Corrigé du DS01 du 16/09/2023 (4h)

Exercice 1 : Une série à paramètres

Remarque
La suite $(v_n) = (\ln(n^\gamma u_n))_{n\geq 1}$ *est bien définie pour tout réel* γ *car* $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ *par récurrence triviale, donc* $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n^\gamma u_n > 0$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$v_{n+1} - v_n = \ln\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^\gamma \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \gamma \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(\frac{n+a}{n+b}\right),$$

donc

$$v_{n+1} - v_n = \gamma\left(\frac{1}{n} + O(1/n^2)\right) + \ln\left(1+\frac{a}{n}\right) - \ln\left(1+\frac{b}{n}\right) = \frac{\gamma+a-b}{n} + O(1/n^2).$$

Deux cas se présentent alors :

- Si $\gamma + a - b \neq 0$, alors $v_{n+1} - v_n \sim \frac{\gamma+a-b}{n}$ (de signe constant) donc $\sum(v_{n+1} - v_n)$ diverge par le critère des équivalents.
- Si $\gamma + a - b = 0$, alors $v_{n+1} - v_n = O(1/n^2)$, donc $\sum(v_{n+1} - v_n)$ converge (car elle est absolument convergente).

En conclusion, $\sum(v_{n+1} - v_n)$ converge si et seulement si $\gamma = b - a$.

2. Pour $\gamma = b - a$, la série téléscopique $\sum(v_{n+1} - v_n)$ converge, donc la suite $(v_n) = (\ln(n^{b-a} u_n))$ converge vers un réel ℓ. Donc $n^{b-a} u_n \to \lambda = e^\ell > 0$ (car exp est continue), ce qui montre que $u_n \sim \frac{\lambda}{n^{b-a}}$.

3. Puisque $\frac{\lambda}{n^{b-a}} > 0$, on peut encore utiliser le critère des équivalents. Donc $\sum u_n$ converge si et seulement si $b - a > 1$.

4. Supposons donc $b - a > 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$(n+b)u_{n+1} = (n+a)u_n,$$

donc en sommant, on obtient pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n=0}^{N} (n+b)u_{n+1} = \sum_{n=0}^{N} (n+a)u_n,$$

ce qui se réécrit par changement d'indice :

$$\sum_{n=1}^{N+1} (n+b-1)u_n = \sum_{n=0}^{N} (n+a)u_n,$$

c'est-à-dire

$$\sum_{n=1}^{N} (b-a-1)u_n + (N+b)u_{N+1} = au_0$$

(puisque les termes nu_n se sont téléscopés pour $n \in [\![1, N]\!]$). Il reste à passer à la limite lorsque $N \to +\infty$: on a

$$(N+b)u_{N+1} \sim \frac{(N+b)\lambda}{(N+1)^{b-a}} \sim \frac{\lambda}{N^{b-a-1}} \to 0,$$

donc
$$\sum_{n=1}^{+\infty}(b-a-1)u_n = au_0 = a,$$
ce qui permet de conclure que
$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \frac{a}{b-a-1},$$
et en ajoutant le premier terme :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{b-1}{b-a-1}.$$

* * *

Exercice 2 : Etude de sommes doubles

Première partie

1. Pour $x \neq 1$ réel et $N \in \mathbb{N}$ on a
$$\sum_{n=0}^{N} x^n = \frac{1-x^{N+1}}{1-x},$$
donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} x^n$ possède une limite finie lorsque $N \to +\infty$ si et seulement si $(x^{N+1})_N$ converge, ce qui revient à $|x| < 1$. Dans ce cas, on a :
$$\sum_{n=0}^{N} x^n \underset{N\to+\infty}{\to} \frac{1}{1-x}.$$
Enfin, si $x = 1$, on a
$$\sum_{n=0}^{N} x^n = \sum_{n=0}^{N} 1 = N+1 \underset{N\to+\infty}{\to} +\infty.$$
On peut donc conclure que $\sum_{n\geq 0} x^n$ converge si et seulement si $|x| < 1$ (c'est-à-dire $x \in]-1,1[$) et
$$\forall x \in]-1,1[, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

2. Si $|x| \geq 1$, alors $|nx^n| \geq n$ donc la série $\sum_{n\geq 0} nx^n$ diverge grossièrement.
Si $|x| < 1$, alors $n^3x^n \to 0$ (par croissances comparées), donc $nx^n = o(1/n^2)$, ce qui montre que $\sum_{n\geq 0} nx^n$ converge absolument.
Finalement, $\sum_{n\geq 0} nx^n$ converge si et seulement si $|x| < 1$.

3. Soit $x \in]-1,1[$. Puisque la série géométrique $\sum x^n$ converge absolument, on peut effectuer son produit de Cauchy avec elle-même, et on a
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} x^k x^{n-k}\right) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right),$$
c'est-à-dire
$$\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2}$$

(et la série obtenue est absolument convergente). En multipliant par x, on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^{n+1} = \frac{x}{(1-x)^2},$$

et donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} nx^n = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^{n+1} = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

4. Si on pose $Q_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors en dérivant ce polynôme on obtient :

$$\forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}, \qquad Q_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1},$$

donc en multipliant par x :

$$\sum_{k=0}^{n} kx^k = \sum_{k=1}^{n} kx^k = xQ_n'(x).$$

Mais d'autre part on a $Q_n(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ pour tout $x \neq 1$, donc

$$\forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times]-1,1[, \qquad \sum_{k=0}^{n} kx^k = x\frac{d}{dx}\left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right) = \frac{x}{(1-x)^2}\underbrace{\left(-(n+1)x^n(1-x) + (1-x^{n+1})\right)}_{\underset{n\to+\infty}{\to} 1}.$$

En passant à la limite lorsque $n \to +\infty$, on obtient donc

$$\sum_{k=0}^{+\infty} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Deuxième partie

5. Attention, la série n'est pas à termes positifs ! On a $\left|\frac{nx^n}{1-x^n}\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} n|x|^n$ (puisque $x^n \to 0$), donc puisque $\sum n|x|^n$ converge (d'après la question 3. étant donné que le produit de Cauchy donne de la convergence absolue), on en déduit que $\sum \left|\frac{nx^n}{1-x^n}\right|$ converge. Ainsi, la série $\sum \frac{nx^n}{1-x^n}$ converge.

   En outre, puisque $x \in]-1,1[$, on a $x^n \in]-1,1[$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donc $\frac{1}{1-x^n} = \sum_{k=0}^{+\infty}(x^n)^k$, ce qui amène :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^n\left(\sum_{k=0}^{+\infty} x^{nk}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} nx^{n(1+k)}\right).$$

6. On va utiliser le théorème de Fubini sur la famille réelle $(u_{n,k}) = (nx^{n(1+k)})_{(n,k)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}}$, pour permuter les deux sommes dans la somme double précédemment obtenue.

   - Puisque la famille $(u_{n,k})$ **n'est pas à termes positifs**, on vérifie d'abord sa sommabilité en trouvant un procédé de sommation de $|u_{n,k}|$ qui donne une somme finie. Dans $[0,+\infty]$, on a, en reprenant le calcul de la question précédente avec des valeurs absolues :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}|u_{n,k}|\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} n|x|^n\left(\sum_{k=0}^{+\infty}|x^n|^k\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n|x|^n}{1-|x^n|} < +\infty,$$

     puisque $\frac{n|x|^n}{1-|x^n|} \sim n|x^n|$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} n|x^n| < +\infty$.
     On en déduit que la famille $(u_{n,k})$ est sommable d'après le théorème de Fubini positif.

- On peut donc appliquer le théorème de Fubini complexe, qui donne directement :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}u_{n,k}\right)=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}u_{n,k}\right),$$

c'est-à-dire

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{nx^n}{1-x^n}=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}n(x^{1+k})^n\right).$$

En utilisant la formule obtenue à la question 3., on a $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}n(x^{1+k})^n=\dfrac{x^{1+k}}{(1-x^{1+k})^2}$, et on en déduit

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{nx^n}{1-x^n}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^{1+k}}{(1-x^{1+k})^2}=\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{x^p}{(1-x^p)^2},$$

avec convergence absolue de cette dernière série (puisqu'il y a sommabilité de $(u_{n,k})$.

Troisième partie

7. Puisque $\frac{1}{k^3(k+1)}\sim\frac{1}{k^4}$, la série $\sum\limits_{k\geq 1}\frac{1}{k^3(k+1)}$ converge, donc pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, le reste $\sum\limits_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^3(k+1)}$ est bien défini dans $\mathbb{R}$. Donc $(u_n)_{n\geq 1}$ est bien définie en tant que suite réelle.

8. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on peut réécrire $u_n=\sum\limits_{k=n}^{+\infty}\dfrac{n}{k^3(k+1)}=\sum\limits_{k=1}^{+\infty}a_{n,k}$ en posant

$$\forall (k,n)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*,\qquad a_{n,k}=\begin{cases}\frac{n}{k^3(k+1)} & \text{si } k\geq n\\ 0 & \text{si } k<n\end{cases}.$$

Puisque la famille $(a_{n,k})_{(n,k)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est à termes positifs, on a dans $[0,+\infty]$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}u_n=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{+\infty}a_{n,k}\right)=\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}a_{n,k}\right)=\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{k}\frac{n}{k^3(k+1)}\right)$$

(d'après le théorème de Fubini positif) donc finalement :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}u_n=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^3(k+1)}\times\frac{k(k+1)}{2}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{2k^2}=\frac{\pi^2}{12}<+\infty,$$

donc $\sum u_n$ converge et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n=\frac{\pi^2}{12}$.

Quatrième partie

9. Pour $i\in\mathbb{N}$ fixé et $J>i$, on a (en supprimant les termes nuls de la somme) :

$$\sum_{j=0}^{J}b_{i,j}=\sum_{j=i}^{J}b_{i,j}=-1+\sum_{j=i+1}^{J}(1/2)^{j-i}=-1+\sum_{j=1}^{J-i}(1/2)^j,$$

donc la série $\sum\limits_{j\geq 0}b_{i,j}$ converge et en faisant $J\to+\infty$:

$$\forall i\in\mathbb{N},\qquad \sum_{j=0}^{+\infty}b_{i,j}=-1+\sum_{j=1}^{+\infty}(1/2)^j=-1+\frac{1/2}{1-1/2}=0.$$

Ceci implique que

$$\sum_{i=0}^{+\infty}\left(\sum_{j=0}^{+\infty}b_{i,j}\right)=\sum_{i=0}^{+\infty}0=0.$$

10. Pour $j \in \mathbb{N}$ fixé et $I > j$, on a (en supprimant les termes nuls de la somme) :

$$\sum_{i=0}^{I} b_{i,j} = \sum_{i=0}^{j} b_{i,j} = -1 + \sum_{i=0}^{j-1} (1/2)^{j-i} = -1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1-(1/2)^j}{1-(1/2)}\right) = -(1/2)^j,$$

donc la série $\sum_{i\geq 0} b_{i,j}$ converge (c'est en fait une somme finie) et en faisant $I \to +\infty$:

$$\forall j \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{i=0}^{+\infty} b_{i,j} = \sum_{i=0}^{j} b_{i,j} = -(1/2)^j.$$

On reconnaît le terme général d'une série convergente, donc

$$\sum_{j=0}^{+\infty}\left(\sum_{i=0}^{+\infty} b_{i,j}\right) = \sum_{j=0}^{+\infty} -(1/2)^j = -2.$$

11. Si on avait $\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} |b_{i,j}| < +\infty$, alors la famille $(b_{i,j})$ serait sommable et donc par le théorème de Fubini, on aurait

$$\sum_{j=0}^{+\infty}\left(\sum_{i=0}^{+\infty} b_{i,j}\right) = \sum_{i=0}^{+\infty}\left(\sum_{j=0}^{+\infty} b_{i,j}\right).$$

Mais ce n'est pas le cas, donc

$$\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} |b_{i,j}| = +\infty.$$

Cinquième partie

12. Pour $i \in \mathbb{N}$ fixé et $J > i$, on a (en supprimant les termes nuls de la somme) :

$$\sum_{j=0}^{J} c_{i,j} = \sum_{j=i}^{J} c_{i,j} = i - 2\sum_{j=i+1}^{J} i3^{i-j} = i - 2i\sum_{j=1}^{J-i} (1/3)^j,$$

donc la série $\sum_{j\geq 0} c_{i,j}$ converge et en faisant $J \to +\infty$:

$$\forall i \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{j=0}^{+\infty} c_{i,j} = i - 2i\sum_{j=1}^{+\infty}(1/3)^j = i - 2i\left(\frac{1/3}{1-1/3}\right) = 0.$$

Ceci implique que

$$\sum_{i=0}^{+\infty}\left(\sum_{j=0}^{+\infty} c_{i,j}\right) = \sum_{i=0}^{+\infty} 0 = 0.$$

13. Pour $j \in \mathbb{N}$ fixé et $I > j$, on a (en supprimant les termes nuls de la somme) :

$$\sum_{i=0}^{I} c_{i,j} = \sum_{i=0}^{j} c_{i,j} = j - \frac{2}{3^j}\sum_{i=0}^{j-1} i3^i,$$

donc en faisant tendre $I \to +\infty$, on obtient la convergence de la série $\sum_{i\geq 0} c_{i,j}$ et

$$\sum_{i=0}^{+\infty} c_{i,j} = j - \frac{2}{3^j}\sum_{i=0}^{j-1} i3^i.$$

Réutilisons alors le calcul de la question 4. :

$$\forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}\setminus\{1\}, \qquad \sum_{k=0}^{n} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2}(-(n+1)x^n(1-x) + (1-x^{n+1})),$$

qui montre que

$$\sum_{i=0}^{j-1} i3^i = \frac{3}{(1-3)^2}(-jx^{j-1}(1-3)+(1-3^j)) = \frac{3}{4}(2j3^{j-1}+1-3^j).$$

Finalement, on a

$$\forall j \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{i=0}^{+\infty} c_{i,j} = j - \frac{2}{3^j} \times \frac{3}{4}(2j3^{j-1}+1-3^j) = \frac{1}{2}\left(\frac{3^j-1}{3^{j-1}}\right).$$

14. D'après la question précédente, on a

$$\forall j \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{i=0}^{+\infty} c_{i,j} \underset{j\to+\infty}{\sim} \frac{3^j}{2\times 3^{j-1}} = \frac{3}{2},$$

donc la série $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty}\left(\sum_{i=0}^{+\infty} c_{i,j}\right)$ diverge grossièrement.

Si on avait $\displaystyle\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} |c_{i,j}| < +\infty$, alors la famille $(c_{i,j})$ serait sommable donc par le théorème de Fubini on aurait convergence de la série $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty}\left(\sum_{i=0}^{+\infty} c_{i,j}\right)$.

Ce n'est pas le cas, donc $\displaystyle\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} |c_{i,j}| = +\infty$.

* * *

Exercice 3 : Endomorphismes à noyau et image supplémentaires

Première partie : questions de cours

1.
   - $\mathbb{R}^3$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3.
   - $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (l'ensemble des suites réelles) est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension infinie.
   - $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ (l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension infinie.
2. Un sous-espace vectoriel de E est une partie $F \subset E$ telle que $0_E \in F$, F est stable par somme (i.e. $(x,y) \in F^2 \implies x+y \in F$), et F est stable par produit externe (i.e. $(\lambda, x) \in \mathbb{K}\times F \implies \lambda x \in F$).
3.
   - Une application linéaire $f : E \to F$ est une application telle que $\forall(\lambda,x,y) \in \mathbb{K}\times E \times E$, $f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$.
   - Un endomorphisme de E est une application linéaire $f : E \to E$.
   - Un isomorphisme est une application linéaire bijective $f : E \to F$.
   - Un automorphisme est un endomorphisme bijectif.
4. Rappelons que $Ker(f) = \{x \in E,\ f(x) = 0_F\}$.
   - Si f est injective, alors puisque $f(0_E) = 0_F$, on a
     $$x \in Ker(f) \iff f(x) = f(0_E) \iff x = 0_E,$$
     donc $Ker(f) = \{0_E\}$.
   - Réciproquement, si $Ker(f) = \{0_E\}$, alors pour tous $(x,x') \in E^2$:
     $$f(x) = f(x') \iff f(x-x') = 0_F \iff x-x' \in Ker(f) \iff x-x' \in \{0_E\} \iff x = x',$$
     donc f est injective.

Donc f est injective ssi $Ker(f) = \{0_E\}$.

5. Rappelons que $Im(f) = \{y \in F,\ \exists x \in E,\ y = f(x)\} \subset F$ (c'est l'ensemble des $y \in F$ ayant au moins un antécédent par f). L'égalité $Im(f) = F$ signifie exactement que tout $y \in F$ possède au moins un antécédent par f, ce qui est la définition de la surjectivité de f.

6.
   - Une famille $(u_1, \cdots, u_n) \in E^n$ est dite libre lorsque
$$\forall (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \qquad \left(\sum_{j=1}^n \lambda_j u_j = 0_E \implies \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0 \right).$$
   - On dit que $(u_1, \cdots, u_n)$ est génératrice de E lorsque $Vect(u_1, \cdots, u_n) = E$, c'est-à-dire que tout vecteur de E peut s'écrire comme combinaison linéaire de $(u_1, \cdots, u_n)$.
   - On dit que $(u_1, \cdots, u_n)$ est une base de E lorsqu'elle est libre et qu'elle est génératrice de E.

7. Si $f : E \to F$ est injective et $(u_1, \cdots, u_n)$ est libre dans E, alors pour tout $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$:
$$\sum_{j=1}^n \lambda_j f(u_j) = 0_F \iff f\left(\sum_{j=1}^n \lambda_j u_j \right) = 0_F = f(0_E) \iff \sum_{j=1}^n \lambda_j u_j = 0_E,$$
et cela entraîne $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$ car $(u_1, \cdots, u_n)$ est libre. Ainsi,
$$\sum_{j=1}^n \lambda_j f(u_j) = 0_F \implies \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0,$$
donc la famille $(f(u_1), \cdots, f(u_n))$ est libre dans F.

8. Les vecteurs $f(u_1), \cdots, f(u_n)$ sont dans $Im(f)$ (qui est un SEV de F), donc on a toujours
$$Vect(f(u_1), \cdots, f(u_n)) \subset Im(f).$$
Supposons en plus $Vect(u_1, \cdots, u_n) = E$ et montrons l'inclusion réciproque : si $y \in Im(f)$, alors il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Mais $Vect(u_1, \cdots, u_n) = E$, donc il existe $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum_{j=1}^n \lambda_j u_j$, ce qui entraîne par linéarité de f :
$$y = f\left(\sum_{j=1}^n \lambda_j u_j \right) = \sum_{j=1}^n \lambda_j f(u_j),$$
et donc $y \in Vect(f(u_1), \cdots, f(u_n))$. On a bien montré
$$Vect(f(u_1), \cdots, f(u_n)) = Im(f),$$
c'est-à-dire que $(f(u_1), \cdots, f(u_n))$ est génératrice de $Im(f)$.

9. $Mat_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f)$ est la matrice à p lignes (la dimension de F) et n colonnes (la dimension de E) telle que pour tout $j \in \{1, \cdots, n\}$, la j^e colonne est formée des coordonnées de $f(u_j)$ dans la base $\mathcal{B}_F$. Symboliquement, on a donc
$$Mat_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f) = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ [f(u_1)]_{\mathcal{B}_F} & [f(u_2)]_{\mathcal{B}_F} & \cdots & [f(u_n)]_{\mathcal{B}_F} \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

10.
    - Par définition, $F + G$ est l'ensemble des vecteurs de E de la forme $x + y$ avec $x \in F$ et $y \in G$.
    - L'ensemble $F + G$ peut se noter $F \oplus G$ lorsque F et G sont en "somme directe", c'est-à-dire lorsque l'écriture en somme est unique :
$$\forall (x, x', y, y') \in F^2 \times G^2, \qquad (x + y = x' + y' \implies (x = x') \text{ et } (y = y')).$$

- $E = F \oplus G$ signifie que tout vecteur de E peut s'écrire de manière unique $x + y$ avec $x \in F$ et $y \in G$. On dit alors que F et G sont supplémentaires dans E.

Deuxième partie : étude d'exemples

11. C'est du cours. Un projecteur $p : E \to E$ est un endomorphisme tel que $p \circ p = p$.
Montrons qu'on a alors $E = Ker(p) \oplus Im(p)$. Soit $x \in E$, montrons qu'il existe un unique couple $(x_1, x_2) \in Ker(p) \times Im(p)$ tel que $x = x_1 + x_2$. Pour cela on procède par analyse-synthèse.
Analyse : si $x = x_1 + x_2$ avec $(x_1, x_2) \in Ker(p) \times Im(p)$, alors $p(x_1) = 0_F$ et il existe $t \in E$ tel que $x_2 = p(t)$, donc par linéarité de p et par la relation $p \circ p = p$,
$$p(x) = p(x_1) + p(x_2) = 0_F + p(p(t)) = p(t) = x_2,$$
et par suite $x_1 = x - x_2 = x - p(x)$. Ceci montre l'unicité de la décomposition de x sous réserve d'existence.
Synthèse : étant donné $x \in E$, on pose $x_1 = x - p(x)$ et $x_2 = p(x)$. On a alors $x = x_1 + x_2$, $x_2 \in Im(p)$ et $x_1 \in Ker(p)$ puisque $p(x_1) = p(x - p(x)) = p(x) - p(p(x)) = p(x) - p(x) = 0_F$ (vu que $p \circ p = p$). D'où l'existence de la décomposition de x.
Finalement, tout projecteur p vérifie la condition (S).
12.
    - Une symétrie $s : E \to E$ est un endomorphisme tel que $s \circ s = Id_E$.
    - Une symétrie vérifie toujours la condition (S) puisque s est bijective (avec $s^{-1} = s$) donc $Ker(s) = \{0_E\}$, $Im(s) = E$, d'où $E = Ker(s) \oplus Im(s)$.
13. On a $\mathbb{R}_2[X] = Vect(1, X, X^2)$, donc par linéarité de f :
$$Im(f) = Vect(f(1), f(X), f(X^2)) = Vect(1, 2X) = Vect(1, X) = \mathbb{R}_1[X].$$
De plus, $Ker(f) = \{P \in \mathbb{R}_2[X],\ P' = 0\} = Vect(1) = \mathbb{R}_0[X]$.
Donc f ne vérifie pas la condition (S) (en effet, $Im(f)$ et $Ker(f)$ ne sont même pas en somme directe puisque $Ker(f) \cap Im(f) = Vect(1) \neq \{0\}$).
14. On a bien pour tout $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $f(M) = \frac{1}{2}(M + M^T) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, et la linéarité de f est évidente par linéarité de la transposition. Donc f est bien un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
De plus, pour tout $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on a par linéarité de f :
$$(f \circ f)(M) = \frac{1}{2}(f(M) + f(M^T)) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(M + M^T) + \frac{1}{2}(M^T + (M^T)^T)\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(M + M^T) + \frac{1}{2}(M^T + M)\right) = \frac{1}{2}(M + M^T) = f(M),$$
donc f est un projecteur. Il vérifie donc la condition (S) d'après la question 11.

Troisième partie : exemple détaillé

15. Pour tout polynôme $P \in E = \mathbb{R}_3[X]$, on a
$$f(P) = \frac{1}{2}(X^2 - 1)P'' - XP' + P,$$
donc $\deg(f(P))) \leq \max(\underbrace{\deg((X^2 - 1)P'')}_{=\deg(P)}, \underbrace{\deg(XP')}_{=\deg(P)}, \deg(P)) \leq 3$, c'est-à-dire $f(P) \in \mathbb{R}_3[X]$.
L'application f est donc bien définie de E dans lui-même.
De plus, par linéarité de la dérivation des polynômes, f est linéaire, donc f est bien un endomorphisme de E.
16. Si $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$, alors par linéarite de f :
$$f(P) = af(X^3) + bf(X^2) + cf(X) + df(1),$$
et
$$f(1) = 1, \qquad f(X) = -X + X = 0,$$
$$f(X^2) = X^2 - 1 - 2X^2 + X^2 = -1, \qquad f(X^3) = 3(X^2 - 1)X - 3X^3 + X^3 = X^3 - 3X.$$
Donc
$$f(P) = aX^3 - 3aX - b + d = a(X^3 - 3X) + (d - b)1.$$

17. Soit $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$ dans E. On a d'après le calcul précédent :

$$P \in Ker(f) \iff aX^3 - 3aX - b + d = 0 \iff (a = 0 \text{ et } b = d) \iff P = b(X^2+1) + cX.$$

On a donc

$$Ker(f) = Vect(X^2+1, X).$$

18. $Ker(f)$ est de dimension 2 (puisque (X^2+1, X) est clairement libre), donc par le théorème du rang :

$$\dim(Im(f)) = rg(f) = \dim(E) - \dim(Ker(f)) = 4 - 2 = 2.$$

Le calcul de $f(P)$ montre que $Im(f) \subset Vect(X^3 - 3X, 1)$. Puisque $(X^3 - 3X, 1)$ est libre (facile), on a de plus $\dim(Vect(X^3 - 3X, 1)) = 2 = \dim(Im(f))$. Par inclusion et égalité des dimensions on a donc

$$Im(f) = Vect(X^3 - 3X, 1).$$

19. Etant donné $Q = aX^3 + bX^2 + cX + d$ dans E, on a

$$Q \in G \iff Q'(1) = Q'(-1) = 0 \iff \begin{cases} 3a + 2b + c = 0 \\ 3a - 2b + c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} b = 0 \\ c = -3a \end{cases} \iff Q = a(X^3 - 3X) + d.$$

Ce calcul montre que $G = Vect(X^3 - 3X, 1)$, donc G est un SEV de E, la famille libre $(X^3 - 3X, 1)$ est une base de G, $\dim(G) = 2$, et on remarque que $G = Im(f)$ (en utilisant la question 18.).

20. La famille (X^2+1, X) est une base de $Ker(f)$, la famille $(X^3 - 3X, 1)$ est une base de $Im(f)$. Si l'on concatène ces deux bases, on obtient la famille $(X^2+1, X, X^3 - 3X, 1)$, qui est une base de $E = \mathbb{R}_3[X]$ (car échelonnée en degrés). Donc les deux sous-espaces vectoriels $Ker(f)$ et $Im(f)$ sont supplémentaires dans E, c'est-à-dire que f vérifie la condition (S).

21. La matrice de l'endomorphisme f dans la base canonique $(1, X, X^2, X^3)$ est (d'après les calculs précédemment effectués) :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On vérifie facilement que $A^2 = A$, donc $f \circ f = f$, ce qui montre que f est un projecteur.

Quatrième partie : contre-exemple

22. L'application f est clairement linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^4$ et

$$(x, y, z, t) \in Ker(f) \iff (-3y = 3x - 3z = y = 0) \iff (y = 0 \text{ et } x = z).$$

Donc

$$Ker(f) = \{(x, 0, x, t),\ (x, t) \in \mathbb{R}^2\} = \{x(1, 0, 1, 0) + t(0, 0, 0, 1),\ (x, t) \in \mathbb{R}^2\} = Vect(u_1, u_2),$$

en posant

$$u_1 = (1, 0, 1, 0), \qquad u_2 = (0, 0, 0, 1).$$

Puisque la famille (u_1, u_2) est clairement libre, c'est une base de $Ker(f)$, et $\dim(Ker(f)) = 2$. Pour l'image, on sait qu'elle est engendrée par $(f(e_1), \cdots, f(e_4))$, où $(e_1, \cdots, e_4)$ est n'importe quelle base de $\mathbb{R}^4$. Si on prend pour $(e_1, \cdots, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$, on a alors

$$Im(f) = Vect(f(1, 0, 0, 0), \cdots, f(0, 0, 0, 1)) = Vect((0, 0, 3, 0), (0, -3, 0, 1), (0, 0, -3, 0), \overrightarrow{0}),$$

c'est-à-dire

$$Im(f) = Vect((0, 0, 1, 0), (0, -3, 0, 1)) = Vect(e_3, e_4 - 3e_2).$$

Finalement, $(u_3, u_4) = (e_3, e_4 - 3e_2)$ est une base de $Im(f)$ et $\dim(Im(f)) = 2$.

23. On procède comme à la question 20. Si on concatène les deux bases précédemment obtenues ((u_1, u_2) pour $Ker(f)$ et (u_3, u_4) pour $Im(f)$), on obtient la famille :

$$(u_1, u_2, u_3, u_4) = (e_1 + e_3, e_4, e_3, e_4 - 3e_2).$$

Les opérations élémentaires ne modifient pas le $Vect$, donc

$$Vect(u_1, u_2, u_3, u_4) = Vect(e_1+e_3, -3e_2+e_4, e_3, e_4) = Vect(e_1, -3e_2, e_3, e_4) = Vect(e_1, e_2, e_3, e_4) = \mathbb{R}^4.$$

On a montré que la famille concaténée (u_1, u_2, u_3, u_4) forme une base de $\mathbb{R}^4$ (car elle est génératrice et de cardinal 4), donc $Ker(f)$ et $Im(f)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$, c'est-à-dire que f vérifie la condition (S).

24. Vu que $Ker(f) \neq \{\overrightarrow{0}\}$, f n'est pas injective, donc f n'est pas un automorphisme.
Vu que $f(f(e_1)) = f(0, 0, 3, 0) = 3f(e_3) = 3(0, 0, -3, 0) = (0, 0, -9, 0) \neq f(e_1)$, on a $f \circ f \neq f$, donc f n'est pas non plus un projecteur.

Remarque
La condition (S) (supplémentarité du noyau et de l'image) n'est donc pas spécifique aux projecteurs !

Cinquième partie : conditions équivalentes à la condition (S) en dimension finie

25. Procédons par implications circulaires.
   - Supposons $Ker(f) \oplus Im(f) = E$ et montrons que $Im(f) = Im(f^2)$.
     * L'implication $Im(f^2) \subset Im(f)$ est toujours vraie (car si $y = f(f(x))$ avec $x \in E$, alors $f(x)$ est antécédent de y par f, donc $y \in Im(f)$).
     * Réciproquement, si $y \in Im(f)$, alors il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Or, par hypothèse de supplémentarité, il existe un unique couple $(x_1, x_2) \in Ker(f) \times Im(f)$ tel que $x = x_1 + x_2$. Donc $y = f(x_1) + f(x_2) = f(x_2)$. Mais $x_2 \in Im(f)$, donc il existe $t \in E$ tel que $x_2 = f(t)$, ce qui entraîne $y = f(f(t)) \in Im(f^2)$.
   - Supposons $Im(f) = Im(f^2)$ et montrons que $Ker(f) = Ker(f^2)$.
     * L'implication $Ker(f) \subset Ker(f^2)$ est toujours vraie
       (car $x \in Ker(f) \implies f(x) = 0_E \implies f(f(x)) = f(0_E) = 0_E \implies x \in Ker(f^2)$).
     * Par le théorème du rang appliqué à f^2 et à f (on est en dimension finie !), on a aussi

       $$\dim(Ker(f^2)) = \dim(E) - \dim(Im(f^2)) = \dim(E) - \dim(Im(f)) = \dim(Ker(f)),$$

       donc par inclusion et égalité des dimensions, on a $Ker(f) = Ker(f^2)$.
   - Supposons $Ker(f) = Ker(f^2)$ et montrons que $E = Ker(f) \oplus Im(f)$.
     * On a déjà $Ker(f) \cap Im(f) = \{0_E\}$
       car si $x \in Ker(f) \cap Im(f)$, alors $f(x) = 0_E$ et il existe $t \in E$ tel que $x = f(t)$, donc $f(f(t)) = 0_E$, i.e. $t \in Ker(f^2)$. Mais $Ker(f^2) = Ker(f)$, donc $t \in Ker(f)$, c'est-à-dire $x = f(t) = 0_E$.
     * De plus, par le théorème du rang :

       $$\dim(Ker(f)) + \dim(Im(f)) = \dim(E),$$

       donc (puisqu'ils sont déjà en somme directe), les SEV $Ker(f)$ et $Im(f)$ sont supplémentaires dans E.

On a donc bien montré l'équivalence des 3 propriétés.

* * *

Exercice 4 (plus difficile)

1. Procédons par analyse-synthèse.
   - Si $g = h \circ f$ alors $Ker(f) \subset Ker(g)$ (très simple à vérifier).
   - Réciproquement, supposons $Ker(f) \subset Ker(g)$ et essayons de construire $h : F \to G$ qui répond à la question.
     Déjà, la condition $g = h \circ f$ impose de poser $h(y) = g(x)$ dès que $y = f(x)$.
     On commence donc par définir h sur le SEV $Im(f) \subset F$.
     Ensuite, en prenant un SEV S tel que $Im(f) \oplus S = F$ (il en existe toujours en dimension finie), on définira h sur S. Puis on fera un recollement. Voyons maintenant les détails de cette construction :
     * Soit $y \in Im(f)$. Il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Pour définir une application $h_1 : Im(f) \to G$ en posant $h_1(y) = g(x)$, il faut s'assurer que la valeur $g(x)$ ne dépend pas de l'antécédent x. C'est le cas car
     $$y = f(x) = f(x') \implies x - x' \in Ker(f) \subset Ker(g) \implies g(x) = g(x').$$
     On peut donc définir
     $$h_1 : \left\{ \begin{array}{ccc} Im(f) & \longrightarrow & G \\ y & \longmapsto & h_1(y) = g(x) \end{array} \right. ,$$
     où $x \in E$ est **n'importe quel** antécédent de y par f.
     Et cette application est bien linéaire car pour tous éléments $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$ dans $Im(f)$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a par linéarité de f et de g :
     $$h_1(\lambda y_1 + y_2) = h_1(\lambda f(x_1) + f(x_2)) = h_1(f(\lambda x_1 + x_2)) = g(\lambda x_1 + x_2)$$
     $$= \lambda g(x_1) + g(x_2) = \lambda h_1(y_1) + h_1(y_2).$$
     * Soit S un supplémentaire de $Im(f)$ dans F. On a donc $F = Im(f) \oplus S$. On définit $h_2 : S \to G$ comme l'application nulle (elle est évidemment linéaire).
     * Cela définit de manière unique une application linéaire $h : F = Im(f) \oplus S \to G$ dont les restrictions respectives à $Im(f)$ et S sont h_1 et h_2 ("théorème de recollement" vu en MP2I).
     * Enfin, on a bien $h \circ f = g$ car pour tout $x \in E$, l'élément $f(x)$ est dans $Im(f)$, donc
     $$(h \circ f)(x) = h(f(x)) = h_1(f(x)) = g(x).$$

   Conclusion : il existe $h \in \mathcal{L}(F, G)$ telle que $g = h \circ f$ si et seulement si $Ker(f) \subset Ker(g)$.
2. Procédons par analyse-synthèse.
   - Si $g = h \circ f$ alors $Im(g) \subset Im(h)$ (très simple à vérifier).
   - Réciproquement, supposons $Im(g) \subset Im(h)$ et essayons de construire $f : E \to F$ qui répond à la question.
     Déjà, la condition $g = h \circ f$ impose que pour $x \in E$, $h(f(x)) = g(x)$, donc $f(x)$ doit être un antécédent de $g(x)$ par h (il en existe toujours car $g(x) \in Im(g) \subset Im(h)$ par hypothèse), mais lequel ? L'idée est de "corriger la non-bijectivité" de h en utilisant le théorème d'isomorphisme (cf. MP2I) : en considérant un supplémentaire S de $Ker(h)$ dans F (i.e. $Ker(h) \oplus S = F$), on obtient par restriction de h un isomorphisme
     $$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} S & \longrightarrow & Im(h) \\ t & \longmapsto & \varphi(t) = h(t) \end{array} \right. .$$
     Ainsi, tout $y \in Im(h)$ possède un unique antécédent $t \in S$ par h, noté $t = \varphi^{-1}(y)$. C'est lui qui va jouer le rôle de $f(x)$ lorsque $y = g(x)$. On pose donc
     $$f = \varphi^{-1} \circ g : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) = \varphi^{-1}(g(x)) \end{array} \right. .$$

Cette application est bien définie (car pour $x \in E$, $g(x) \in Im(g) \subset Im(h)$, donc $\varphi^{-1}(g(x))$ est bien défini dans $S \subset F$), linéaire par composition d'applications linéaires et elle vérifie bien $g = h \circ f$ car pour tout $x \in E$, $f(x) = \varphi^{-1}(g(x))$, donc

$$(h \circ f)(x) = h(\underbrace{f(x)}_{\in S}) = \varphi(f(x)) = \varphi(\varphi^{-1}(g(x))) = g(x).$$

Conclusion : il existe $f \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $g = h \circ f$ si et seulement si $Im(g) \subset Im(h)$.