

DS01 du 14/09/2024 (4h)

Le sujet se compose de 4 exercices indépendants.
Calculatrice interdite.

* * *

Exercice 1 :

Les 4 questions de cet exercice sont indépendantes

1. En justifiant soigneusement, déterminer la nature (convergente ou divergente) des séries numériques suivantes :

(a) $\sum_{n \geq 2} u_n$ avec $u_n = \frac{1}{\sqrt{n} \ln(n)}$;

(b) $\sum_{n \geq 1} u_n$ avec $u_n = \frac{\ln(n)}{n^{3/2}}$;

(c) $\sum_{n \geq 0} u_n$ avec $u_n = \frac{1}{\binom{2n}{n}}$.

2. (a) Énoncer le théorème de sommation des relations de comparaison, cas convergent.

(b) Déterminer un équivalent simple du reste $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3 + k}$ lorsque $n \rightarrow +\infty$, après avoir justifié son existence.

3. On considère la famille suivante, indexée par $\mathbb{Z}$:

$$(u_n)_{n \in \mathbb{Z}} = (r^{|n|} e^{in\theta})_{n \in \mathbb{Z}},$$

où $r \in \mathbb{R}^+$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

(a) Déterminer les couples $(r, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ pour lesquels $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est sommable.

(b) Pour ces couples, calculer $S = \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n$.

4. On considère la suite récurrente définie par

$$u_0 = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n^2}.$$

(a) Montrer que (u_n) est bien définie et qu'elle converge vers 0.

(b) Déterminer un réel α tel que $u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha$ possède une limite finie non nulle lorsque $n \rightarrow +\infty$.

(c) En déduire un équivalent simple de u_n^α puis de u_n lorsque $n \rightarrow +\infty$.

* * *

Exercice 2 :

Soit un entier $d \geq 2$. Soit $(\omega_n)_{n \geq 1}$ une suite de nombres complexes, périodique de période d , c'est-à-dire telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \omega_{n+d} = \omega_n.$$

Dans ce problème, on s'intéresse à la nature (convergente ou divergente) de la série $\sum_{n \geq 1} u_n(\lambda)$ de terme général

$$\forall n \geq 1, \quad u_n(\lambda) = \frac{\omega_n + \lambda}{n},$$

où λ est un nombre complexe. On note plus simplement $u_n = u_n(0)$ pour tout $n \geq 1$.

1. Supposons, dans cette question uniquement, qu'il existe un complexe λ tel que $\sum_{n \geq 1} u_n(\lambda)$ converge.

Montrer que pour toute valeur $\mu \neq \lambda$, la série $\sum_{n \geq 1} u_n(\mu)$ diverge.

2. Dans cette question, on choisit $\lambda = 0$.

Pour tout entier naturel n non nul, on note S_n la somme partielle associée à la série $\sum u_n$, c'est-à-dire

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^n \frac{\omega_k}{k}.$$

- (a) Pour tout entier naturel m , exprimer $\frac{1}{md+1} \sum_{k=1}^d \omega_{md+k}$ en fonction de $\Omega = \sum_{k=1}^d \omega_k$.

- (b) Montrer qu'il existe un réel α (dépendant de d mais pas de m) tel que

$$S_{(m+1)d} - S_{md} = \frac{1}{md+1} \sum_{k=1}^d \omega_{md+k} + \frac{\alpha}{m^2} + o_{m \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{m^2} \right).$$

- (c) En déduire une condition nécessaire et suffisante sur Ω pour que la série $\sum_{m \geq 1} (S_{(m+1)d} - S_{md})$ converge.

- (d) Montrer *très soigneusement* que la condition obtenue à la question précédente est une condition nécessaire et suffisante pour que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge.

3. Montrer qu'il existe une unique valeur $\lambda \in \mathbb{C}$ telle que la série $\sum_{n \geq 1} u_n(\lambda)$ converge.

4. **Une généralisation** : Dans cette question, on se donne une suite croissante $(a_n)_{n \geq 1}$ de réels telle que $a_1 > 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$. On suppose que $\Omega = 0$. On pose, pour $n \geq 1$:

$$u_n = \frac{\omega_n}{a_n} \quad \text{et} \quad T_n = \sum_{k=1}^n \omega_k.$$

Par souci de commodité, on note également $T_0 = 0$.

- (a) Montrer que la suite $(T_n)_{n \geq 1}$ est bornée.

- (b) Montrer que pour tout entier naturel n non nul,

$$\sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^n T_k \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}} \right) + \frac{T_n}{a_{n+1}}.$$

- (c) Montrer que la série $\sum_{k \geq 1} T_k \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}} \right)$ converge.

- (d) Montrer que la série $\sum_{k \geq 1} u_k$ converge.

* * *

Exercice 3 : "Vrai ou Faux ?" AVEC justification

Attention ! Seules les justifications rapportent des points.

Soit E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie et $u : E \rightarrow F$ une application linéaire.

Pour chacune des assertions suivantes, on indiquera si elle est vraie ou fausse, **et on justifiera soigneusement** en faisant une démonstration si l'assertion est vraie ou en donnant un contre-exemple si elle est fausse.

1. Si u est injective, alors u est surjective.
2. Si $\text{Ker}(u) = \{0_E\}$, alors u est injective.
3. Si u est injective, alors $\text{Ker}(u) = \{0_E\}$.
4. $\text{Im}(u)$ est un sous-espace vectoriel de F .
5. Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille libre de E , alors $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est une famille libre de F .
6. Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E , alors $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est génératrice de $\text{Im}(u)$.
7. Si $\text{rg}(u) = \dim(E)$, alors u est injective.
8. Si $\text{rg}(u) = \dim(E)$, alors u est surjective.

* * *

Exercice 4 :

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{B} = (a, b, c)$ une base de E .

Partie I

Soit $u : E \rightarrow E$ un endomorphisme de E .

Pour tout entier naturel k , on notera $u^k = u \circ \dots \circ u$ (k fois) avec la convention $u^0 = \text{Id}_E$.

1. Soient i et j deux entiers naturels. On considère l'application

$$w : \begin{cases} \text{Ker}(u^{i+j}) & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & w(x) = u^j(x) \end{cases} .$$

- (a) Justifier que w est une application linéaire et que $\text{Im}(w) \subset \text{Ker}(u^i)$.
- (b) Énoncer le théorème du rang. En déduire que

$$\dim(\text{Ker}(u^{i+j})) \leq \dim(\text{Ker}(u^i)) + \dim(\text{Ker}(u^j)).$$

2. On suppose dans cette question que $u^3 = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et que $\text{rg}(u) = 2$.
 - (a) En utilisant le résultat de la question **1b**, montrer que $\dim(\text{Ker}(u^2)) = 2$.
 - (b) En déduire qu'il existe un vecteur $e \in E$ tel que $u^2(e) \neq 0_E$, puis prouver que la famille $\mathcal{B}' = (e, u(e), u^2(e))$ est une base de E .
 - (c) Écrire la matrice de u dans cette base $\mathcal{B}'$.
3. On suppose dans cette question que $u^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et que $\text{rg}(u) = 1$.
 - (a) Justifier que l'on peut trouver un vecteur $e \in E$ tel que $u(e) \neq 0_E$, et un vecteur $f \in \text{Ker}(u)$ tel que la famille $(u(e), f)$ soit libre, puis prouver que la famille $\mathcal{B}'' = (e, u(e), f)$ est une base de E .
 - (b) Écrire la matrice de u dans cette base $\mathcal{B}''$.

Partie II

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice semblable à une matrice $T = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, avec $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$.

On se propose de prouver que A est alors semblable à son inverse A^{-1} (on rappelle que " $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ semblable à $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ " signifie qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$).

4. On pose $N = T - I_3$ et $M = N^2 - N$.

Expliciter les matrices N et M et vérifier que $N^3 = M^3 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$, puis que $rg(N) = rg(M)$.

Quelles sont les valeurs possibles de $rg(N)$?

5. On suppose dans cette question que $rg(N) = 2$.

En utilisant la question **2c**, prouver que les matrices N et M sont semblables.

On introduira les endomorphismes u et v de E ayant pour matrices respectives N et M dans la base $\mathcal{B}$.

6. (a) On suppose dans cette question que $rg(N) = 1$.

Montrer que $N^2 = M^2 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$.

En utilisant la question **3b**, prouver que les matrices N et M sont encore semblables.

- (b) Prouver que ce résultat est encore vrai lorsque $rg(N) = 0$.

7. Montrer que T est inversible et que $T^{-1} = I_3 + M$.

8. Conclure que la matrice A est inversible et que A est semblable à A^{-1} .

9. Réciproquement, toute matrice A inversible semblable à son inverse est-elle nécessairement semblable à une matrice de la forme T ? (on pourra par exemple s'intéresser à la trace de A , ou à son déterminant)

10. Un exemple

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $u : E \rightarrow E$ l'endomorphisme ayant pour matrice A dans la base $\mathcal{B}$.

- (a) Montrer que $\text{Ker}(u - \text{Id}_E)$ est un sous-espace vectoriel de E de dimension 2 dont on donnera une base (e_1, e_2) .

- (b) Justifier que la famille (e_1, e_2, c) est une base de E , et écrire la matrice de u dans cette base.

- (c) Montrer que les matrices A et A^{-1} sont semblables.

* * *