DS01 du 09/09/2025 (4h)

Le sujet se compose de 4 exercices indépendants.
Calculatrice interdite.

* * *

Exercice 1 : Etude d'une série produit

Si $\sum_{n \geq 1} a_n$ et $\sum_{n \geq 1} b_n$ sont deux séries convergentes, on appelle **série produit** de $\sum_{n \geq 1} a_n$ par $\sum_{n \geq 1} b_n$ la série $\sum_{n \geq 2} c_n$, où $c_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k}$.

Le but de cet exercice est d'étudier la nature de la série produit de $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ par elle-même.

1. *Equivalent de la série harmonique*

Pour $n \geq 1$, on pose $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$, cela définit la série harmonique.

(a) Montrer qu'une suite réelle $(u_n)_{n \geq 1}$ converge si et seulement si la série $\sum_{n \geq 1} (u_{n+1} - u_n)$ converge.

(b) On pose $u_n = H_n - \ln(n)$. Déterminer un équivalent simple de $u_{n+1} - u_n$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

(c) En déduire la nature de la suite (u_n) et enfin un équivalent simple de H_n lorsque $n \rightarrow +\infty$.

2. Pour quelles valeurs réelles de α la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge-t-elle ?

On choisit désormais α de la sorte et on étudie la série produit de $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ par elle-même,

notée $\sum_{n \geq 2} c_n$.

3. (a) Montrer que $\forall n \geq 2, |c_n| \geq \frac{4^\alpha(n-1)}{n^{2\alpha}}$.

(b) Conclure que pour $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$, la série $\sum_{n \geq 2} c_n$ diverge.

4. Désormais, on suppose $\alpha = 1$.

(a) Pour $n \geq 2$, décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\frac{1}{X(n-X)}$.

(b) En déduire une expression de c_n en fonction de $\frac{H_{n-1}}{n}$ pour tout $n \geq 2$.

(c) Déterminer la monotonie de la suite $\left(\frac{H_{n-1}}{n}\right)_{n \geq 2}$.

(d) En déduire la nature de la série $\sum_{n \geq 2} c_n$.

* * *

Exercice 2 : Etude d'un procédé de sommation

Toute application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{C}$ étant une suite complexe, si a est une telle suite, on utilise la notation usuelle $a(n) = a_n$.

A toute suite complexe a , on associe la suite a^* définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n^* = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k.$$

L'objet de ce problème est de comparer les propriétés de la série $\sum_{n \geq 0} a_n^*$ aux propriétés de la série $\sum_{n \geq 0} a_n$.

Première partie : deux exemples

1. Cas d'une suite constante

Soit $\alpha \in \mathbb{C}^*$. On suppose que la suite a est définie par $a_n = \alpha$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- (a) Expliciter a_n^* pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- (b) La série $\sum_{n \geq 0} a_n$ (resp. $\sum_{n \geq 0} a_n^*$) est-elle convergente ?

2. Cas d'une suite géométrique

Soit $z \in \mathbb{C}$. On suppose que la suite a est définie par $a_n = z^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- (a) Exprimer a_n^* en fonction de z et n .
- (b) On suppose que $|z| < 1$.
 - i. Justifier la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} a_n$ et expliciter sa somme $A(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.
 - ii. Justifier la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} a_n^*$ et expliciter sa somme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^*$ en fonction de $A(z)$.
- (c) On suppose que $|z| \geq 1$.
 - i. Quelle est la nature de la série $\sum_{n \geq 0} a_n$?
 - ii. Quelle est la nature de la série $\sum_{n \geq 0} a_n^*$ si $z = -2$?
 - iii. On suppose que $z = e^{i\theta}$ avec θ réel tel que $0 < |\theta| < \pi$.
Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} a_n^*$ est convergente.

Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^*$.

Seconde partie : étude du procédé de sommation

Dans cette partie, et pour simplifier, on suppose que la suite a est à valeurs réelles, la suite a^* étant toujours définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n^* = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k.$$

3. Comparaison des convergences des deux suites

- (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère un entier k fixé, $k \in [0, n]$.
 - i. Préciser un équivalent de $\binom{n}{k}$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.
 - ii. En déduire la limite de $\frac{1}{2^n} \binom{n}{k}$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

(b) Soient a une suite réelle et q un entier naturel **fixé**. On considère pour $n > q$ la somme :

$$S_q(n, a) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^q \binom{n}{k} a_k.$$

Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_q(n, a)$.

(c) On suppose que $a_n \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. Montrer que $a_n^* \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

(d) On suppose que $a_n \rightarrow \ell \in \mathbb{R}$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. Quelle est la limite de a_n^* lorsque $n \rightarrow +\infty$?

(e) La convergence de la suite (a_n) est-elle équivalente à la convergence de la suite (a_n^*) ?

4. Comparaison des convergences des deux séries

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$, $T_n = \sum_{k=0}^n a_k^*$, $U_n = 2^n T_n$.

(a) Pour $n \in [0, 3]$, exprimer U_n comme combinaison linéaire des sommes S_k , c'est-à-dire sous la forme $U_n = \sum_{k=0}^n \lambda_{n,k} S_k$.

(b) On se propose de déterminer l'expression explicite de U_n comme combinaison linéaire des sommes S_k pour $k \in [0, n]$:

$$(\mathcal{E}) \quad U_n = \sum_{k=0}^n \lambda_{n,k} S_k.$$

i. A quelle expression des coefficients $\lambda_{n,k}$ (en fonction de n et k) peut-on s'attendre compte tenu des résultats obtenus à la question précédente ?

ii. Etablir la formule $(\mathcal{E})$ par récurrence sur l'entier $n \in \mathbb{N}$ (en précisant la valeur des $\lambda_{n,k}$). On pourra remarquer que $a_k = S_k - S_{k-1}$ avec la convention $S_{-1} = 0$.

(c) On suppose que la série $\sum_{n \geq 0} a_n$ est convergente. Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} a_n^*$ est convergente et exprimer la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^*$ en fonction de la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

(d) La convergence de la série $\sum_{n \geq 0} a_n$ est-elle équivalente à la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} a_n^*$?

* * *

Exercice 3 : VRAI / FAUX sur l'algèbre linéaire

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Soit E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie et $u : E \rightarrow F$ une application linéaire.

Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

IMPORTANT :

Chaque réponse doit être justifiée (par une preuve si "VRAI" ou un contre-ex si "FAUX").

Une réponse non justifiée, même si elle est correcte, ne rapportera aucun point.

1. Si u est surjective, alors u est bijective.
2. Si $\text{Ker}(u) = \{0_E\}$, alors u est injective.
3. $\text{Ker}(u)$ est un sous-espace vectoriel de E .
4. Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille génératrice de E , alors la famille $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est génératrice de $\text{Im}(u)$.
5. On a $\text{rg}(u) \leq \dim(E)$.
6. Si $\text{rg}(u) = \dim(F)$, alors u est surjective.

* * *

Exercice 4 : Endomorphismes nilpotents d'ordre n

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Si f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, alors pour $k \in \mathbb{N}$, on définit f^k par récurrence :

$$f^0 = \text{Id}_{\mathbb{R}^n}, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad f^{k+1} = f \circ f^k.$$

On s'intéresse aux endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ vérifiant :

$$f^{n-1} \neq 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)} \quad \text{et} \quad f^n = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)} \quad (*).$$

1. *Etude d'un exemple*

On considère l'endomorphisme $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ défini par :

$$\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, \quad f \left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 4a + 4b + 2c \\ -4a - 2b + c \\ 2a - 2c \end{pmatrix}.$$

- (a) Déterminer $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$.
On donnera une base de chacun de ces espaces et, si parmi ces espaces, il y a un hyperplan de $\mathbb{R}^3$, on donnera également une équation cartésienne de cet hyperplan.
- (b) Exprimer les endomorphismes f^2 et f^3 . Que peut-on en conclure ?
- (c) Déterminer $\text{Ker}(f^2)$ et $\text{Im}(f^2)$.
On donnera une base de chacun de ces espaces et, si parmi ces espaces, il y a un hyperplan de $\mathbb{R}^3$, on donnera également une équation cartésienne de cet hyperplan.
- (d) Comparer les espaces trouvés en 1.(a) et 1.(c).

Retour au cas général.

On considère un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ vérifiant les relations (*).

2. (a) Justifier qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $f^{n-1}(x_0) \neq 0_{\mathbb{R}^n}$. On fixe un tel x_0 .
(b) Montrer que la famille $(f^{n-1}(x_0), f^{n-2}(x_0), \dots, f(x_0), x_0)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.
3. Pour $k \in [1, n]$, on note F_k le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ engendré par $(f^{n-1}(x_0), \dots, f^{n-k}(x_0))$.
(a) Déterminer la dimension de F_k .

- (b) Montrer que $F_k = \text{Im}(f^{n-k}) = \text{Ker}(f^k)$.
- (c) Montrer que F_k est stable par f , c'est-à-dire $f(F_k) \subset F_k$.
4. Soit H un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ stable par f (c'est-à-dire $f(H) \subset H$).
On suppose que $\dim(H) = k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$.
On note $g : \begin{cases} H & \longrightarrow & H \\ x & \longmapsto & f(x) \end{cases}$ l'application obtenue par restriction et corestriction de l'application $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ au sous-espace H .
- (a) Justifier que g est bien définie et que c'est un endomorphisme de H .
On dit que g est l'endomorphisme induit par f sur H .
- (b) Montrer qu'il existe un entier $p \geq 1$ tel que $g^{p-1} \neq 0_{\mathcal{L}(H)}$ et $g^p = 0_{\mathcal{L}(H)}$.
- (c) Soit $x_1 \in H$ tel que $g^{p-1}(x_1) \neq 0_{\mathbb{R}^n}$. Que peut-on dire de la famille $(x_1, g(x_1), \dots, g^{p-1}(x_1))$?
En déduire que $g^k = 0_{\mathcal{L}(H)}$.
- (d) Montrer que $H = \text{Ker}(f^k)$.
- (e) Déterminer tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ stables par f .
5. On veut trouver tous les endomorphismes $h \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ qui commutent avec f , c'est-à-dire tels que $f \circ h = h \circ f$.
- (a) Soit h un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe une unique famille de réels $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ tels que $h(x_0) = a_0x_0 + a_1f(x_0) + \dots + a_{n-1}f^{n-1}(x_0)$.
- (b) On suppose que h et f commutent.
Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ défini par :

$$\varphi = a_0Id + a_1f + \dots + a_{n-1}f^{n-1}.$$

- i. Montrer que $\forall i \in \mathbb{N}$, $h(f^i(x_0)) = \varphi(f^i(x_0))$.
- ii. En déduire que $h = \varphi$.
- (c) On note $\text{Comm}(f)$ l'ensemble des endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ qui commutent avec f , c'est-à-dire :

$$\text{Comm}(f) = \{h \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n), f \circ h = h \circ f\}.$$

- i. Montrer que $\text{Comm}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.
- ii. Déterminer la dimension de $\text{Comm}(f)$.

* * *