2 \in]-\pi/2, \pi/2[\setminus\{0\}$).
   De plus, on a
$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^* = \frac{1}{1-\frac{1+e^{i\theta}}{2}} = \frac{2}{1-e^{i\theta}} = \frac{2(1-e^{-i\theta})}{|1-e^{i\theta}|^2} = \frac{2(1-\cos\theta)+2i\sin\theta}{(1-\cos\theta)^2+\sin^2(\theta)} = 1+i\left(\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\right),$$
   d'où les parties réelle et imaginaire demandées.

3. (a) i. Pour $k \in \mathbb{N}$ fixé, on a $\binom{n}{k} = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n^k}{k!}$.

   ii. Ainsi, pour $k \in \mathbb{N}$ fixé, on a $\dfrac{1}{2^n}\dbinom{n}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n^k}{2^n} \times \dfrac{1}{k!} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ par croissances comparées.

   (b) Pour $q \in \mathbb{N}$ fixé, la somme $S_q(n,a) = \sum_{k=0}^{q} a_k \left(\frac{1}{2^n}\binom{n}{k}\right)$ est une combinaison linéaire de q termes qui tendent vers 0 lorsque $n \to +\infty$, donc par opérations algébriques sur les limites, on en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} S_q(n,a) = 0$.
   Attention, le fait que le nombre de termes ne dépende pas de n est crucial !

   (c) On fixe $\varepsilon > 0$ et on va couper la somme a_n^* en deux : puisque $a_n \to 0$, il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k > q,\ |a_k| \leq \varepsilon$. On a donc pour tout $n > q$:
$$a_n^* = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k = S_q(n,a) + \frac{1}{2^n}\sum_{k=q+1}^{n}\binom{n}{k}a_k,$$
   et les termes de la deuxième somme vérifient $|a_k| \leq \varepsilon$. Donc pour tout $n > q$:
$$|a_n^*| \leq |S_q(n,a)| + \frac{\varepsilon}{2^n}\sum_{k=q+1}^{n}\binom{n}{k} \leq |S_q(n,a)| + \varepsilon$$
   (puisque $\sum\limits_{k=q+1}^{n}\binom{n}{k} \leq \sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$).
   Or, $S_q(n,a) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ donc il existe $n_1 \geq q$ tel que $\forall n \geq n_1$, $|S_q(n,a)| \leq 2\varepsilon$.
   Ainsi, on a $(n \geq n_1 \implies |a_n^*| \leq 2\varepsilon)$, ce qui montre que (a_n^*) converge vers 0.

(d) On se ramène à la question précédente par translation : la suite $b_n = a_n - \ell$ tend vers 0, donc b_n^* aussi. Or, $b_n^* = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(a_k - \ell) = a_n^* - \ell$ (encore la formule du binôme), donc $a_n^* - \ell \to 0$, c'est-à-dire $a_n^* \to \ell$.

(e) Non, il n'y a pas équivalence entre les convergences de (a_n) et (a_n^*) puisque d'après l'exemple des suites géométriques, la suite $a_n = (-2)^n$ diverge, mais la suite $a_n^* = (-1/2)^n$ converge.

4. (a) Un peu fastidieux :

$$U_0 = T_0 = a_0^* = a_0 = S_0,$$

$$U_1 = 2T_1 = 2(a_0^* + a_1^*) = 2\left(a_0 + \frac{1}{2}(a_0 + a_1)\right) = 2S_0 + S_1,$$

$$U_2 = 4T_2 = 4(a_0^* + a_1^* + a_2^*) = \cdots = S_2 + 3S_1 + 3S_0,$$

$$U_3 = 8T_3 = \cdots = S_3 + 4S_2 + 6S_2 + 4S_0.$$

(b) i. Conjecture : pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$U_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}S_k.$$

ii. Preuve par récurrence sur n :

- C'est vrai pour $n = 0$ d'après les calculs précédents.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $U_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}S_k$, alors

$$U_{n+1} = 2^{n+1}T_{n+1} = 2^{n+1}(T_n + a_{n+1}^*) = 2U_n + 2^{n+1}a_{n+1}^*,$$

donc par hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= 2\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}S_k + \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a_k \\ &= 2\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}S_k + \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}(S_k - S_{k-1}) = \\ &= S_{n+1} + \sum_{k=0}^{n}\left(\binom{n+1}{k+1} + \binom{n+1}{k}\right)S_k, \end{aligned}$$

et par la formule de Pascal $\binom{n+1}{k+1} + \binom{n+1}{k} = \binom{n+2}{k+1}$, on obtient :

$$U_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+2}{k+1}S_k,$$

ce qui montre que la formule est héréditaire.

(c) Exprimons les sommes partielles T_n : on a d'après ce qui précède et la convention $S_{-1} = 0$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad T_n = \frac{1}{2^n}\sum_{k=-1}^{n}\binom{n+1}{k+1}S_k = \frac{2}{2^{n+1}}\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}S_{k-1}.$$

En posant alors $\tilde{S}_k = S_{k-1}$, on remarque que

$$T_n = 2\tilde{S}_{n+1}^*.$$

Si la série $\sum a_n$ converge, alors $S_n \to \ell \in \mathbb{R}$, donc d'après la question 3.(d) appliquée à (S_n) au lieu de (a_n), on a $S_n^* \to \ell$. On déduit des calculs précédents que $T_n \to 2\ell$, ce qui montre que la série $\sum a_n^*$ converge et que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^* = 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

(d) Non, il n'y a pas équivalence entre les convergences de $\sum a_n$ et $\sum a_n^*$ puisque d'après l'exemple des suites géométriques, la série $\sum a_n = \sum(-2)^n$ diverge, mais la série $\sum a_n^* = \sum(-1/2)^n$ converge.

* * *

Exercice 3 : VRAI / FAUX sur l'algèbre linéaire

1. **FAUX** : l'application $u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x \end{array} \right.$ est linéaire, surjective (tout réel t a pour antécédent $(t,0)$) mais non injective ($u(1,1) = u(1,0) = 1$), donc non bijective.
2. **VRAI** : si $Ker(u) = \{0_E\}$, alors pour tout $(x,y) \in E^2$
$$u(x) = u(y) \iff u(x-y) = 0_F \iff x - y \in Ker(u) = \{0_E\} \iff x = y$$
donc u est injective.
3. **VRAI** : on a $0_E \in Ker(u)$ (car $u(0_E) = 0_F$), et si x, y sont dans $Ker(u)$, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$,
$$u(\lambda x + y) = \lambda u(x) + u(y) = \lambda 0_F + 0_F = 0_F,$$
donc $\lambda x + y$ est dans $Ker(u)$. Ceci montre que $Ker(u)$ est un SEV de E.
4. **VRAI** : si $(e_1, \cdots, e_n)$ engendre E, alors pour tout $y \in Im(u)$, il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$. En décomposant x sur la famille génératrice $(e_1, \cdots, e_n)$, on obtient l'existence de scalaires $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ tels que $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$, donc par linéarité de u :
$$y = \sum_{i=1}^n \alpha_i u(e_i),$$
ce qui montre que la famille $(u(e_1), \cdots, u(e_n))$ est génératrice de $Im(u)$.
5. **VRAI** : si $(e_1, \cdots, e_n)$ est une base de E, alors d'après la question précédente, $(u(e_1), \cdots, u(e_n))$ est génératrice de $Im(u)$ et de cardinal n, donc $\dim(Im(u)) \leq n$, c'est-à-dire $rg(u) \leq \dim(E)$.
6. **VRAI** : $Im(u)$ est un SEV de F, donc si $rg(u) = \dim(F)$, on obtient $Im(u) = F$ par inclusion et égalité des dimensions, ce qui signifie que u est surjective.

* * *

Exercice 4 : Endomorphismes nilpotents d'ordre n

1. (a)
   - Pour $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, on a
$$(a,b,c) \in Ker(f) \iff \left\{ \begin{array}{l} 4a + 4b + 2c = 0 \\ -4a - 2b + c = 0 \\ 2a - 2c = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} c = a \\ b = -(3/2)a \end{array} \right. ,$$
ce qui montre que $Ker(f) = Vect((2,-3,2))$.
Le vecteur $(2,-3,2)$ forme donc une base de $Ker(f)$ (qui est donc de dimension 1).
   - Par le théorème du rang, on en déduit que $\dim(Im(f)) = 2$, c'est donc un hyperplan de $\mathbb{R}^3$. Pour en déterminer une équation cartésienne, on étudie le système :
$$f(a,b,c) = (x,y,z) \iff \left\{ \begin{array}{l} 4a + 4b + 2c = x \\ -4a - 2b + c = y \\ 2a - 2c = z \end{array} \right. \underset{L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2}{\iff} \left\{ \begin{array}{l} -4a + 4c = x + 2y \\ -4a - 2b + c = y \\ 2a - 2c = z \end{array} \right.$$
$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 + 2L_3}{\iff} \left\{ \begin{array}{l} 0 = x + 2y + 2z \\ b = -(3/2)c - z - y/2 \\ a = c + z/2 \end{array} \right. .$$
Ce système est compatible ssi $x + 2y + 2z = 0$, ce qui prouve que $Im(f)$ est le plan d'équation cartésienne $x + 2y + 2z = 0$.
Enfin :
$$x + 2y + 2z = 0 \iff (x,y,z) = (-2y - 2z, y, z) = y(-2,1,0) + z(-2,0,1),$$
donc la famille $((-2,1,0),(-2,0,1))$ forme une base de $Im(f)$.

Remarque
On aurait pu aussi dire que les vecteurs $f(1,0,0) = (4,-4,2)$ et $f(0,1,0) = (4,-2,0)$ sont dans l'image, et sont non colinéaires, donc ils forment une famille libre de $Im(f)$. Vu qu'on sait par le théorème du rang que $\dim(Im(f)) = 2$, on a donc une base de $Im(f)$, mais cette méthode ne donne pas une équation cartésienne (demandée ici).

(b) En composant, on obtient pour tout $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$:

$$f^2(a,b,c) = f(4a+4b+2c, -4a-2b+c, 2a-2c) = (4a+8b+8c, -6a-12b-12c, 4a+8b+8c),$$

c'est-à-dire
$$f^2(a,b,c) = (2a+4b+4c) \times (2,-3,2).$$
En composant de nouveau on obtient

$$f^3(a,b,c) = (2a+4b+4c) \times f(2,-3,2) = (0,0,0),$$

puisque $(2,-3,2) \in Ker(f)$.
On en conclut que l'endomorphisme f vérifie les relations $(*)$ (c'est-à-dire $f^2 \neq 0$ et $f^3 = 0$).

(c) Vu l'expression de f^2, on obtient facilement que $Ker(f^2)$ est le plan d'équation cartésienne $a+2b+2c = 0$, dont une base est $((-2,1,0),(-2,0,1))$, et $Im(f^2) = Vect((2,-3,2))$.

(d) On constate que $Ker(f^2) = Im(f)$ et $Im(f^2) = Ker(f)$.

2. (a) Par hypothèse, f^{n-1} n'est pas l'endomorphisme nul, donc il existe au moins un vecteur $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $f^{n-1}(x_0) \neq 0$.

(b) Montrons que la famille $(f^{n-1}(x_0), f^{n-2}(x_0), \cdots, f(x_0), x_0)$ est libre : si $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k(x_0) = 0$, alors en composant par f^{n-1}, on obtient puisque $f^k = 0$ pour $k \geq n$:

$$\lambda_0 \underbrace{f^{n-1}(x_0)}_{\neq 0} = f^{n-1}(0) = 0,$$

donc $\lambda_0 = 0$. En reportant dans l'égalité initiale on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k f^k(x_0) = 0$, et il suffit d'itérer la méthode, en composant par f^{n-2}, etc. On obtient ainsi $\lambda_k = 0$ pour tout $0 \leq k \leq n-1$. Ainsi, la famille $(f^{n-1}(x_0), f^{n-2}(x_0), \cdots, f(x_0), x_0)$ est une base de $\mathbb{R}^n$ (en tant que famille libre de cardinal n).

3. Fixons $k \in [\![1,n]\!]$.

(a) En tant que sous-famille d'une famille libre, la famille $(f^{n-1}(x_0), \cdots, f^{n-k}(x_0))$ est libre, et elle engendre F_k par hypothèse, donc c'est une base de F_k. On en déduit que $\dim(F_k) = k$.

(b) Soit $x \in \mathbb{R}^n$, que l'on décompose dans la base $(f^{n-1}(x_0), f^{n-2}(x_0), \cdots, f(x_0), x_0)$:

$$x = \sum_{j=1}^{n} x_j f^{n-j}(x_0), \qquad x_j \in \mathbb{R}.$$

On a par linéarité et par le fait que $f^p = 0$ pour $p \geq n$:

$$x \in Ker(f^k) \iff \sum_{j=k+1}^{n} x_j f^{n+k-j}(x_0) = 0 \iff x_{k+1} = \cdots = x_n = 0,$$

la dernière équivalence résultant du fait que $(f^{n-1}(x_0), \cdots, f^k(x_0))$ est libre (comme sous-famille d'une famille libre). Ainsi :

$$Ker(f^k) = \{x \in \mathbb{R}^n,\ x_{k+1} = \cdots = x_n = 0\} = Vect(f^{n-1}(x_0), \cdots, f^{n-k}(x_0)) = F_k.$$

En outre, $0 = f^n = f^k \circ f^{n-k}$, donc $Im(f^{n-k}) \subset Ker(f^k)$, et l'inclusion réciproque est vraie car les vecteurs $f^{n-1}(x_0), \cdots, f^{n-k}(x_0)$ (qui engendrent $Ker(f^k)$) sont tous dans $Im(f^{n-k})$ puisque $k \geq 1$. Donc $F_k = Ker(f^k) = Im(f^{n-k})$.

(c) Soit $x \in F_k = Ker(f^k)$. On a $f^k(x) = 0$, donc

$$f^k(f(x)) = f^{k+1}(x) = f(f^k(x)) = f(0) = 0,$$

ce qui montre que $f(x) \in Ker(f^k) = F_k$. Ainsi ($x \in F_k \implies f(x) \in F_k$) donc F_k est stable par f.

4. (a) L'application $g : \left\{ \begin{array}{ccc} H & \longrightarrow & H \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right.$ est bien définie car si $x \in H \subset \mathbb{R}^n$, on a par hypothèse de stabilité que $f(x) \in H$. Or, en tant que restriction d'une application linéaire, g est également linéaire, donc g est bien un endomorphisme du sous-espace H.

(b) L'ensemble $X = \{j \in \mathbb{N},\ g^j = 0_{\mathcal{L}(H)}\}$ est non vide. En effet, $\forall x \in H,\ g^n(x) = f^n(x) = 0$ (puisque $f^n = 0$) donc $g^n = 0_{\mathcal{L}(H)}$, c'est-à-dire $n \in X$. Une partie non vide de $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément, notons donc $p = \min(X)$. Puisque $p \in X$, on a $p \geq 1$ ($0 \notin X$ étant donné que $g^0 = Id_H \neq 0_{\mathcal{L}(H)}$ vu que $H \neq \{0\}$), $g^p = 0_{\mathcal{L}(H)}$ mais aussi $g^{p-1} \neq 0_{\mathcal{L}(H)}$ (par minimalité de p dans X).

(c) Exactement comme à la question 2.(b), la famille $(x_1, g(x_1), \cdots, g^{p-1}(x_1))$ est libre, et de cardinal p, et c'est une famille de vecteurs de H (puisque $x_1 \in H$ et $g(H) \subset H$), donc $\dim(H) \geq p$, c'est-à-dire $p \leq k$.
On en déduit $g^k = g^p \circ g^{k-p} = 0_{\mathcal{L}(H)} \circ g^{k-p} = 0_{\mathcal{L}(H)}$.

(d) On a $g^k = 0_{\mathcal{L}(H)}$, c'est-à-dire que $\forall x \in H,\ f^k(x) = g^k(x) = 0$, donc $H \subset Ker(f^k) = F_k$. Enfin, $\dim(H) = k = \dim(F_k)$, donc par inclusion et égalité des dimensions, on conclut que $H = F_k = Ker(f^k)$.

(e) Les questions précédentes montrent que hormis $\{0\}$ et $\mathbb{R}^n$, les seuls sous-espaces stables par f possibles sont les $Ker(f^k)$ avec $1 \leq k \leq n-1$. Or, ces SEV sont tous stables par f (cf. 3.(c)), donc on conclut que les SEV stables par f sont

$$\{0\}, Ker(f), \cdots, Ker(f^{n-1}), \mathbb{R}^n.$$

Remarque
On montre facilement que ces SEV forment une suite strictement croissante au sens de l'inclusion.

5. (a) Le vecteur $h(x_0) \in \mathbb{R}^n$ se décompose de façon unique sur la base $(f^{n-1}(x_0), \cdots, f(x_0), x_0)$, donc il existe un unique n-uplet $(a_0, \cdots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$h(x_0) = a_0 x_0 + a_1 f(x_0) + \cdots + a_{n-1} f^{n-1}(x_0).$$

(b) i. Puisque $h \circ f = f \circ h$, on obtient par récurrence triviale que $\forall i \in \mathbb{N},\ h \circ f^i = f^i \circ h$. On en déduit

$$\forall i \in \mathbb{N}, \qquad h(f^i(x_0)) = f^i(h(x_0)).$$

Or d'après la question précédente,

$$h(x_0) = (a_0 Id + a_1 f + \cdots + a_{n-1} f^{n-1})(x_0) = \varphi(x_0),$$

donc

$$\forall i \in \mathbb{N}, \qquad h(f^i(x_0)) = f^i(\varphi(x_0)).$$

Enfin, en tant que polynôme en f, φ commute aussi avec f^i, donc

$$\forall i \in \mathbb{N}, \qquad h(f^i(x_0)) = \varphi(f^i(x_0))).$$

ii. La famille $(f^i(x_0))_{0 \leq i \leq n-1}$ est une base de $\mathbb{R}^n$, et d'après la question précédente, les endomorphismes h et φ coïncident sur cette base, donc ils sont égaux : $h = \varphi$.

(c) i. Clairement $0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)} \in Comm(f)$ car $0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)} \circ f = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)} = f \circ 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)}$.
De plus, si h_1 et h_2 sont dans $Comm(f)$, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda h_1 + h_2$ est dans $Comm(f)$ étant donné que

$$(\lambda h_1 + h_2) \circ f = \lambda(h_1 \circ f) + h_2 \circ f = \lambda(f \circ h_1) + f \circ h_2 = f \circ (\lambda h_1 + h_2).$$

Donc $Comm(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.

ii. La question 5.(b) montre que $Comm(f) \subset Vect(Id, f, \cdots, f^{n-1})$.
L'inclusion réciproque est vraie car tout polynôme en f commute avec f. Ainsi :

$$Comm(f) = Vect(Id, f, \cdots, f^{n-1}).$$

En outre, la famille $(Id, f, \cdots, f^{n-1})$ est libre dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ car

$$\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i f^i = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)} \implies \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i f^i(x_0) = 0_{\mathbb{R}^n} \implies \lambda_0 = \cdots = \lambda_{n-1} = 0$$

(puisque la famille $(f^i(x_0))_{0 \leq i \leq n-1}$ est libre).
Ainsi, $(Id, f, \cdots, f^{n-1})$ forme une base de $Comm(f)$, qui est donc de dimension n.