DS01 du 16/09/2023 (4h)

Le sujet se compose de 4 exercices indépendants.
Calculatrice interdite.

* * *

Exercice 1 : Une série à paramètres

On considère la suite (u_n) définie par les relations de récurrence :

$$u_0 = 1, \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \left(\frac{n+a}{n+b}\right) u_n,$$

où a et b sont deux réels strictement positifs fixés.

1. On pose $v_n = \ln(n^\gamma u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, où γ est un réel.
   En effectuant un développement asymptotique, étudier la convergence de la série $\sum_{n\geq 1}(v_{n+1} - v_n)$ en fonction de γ.
2. En déduire qu'il existe un réel $\lambda > 0$ tel que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\lambda}{n^{b-a}}$.
3. Déterminer les a, b pour lesquels $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.
4. Pour ces valeurs de a et b, calculer la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ (on travaillera avec les sommes partielles).

* * *

Exercice 2 : Etude de sommes doubles

Première partie

1. **Question de cours** : déterminer les réels x pour lesquels la série $\sum_{n\geq 0} x^n$ converge, et dans ce cas, calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ **(on attend une démonstration détaillée)**.
2. Déterminer les réels x pour lesquels $\sum_{n\geq 0} nx^n$ converge.
3. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} nx^n$ pour x réel à préciser, en utilisant un produit de Cauchy.
4. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} nx^n$ pour x réel à préciser, en utilisant la suite de polynômes $Q_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$.

Deuxième partie

Soit $x \in]-1,1[$.

5. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{nx^n}{1-x^n}$ converge et que
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} nx^{n(1+k)}.$$

6. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{p\geq 1} \frac{x^p}{(1-x^p)^2}$ converge et que
$$\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x^p}{(1-x^p)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^n}{1-x^n}.$$

Troisième partie

On admet que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

7. Montrer que l'on peut définir une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ en posant pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$u_n = n\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^3(k+1)}.$$

8. Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ converge et calculer sa somme.

Quatrième partie

On considère la famille $(b_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ définie, pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, par
$$b_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i > j, \\ -1 & \text{si } i = j, \\ \dfrac{1}{2^{j-i}} & \text{si } i < j. \end{cases}$$

9. Montrer l'existence de $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty}\left(\sum_{j=0}^{+\infty} b_{i,j}\right)$ dans $\mathbb{R}$ et calculer sa valeur.

10. Montrer l'existence de $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty}\left(\sum_{i=0}^{+\infty} b_{i,j}\right)$ dans $\mathbb{R}$ et calculer sa valeur.

11. Déterminer $\displaystyle\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} |b_{i,j}|$ dans $[0,+\infty]$.

Cinquième partie

On considère la famille $(c_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ définie, pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, par
$$c_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i > j, \\ j & \text{si } i = j, \\ -2i3^{i-j} & \text{si } i < j. \end{cases}$$

12. Montrer l'existence de $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty}\left(\sum_{j=0}^{+\infty} c_{i,j}\right)$ dans $\mathbb{R}$ et calculer sa valeur.

13. Soit $j \in \mathbb{N}$. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{i\geq 0} c_{i,j}$ converge et que $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} c_{i,j} = \frac{1}{2}\left(\frac{3^j-1}{3^{j-1}}\right)$.

14. Déterminer $\displaystyle\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} |c_{i,j}|$ dans $[0,+\infty]$.

* * *

Exercice 3 : Endomorphismes à noyau et image supplémentaires

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On s'intéresse au problème suivant : si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, quels sont les endomorphismes $f \in \mathcal{L}(E)$ pour lesquels $E = Ker(f) \oplus Im(f)$?
On appellera dans la suite de l'exercice **condition (*S*)** le fait que $\boxed{E = Ker(f) \oplus Im(f)}$.

Première partie : questions de cours

1. Donner trois exemples de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels classiques (les trois seront non nuls, un sera de dimension finie et on précisera sa dimension, et les deux autres seront de dimension infinie).
2. Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, qu'est-ce qu'un sous-espace vectoriel de E ?
3. Rappeler ce qu'est une application linéaire $f : E \to F$ (où E et F désignent des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels), un endomorphisme, un isomorphisme, un automorphisme.
4. Démontrer qu'une application linéaire $f : E \to F$ est injective si et seulement si son noyau $Ker(f)$ est nul.
5. Démontrer qu'une application linéaire $f : E \to F$ est surjective si et seulement si son image $Im(f)$ est égale à F.
6. Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(u_1, \cdots, u_n)$ une famille de vecteurs de E, que signifie $(u_1, \cdots, u_n)$ libre ? $(u_1, \cdots, u_n)$ génératrice de E ? $(u_1, \cdots, u_n)$ base de E ?
7. Soit $(u_1, \cdots, u_n)$ une famille libre de vecteurs de E et $f : E \to F$ une application linéaire injective. Démontrer que la famille $(f(u_1), \cdots, f(u_n))$ est libre.
8. Soit $(u_1, \cdots, u_n)$ une famille de vecteurs génératrice de E et $f : E \to F$ une application linéaire. Démontrer que la famille $(f(u_1), \cdots, f(u_n))$ est génératrice de $Im(f)$.
9. Soit $\mathcal{B}_E = (u_1, \cdots, u_n)$ une base de E, $\mathcal{B}_F = (v_1, \cdots, v_p)$ une base de F et $f : E \to F$ une application linéaire. Qu'est-ce que la matrice de f dans le couple de bases $(\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)$?
On la notera $Mat_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f)$.
10. Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, qu'est-ce que l'ensemble $F + G$? Quand peut-on le noter $F \oplus G$? Que signifie l'écriture $E = F \oplus G$?

Deuxième partie : étude d'exemples

11. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (pas nécessairement de dimension finie).
Démontrer que tout projecteur $p : E \to E$ vérifie la condition (S).
12. Rappeler ce qu'est une symétrie $s : E \to E$ (où E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel).
Vérifie-t-elle la condition (S) ?
13. On note $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ l'application définie par $f(P) = P'$. Cet endomorphisme vérifie-t-il la condition (S) ?
14. On note $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'application définie par $f(M) = \dfrac{1}{2}(M + M^T)$, où M^T désigne la transposée de la matrice M. Vérifier que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et déterminer s'il vérifie la condition (S).

Troisième partie : exemple détaillé

On note cette fois-ci $E = \mathbb{R}_3[X]$ et $f : E \to E$ l'application définie par $f(P) = \dfrac{1}{2}(X^2-1)P'' - XP' + P$.

15. Expliquer pourquoi f est bien un endomorphisme de E (sans faire de gros calculs).
16. Déterminer explicitement l'image par f du polynôme $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$.
17. Déterminer le noyau de l'application f.
18. Préciser la dimension de l'image de f, puis en donner une base à l'aide des calculs déjà effectués.
19. On note $G = \{Q \in E,\ Q'(1) = Q'(-1) = 0\}$. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de E dont on précisera une base et la dimension, puis montrer que $G = Im(f)$.

20. Montrer (sans utiliser la question suivante...) que f vérifie la condition (S).
21. Montrer que f est en fait un projecteur.

Quatrième partie : contre-exemple
On note enfin $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'application définie par $f(x, y, z, t) = (0, -3y, 3x - 3z, y)$.

22. Déterminer le noyau et l'image de f (on donnera une base et la dimension à chaque fois).
23. Vérifier que f satisfait à la condition (S).
24. Montrer toutefois que f n'est ni un automorphisme, ni un projecteur.

Cinquième partie : conditions équivalentes à la condition (S) en dimension finie
E désigne ici un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f : E \to E$ un endomorphisme.

25. Montrer que

$$f \text{ vérifie la condition } (S) \iff Im(f) = Im(f^2) \iff Ker(f) = Ker(f^2),$$

où f^2 désigne la composée $f \circ f$.

* * *

Exercice 4 (plus difficile)

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.

1. Soit $f : E \to F$ et $g : E \to G$ des applications linéaires. Donner une condition nécessaire et suffisante sur f et g pour qu'il existe $h : F \to G$ linéaire telle que $g = h \circ f$.
2. Soit $g : E \to G$ et $h : F \to G$ des applications linéaires. Donner une condition nécessaire et suffisante sur g et h pour qu'il existe $f : E \to F$ linéaire telle que $g = h \circ f$.