Centrale MP 2021 : épreuve 2
Un corrigé

I. Inégalité polynomiale de Bernstein et applications.

I.A - Polynômes de Tchebychev

1. On montre par récurrence que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \deg(T_n) = n}$.
   - C'est vrai aux rang 0 et 1.
   - Supposons le résultat vrai jusqu'à un rang $n \geq 1$. On a alors $T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}$ qui est somme de deux polynômes de degrés $n+1$ et $n-1$. Comme ces degrés sont différents, T_{n+1} est de degré $\max(n+1, n-1) = n+1$.

   $(T_k)_{0\leq k\leq n}$ étant échelonnée en degré est libre. Elle contient $n+1$ éléments de $\mathbb{C}_n[X]$ qui est de dimension $n+1$. Ainsi,

$$\boxed{(T_k)_{0\leq k\leq n} \text{ est une base de } \mathbb{C}_n[X]}$$

2. Procédons encore par récurrence.
   - C'est vrai aux rang 0 et 1.
   - Supposons le résultat vrai jusqu'à un rang $n \geq 1$. On a alors

$$T_{n+1}(\cos(\theta)) = 2\cos(\theta)T_n(\cos(\theta) + T_{n-1}(\cos(\theta)) = 2\cos(\theta)\cos(n\theta) - \cos((n-1)\theta)$$

   Comme $2\cos(a)\cos(b) = \cos(a-b) + \cos(a+b)$, le résultat au rang $n+1$ s'en déduit.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall \theta \in \mathbb{R},\ T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)}$$

3. Comme $\mathcal{S}_n$ est un espace-vectoriel, il suffit de prouver le résultat pour les éléments d'une base de $\mathbb{C}_n[X]$ (et de conclure par combinaisons linéaires). Or, la question précédente prouve l'appartenance pour les éléments de la base $(T_0, \ldots, T_n)$. Ainsi

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall P \in \mathbb{C}_n[X],\ \theta \mapsto P(\cos(\theta)) \in \mathcal{S}_n}$$

4. Quand θ varie dans $\mathbb{R}$, $\cos(\theta)$ décrit tout $[-1, 1]$. Ainsi la norme infinie de T_n sur $[-1, 1]$ est celle de $\theta \mapsto T_n(\cos(\theta))$ sur $\mathbb{R}$. Celle-ci vaut clairement 1 (puisque $|T_n(\cos(\theta))| = |\cos(n\theta)| \leq 1$ avec égalité si $\theta = 0$).

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \|T_n\|_{L^\infty([-1,1])} = 1}$$

5. Prouvons par récurrence sur n que

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ |\sin(n\theta)| \leq n|\sin(\theta)|$$

   - C'est immédiat au rang 0 .
   - Supposons le résultat vrai jusqu'à un rang $n \geq 0$. On a alors, pour tout réel θ,

$$|\sin((n+1)\theta)| \leq |\sin(n\theta)\cos(\theta)| + |\sin(\theta)\cos(n\theta)| \leq |\sin(n\theta)| + |\sin(\theta)| \leq (n+1)|\sin(\theta)|$$

   et le résultat est vrai au rang $n+1$.

Par ailleurs, en dérivant la relation $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$, on obtient

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ -\sin(\theta)T_n'(\cos(\theta)) = -n\sin(n\theta)$$

En combinant ceci,

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ |\sin(\theta)T_n'(\cos(\theta))| \leq n^2|\sin(\theta)|$$

On en déduiit que si $\theta \neq 0[\pi]$, $|T_n'(\cos(\theta))| \leq n^2$. Par continuité de $\theta \mapsto T_n'(\cos(\theta))$, ceci reste vrai sur $\mathbb{R}$.
La norme infinie de T_n' sur $[-1,1]$ est donc plus petite que n^2.
En utilisant une expression précédente, on a

$$\forall \theta \in]0,\pi/2],\ |T_n'(\cos(\theta))| = n\frac{|\sin(n\theta)|}{\sin(\theta)} \underset{\theta\to 0^+}{\sim} n\frac{n\theta}{\theta} = n^2$$

et ainsi (continuité) $|T_n'(0)| = n^2$. On a donc

$$\boxed{\forall n \in\ \mathbb{N},\ \|T_n'\|_{L^\infty([-1,1))} = n^2}$$

I.B - Inégalité de Bernstein

6. Par hypothèse, et en notant c le coefficient dominant de A,

$$A = c\prod_{j=1}^{2n}(X-\alpha_j)$$

On en déduit que

$$A' = c\sum_{k=1}^{2n}\prod_{\substack{1\leq j\leq 2n\\ j\neq k}}(X-\alpha_j)$$

et en particulier

$$A'(\alpha_k) = c\prod_{\substack{1\leq j\leq 2n\\ j\neq k}}(\alpha_k-\alpha_j)$$

Posons $L_k = \frac{A(X)}{(X-\alpha_k)A'(\alpha_k)}$. $L_k \in\ \mathbb{C}_{2n-1}[X]$ et on a (immédiat si $j\neq k$ et calcul précédent si $j=k$)

$$L_k(\alpha_j) = \delta_{j,k}$$

En particulier, $B - \sum_{k=1}^{2n} B(\alpha_k)L_k$ est nul en tous les α_j. Quans $B \in\ \mathbb{C}_{2n-1}[X]$, c'est un polynôme de degré $\leq 2n-1$ qui est donc nul (puisqu"il a au moins $2n$ racine).

$$\boxed{\forall B \in \mathbb{C}_{2n-1}[X],\quad B(X) = \sum_{k=1}^{2n} B\left(\alpha_k\right)\frac{A(X)}{\left(X-\alpha_k\right)A'\left(\alpha_k\right)}}$$

On peut aussi utiliser la décomposition en éléments simple de $\frac{B}{A}$, particulièrement aisée puisque les pôles sont simples.

7. On a $P_\lambda(1) = 0$ et donc $\boxed{(X-1) \text{ divise } P_\lambda}$.
8. On fixe $\lambda \in \mathbb{C}$. Les deux membres de l'égalité à prouver étant des expressions linéaires vis à vis de P, il suffit de vérifier la formule pour des P formant une base de $\mathbb{C}_{2n}[X]$, par exemple les X^k. Or,

$$\frac{(\lambda X)^k - \lambda^k}{X-1} = \lambda^k(X^{k-1}+X^{k-2}+\cdots+1)$$

et la valeur en 1 est $k\lambda^k$, qui est bien $\lambda(k\lambda^{k-1})$.

$$\boxed{\forall\lambda \in \mathbb{C},\ Q_\lambda(1) = \lambda P'(\lambda)}$$

9. On remarque tout d'abord que
$$R(\omega_k) = e^{2in\varphi_k} + 1 = 0$$
et ω_k est racine de R. De plus
$$\varphi_k - \varphi_\ell = (k-\ell)\frac{\pi}{n}$$
Si $k, \ell \in [\![1, 2n]\!]$, $-2n < k - \ell < 2n$ et donc $\varphi_k - \varphi_\ell \in]-2\pi, 2\pi[$ n'est nul que si $k = \ell$.
On a ainsi $2n$ racines différentes pour R unitaire de degré $2n$ et donc
$$\boxed{R(X) = \prod_{k=1}^{2n} (X - \omega_k)}$$

10. Si on applique (I.1) avec $A = R$ et $\alpha_k = \omega_k$ (qui sont bien distincts), on obtient, compte-tenu de $R'(\omega_k) = 2n\omega_k^{2n-1} = -\frac{2n}{\omega_k}$ (puisque $\omega_k^{2n} = -1$)
$$B(X) = -\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n} \frac{B(\omega_k)R(X)}{X - \omega_k}\omega_k$$
Ceci est vrai pour $B \in \mathbb{C}_{2n-1}[X]$ et en particulier pour Q_λ. Comme les ω_k sont différents de 1, l'expression de Q_λ donne alors
$$\boxed{\forall\lambda \in \mathbb{C}, \quad Q_\lambda(X) = -\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n} \frac{P(\lambda\omega_k) - P(\lambda)}{\omega_k - 1}\frac{X^{2n}+1}{X - \omega_k}\omega_k}$$
Appliquons cette formule en $\lambda = 1$. Avec la question 8, on a alors
$$\lambda P'(\lambda) = -\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n} \frac{P(\lambda\omega_k) - P(\lambda)}{\omega_k - 1}\frac{2}{1 - \omega_k}\omega_k$$
Il reste à couper la somme en deux pour conclure que
$$\boxed{\forall\lambda \in \mathbb{C}, \quad \lambda P'(\lambda) = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n} P(\lambda\omega_k)\frac{2\omega_k}{(1-\omega_k)^2} - \frac{P(\lambda)}{2n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{2\omega_k}{(1-\omega_k)^2}}$$

11. (I.2) avec $P = X^{2n}$ donne,
$$2n\lambda^{2n} = -\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{2\lambda^{2n}\omega_k}{(1-\omega_k)^2} - \frac{\lambda^{2n}}{2n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{2\omega_k}{(1-\omega_k)^2} = -\frac{\lambda^{2n}}{n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{2\omega_k}{(1-\omega_k)^2}$$
On en déduit que
$$\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{2\omega_k}{(1-\omega_k)^2} = -n$$
ce qui permet, après multiplication par $P(\lambda)$ de réécrire le second terme de (II.2) et de conclure que
$$\boxed{\forall\lambda \in \mathbb{C}, \quad \lambda P'(\lambda) = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n} P(\lambda\omega_k)\frac{2\omega_k}{(1-\omega_k)^2} + nP(\lambda)}$$

12. Soit $f \in \mathcal{S}_n$. Il lui est associé une suite $(a_k)_{0\leq k\leq n}$ et une suite $(b_k)_{1\leq k\leq n}$. Avec les formules d'Euler, on a

$$\begin{aligned} f(t) &= a_0 + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k - ib_k}{2}e^{ikt} + \frac{a_k+ib_k}{2}e^{-ikt}\right) \\ &= e^{-int}\left(a_0e^{int} + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k-ib_k}{2}e^{i(k+n)t} + \frac{a_k+ib_k}{2}e^{i(n-k)kt}\right)\right) \end{aligned}$$

Si on pose

$$U(X) = a_0X^n + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k-ib_k}{2}X^{k+n} + \frac{a_k+ib_k}{2}X^{n-k}\right)$$

on obtient un élément de $\mathbb{C}_{2n}[X]$ tel que $f(t) = e^{-int}U(e^{it})$.

$$\boxed{\exists U \in \mathbb{C}_{2n}[X],\ \forall\theta\in\mathbb{R}, f(\theta) = \mathrm{e}^{-in\theta}U\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)}$$

13. On a $1-\omega_k = e^{i\varphi_k/2}(e^{-i\varphi_k/2} - e^{i\varphi_k/2}) = -2ie^{i\varphi_k/2}\sin(\varphi_k/2)$ et ainsi

$$\frac{2\omega_k}{(1-\omega_k)^2} = \frac{2e^{i\varphi_k}}{-4e^{i\varphi_k}\sin(\varphi_k/2)^2} = \frac{-1}{2\sin(\varphi_k/2)^2}$$

Appliquons la question 11 au polynôme U. Avec l'expression ci-dessus, on obtient

$$\lambda U'(\lambda) = -\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n}U\left(\lambda\omega_k\right)\frac{1}{2\sin(\varphi_k/2)^2} + nU(\lambda)$$

En particulier, pour $\lambda = e^{it}$, on obtient (puisque $f'(t) = -inf(t) + ie^{-int}e^{it}U'(e^{it})$)

$$\begin{aligned} -ie^{int}(f'(t)+inf(t)) &= -\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n}U\left(e^{i(t+\varphi_k)}\right)\frac{1}{2\sin(\varphi_k/2)^2} + nU(e^{it}) \\ &= -\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n}e^{in(t+\varphi_k)}f(t+\varphi_k)\frac{1}{2\sin(\varphi_k/2)^2} + ne^{int}f(t) \end{aligned}$$

Comme $e^{in\varphi_k} = i(-1)^k$, on conclut que

$$-if'(t) = -\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n}i(-1)^kf(t+\varphi_k)\frac{1}{2\sin(\varphi_k/2)^2}$$

On a montré que

$$\boxed{\forall\theta\in\mathbb{R},\quad f'(\theta) = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n}f\left(\theta+\varphi_k\right)\frac{(-1)^k}{2\sin\left(\varphi_k/2\right)^2}}$$

14. D'après la question 11 avec $P=1$, on a

$$\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{2\omega_k}{(1-\omega_k)^2} = -n$$

et avec la question 13, on en déduit que

$$\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{2\sin\left(\varphi_k/2\right)^2} = n$$

Par inégalité triangulaire à partir de la question 13,

$$|f'(\theta| \leq \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n} \|f\|_{L^\infty([-1,1])}\frac{1}{2\sin\left(\varphi_k/2\right)^2} = n\|f\|_{L^\infty([-1,1])}$$

$$\boxed{\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad |f'(\theta)| \leqslant n\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})}}$$

I.C - Quelques conséquences de l'inégalité (I.4)

15. Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$. Posons $f : t \mapsto P(\cos(t))$. La question 3 nous indique que c'est un élément de $\mathcal{S}_n$ et on peut donc lui appliquer la question 14. Mais on a

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f'(t) = -\sin(t)P'(\cos(t))$$

Si $x \in [-1,1]$, on applique ceci avec $t = \arccos(x)$. Comme $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$ (car $\sin(\theta) = \sqrt{1-\cos^2(\theta)}$ quand $\theta \in [0,\pi]$)

$$|-\sqrt{1-x^2}P'(x)| \leq n\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq nP_{L^\infty([-1,1])}$$

Le majorant est indépendant de x et ainsi

$$\boxed{\forall P \in \mathbb{C}_n[X], \quad \forall x \in [-1,1], \quad \left|P'(x)\sqrt{1-x^2}\right| \leqslant n\|P\|_{L^\infty((-1,1))}}$$

16. Soit $Q \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$. Posons $f : \theta \mapsto Q(\cos(\theta))\sin(\theta)$. On sait déjà que $Q(\cos(\theta)) \in \mathcal{S}_{n-1}$ et s'écrit donc comme combinaison de $\cos(k\theta)$ et $\sin(k\theta)$ pour $k \in [\![1, n-1]\!]$ et d'une constante. Or,

$$\cos(k\theta)\sin(\theta) = \frac{1}{2}(\sin((k+1)\theta) - \sin((k-1)\theta))$$

$$\sin(k\theta)\sin(\theta) = -\frac{1}{2}(\cos((k+1)\theta) - \cos((k-1)\theta))$$

et $f(\theta)$ est donc combinaison de $\cos(j\theta)$ et $\sin(j\theta)$ pour $j \in [\![0,n]\!]$ et de $\sin(\theta)$ (pour la constante multipliée par $\sin(\theta)$). C'est donc un élément de $\mathcal{S}_n$. Comme $f'(\theta) = Q(\cos(\theta))\cos(\theta) - \sin^2(\theta)Q'(\cos(\theta))$, on a $f'(1) = Q(1)$ $(\theta = 0)$. Avec (I.4), on a donc

$$|Q(1)| \leq n\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$$

Remarquons alors que

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ |f(\theta)| = |Q(\cos(\theta))\sin(\theta)| = |Q(x)|\sqrt{1-x^2} \ \text{ avec } x = \cos(\theta)$$

et donc $|f(\theta)|$ est plus petit que la borne supérieure des $|Q(x)|\sqrt{1-x^2}$ pour $x \in [-1,1]$. Ainsi

$$\boxed{|Q(1)| \leq n \sup_{-1\leqslant x\leqslant 1}\left|Q(x)\sqrt{1-x^2}\right|}$$

17. Soit $R \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ et $t \in [-1,1]$. Considérons $S_t(X) = R(tX) \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$. La question précédente utilisée avec ce polynôme donne

$$|R(t)| \leq n \sup_{-1\leqslant x\leqslant 1}\left|R(tx)\sqrt{1-x^2}\right|$$

Pour tout $x \in [-1,1]$, on a $1-x^2 \leq 1-t^2x^2$ et donc $\sqrt{1-x^2} \leq \sqrt{1-t^2x^2}$. Ainsi

$$\forall x \in [-1,1],\ \left|R(tx)\sqrt{1-x^2}\right| \leq \left|R(tx)\sqrt{1-(tx)^2}\right| \leq \sup_{-1\leq y\leq 1}|R(y)\sqrt{1-y^2}|$$

On a ainsi montré que

$$\sup_{-1\leqslant x\leqslant 1}\left|R(tx)\sqrt{1-x^2}\right| \leq \sup_{-1\leq y\leq 1}|R(y)\sqrt{1-y^2}|$$

et on a donc

$$\boxed{|R(t)| \leqslant n \sup_{-1\leqslant x\leqslant 1}\left|R(x)\sqrt{1-x^2}\right|}$$

18. Soit $P\in\mathbb{C}_n[X]$, on peut appliquer ce qui précède à $P'\in\mathbb{C}_{n-1}[X]$:

$$\forall t\in[-1,1],\ |P'(t)|\leqslant n\sup_{-1\leqslant x\leqslant 1}\left|P'(x)\sqrt{1-x^2}\right|$$

Avec la question 15, on a donc

$$\forall t\in[-1,1],\ |P'(t)|\leqslant n^2\|P\|_{L^\infty([-1,1])}$$

et ainsi

$$\boxed{\|P'\|_{L^\infty([-1,1])}\leq n^2\|P\|_{L^\infty([-1,1])}}$$

19. D'une part, on $\|T_n\|_{L^\infty([-1,1])}=1$ (question 4). D'autre part, $\|T_n'\|_{L^\infty([-1,1])}=n^2$ (question 5). Ainsi,

$$\boxed{\text{L'inégalité est une égalité quand } P=T_n\in\ \mathbb{C}_n[X]}$$

II Inégalités de Bernstein et transformée de Fourier

II.A - Transformée de Fourier d'une fonction

20. On utilise le théorème de continuité des intégrales à paramètres.
    - Pour tout $\xi\in\mathbb{R}$, la fonction $x\mapsto f(x)e^{-ix\xi}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
    - Pour tout $x\in\mathbb{R}$, la fonction $\xi\mapsto f(x)e^{-ix\xi}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
    - On a l'hypothèse de domination : $\forall x\in\mathbb{R},\ \forall\xi\in\mathbb{R},\ |f(x)e^{-ix\xi}|\leq|f(x)|$ et la fonction $|f|$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}$

    Ainsi, la fonction $\hat{f}$ est définie continue sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\forall f\in L^1(\mathbb{R}),\ \hat{f}\in\mathcal{C}^0(\mathbb{R})}$$

21. L'application $f\mapsto\hat{f}$ est linéaire (linéarité du passage à l'intégrale). Soit $f\in L^1(\mathbb{R})$. On a

$$\forall\xi\in\mathbb{R},\ |\hat{f}(\xi)|\leq\int_{\mathbb{R}}|f(x)e^{-ix\xi}|\,dx=\|f\|_1$$

et donc $\widehat{f}\in L^\infty(\mathbb{R})$ avec

$$\|\hat{f}\|_\infty\leq\|f\|_1$$

Ceci montre que l'application linéaire $f\mapsto\hat{f}$ est continue et même 1 lispchitzienne (pour les normes proposées).

$$\boxed{f\mapsto\hat{f}\text{ est continue de }\left(L^1(\mathbb{R}),\|\cdot\|_1\right)\text{ dans }(L^\infty(\mathbb{R}),\|\cdot\|_\infty)}$$

22. f étant continue, g l'est aussi. De plus, le changement de variable linéaire $u = \lambda x$ donne

$$\int_0^a |g(x)|\,dx = \frac{1}{\lambda}\int_0^{\lambda a} |f(u)|\,du$$

et cette quantité admet une limite finie quand $a \to +\infty$ et aussi quand $a \to -\infty$. Il y a donc intégrabilité aux voisinage des infinis et

$$\boxed{g \in L^1(\mathbb{R})}$$

On peut alors écire $\hat{g}(\xi)$ et le même changement de variable donne

$$\hat{g}(\xi) = \frac{1}{\lambda}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-i\xi u/\lambda}\,du$$

et ainsi

$$\boxed{\hat{g}(\xi) = \tfrac{1}{\lambda}\hat{f}(\tfrac{\xi}{\lambda})}$$

II.B - Produit de convolution

23. Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $t \longmapsto f(t)g(x-t)$ est continue sur $\mathbb{R}$. On a

$$\forall t \in \mathbb{R}, |f(t)g(x-t)| \leq |f(t)|\|g\|_\infty$$

f étant intégrable sur $\mathbb{R}$, la fonction $t \longmapsto f(t)g(x-t)$ l'est aussi, ce qui assure la définition de $f * g$ sur $\mathbb{R}$.
Le changement de variable $u = x - t$ donne immédiatement

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f*g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-u)g(u)\,du = (g*f)(x)}$$

24. L'inégalité de la question précédente entraine que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |(f*g)(x)| \leq \|g\|_\infty \|f\|_1$$

et ainsi

$$\boxed{f*g \text{ est bornée et } \|f*g\|_\infty \leqslant \|f\|_1\|g\|_\infty}$$

25. On utilise le théorème de régularité des intégrales à paramètres.
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $t \longmapsto f(t)g(x-t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- $\forall t \in \mathbb{R}$, $x \longmapsto f(t)g(x-t)$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}$ de dérivée p-ième $x \longmapsto f(t)g^{(p)}(x-t)$.
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $t \longmapsto f(t)g^{(p)}(x-t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- $\forall x, t \in \mathbb{R}$, $\forall p \in [\![0,k]\!]$, $\left|f(t)g^{(p)}(x-t)\right| \leq \|g^{(p)}\|_\infty |f(t)|$ et ce majorant est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Le théorème s'applique et donne que $f*g$ est de classe $\mathcal{C}^k$ avec

$$\boxed{(f*g)^{(k)} = f * \left(g^{(k)}\right)}$$

26. Par définition

$$\widehat{f*g}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} (f*g)(x)e^{-ix\xi}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi}f(t)g(x-t)\,dt\right)\,dx$$

Avec le résultat admis,

$$\widehat{f*g}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} f(t)g(x-t)\,dx \right) dt$$

On pose $u = x - t$ dans l'intégrale intérieure :

$$\widehat{f*g}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(u+t)\xi} f(t)g(u)\,du \right) dt$$

et on peut "faire sortir" de l'intégrale les termes indépendants de la variable u

$$\widehat{f*g}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(f(t)e^{-it\xi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iu\xi} g(u)\,du \right) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-it\xi}\hat{g}(\xi)\,dt$$

Là encore $\hat{g}(\xi)$ peut sortir de l'intégrale et on obtient $\hat{f}(x)\hat{g}(x)$.

$$\boxed{\widehat{f*g} = \hat{f}\hat{g}}$$

II. C - Introduction d'une fonction plateau

27. φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ par théorèmes d'opération. On prouve par récurrence que

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \exists P_k \in \mathbb{R}[X],\ \forall t > 0,\ \varphi^{(k)}(t) = P_k(1/t)e^{-1/t}$$

   - C'est vrai au rang 0 avec $P_0 = 1$.
   - Supposons le résultat vrai jusqu'à un rang $k \geq 0$. On peut alors redériver et obtenir

$$\forall t > 0,\ \varphi^{(k)}(t) = \left(-\frac{1}{t^2}P_k'(1/t) + \frac{1}{t^2}P_k(1/t) \right) e^{-1/t}$$

   $P_{k+1} = X^2(-P_k' + P_k)$ est un polynôme convenable au rang $k+1$.

   φ est aussi de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{-*}$ à dérivée nulle. Par le théorème de limite de la dérivée, il suffit de montrer que toutes les dérivées ont une limite finie à droite et gauche en 0 et que ces limites sont égales pour conclure que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. C'est le cas avec une limite nulle (évident à gauche et croissances comparées à droite).

$$\boxed{\varphi \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}}$$

28. On vérifie que

$$\forall t,\ \psi(t) = \varphi(1-t^2)$$

   En effet, si $|t| \geq 1$, $1 - t^2 \leq 0$ et $\varphi(1-t^2) = 0 = \psi(t)$ et si $|t| < 1$, $1 - t^2 > 0$ et $\varphi(1-t^2) = e^{1/(t^2-1)} = \psi(t)$. Par théorèmes d'opération,

$$\boxed{\psi \in \mathcal{C}^\infty}$$

29. $\boxed{\theta \in \mathcal{C}^\infty}$ comme primitive d'une telle fonction. De plus θ' est nulle sur chaque intervalle $]-\infty,-1]$ et $[1,+\infty[$ et donc θ est constante sur chacun de ces intervalles.

$$\boxed{\theta \text{ est constante sur }]-\infty,-1] \text{ et sur } [1,+\infty[}$$

Par théorème fondamental,

$$\theta(x) = \int_0^x \psi(t)\, dt$$

et les constantes sont

$$A = -\int_{-1}^{0} e^{\frac{1}{t^2-1}}\, dt \quad \text{et} \quad B = \int_0^1 e^{\frac{1}{t^2-1}}\, dt$$

Dans les deux cas, on intègre une fonction continue positive non nulle et les intégrales sont > 0. Ainsi

$$\boxed{A < 0 < B}$$

et les constantes sont en particulier différentes.

30. Notons $h_1 = \frac{\psi - A}{B-A}$: c'est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, nulle sur $]-\infty, -1]$ et valant 1 sur $[1, +\infty[$.
$h_1(2x+3)$ vaut 0 si $x \leq -2$ et vaut 1 si $x \geq -1$.

Notons $h_2 = \frac{\psi - B}{A-B}$: c'est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, nulle sur $[1, +\infty[$ et qui vaut 1 sur $]-\infty, -1]$.
$h_2(2x-3)$ vaut 0 si $x \geq 2$ et vaut 1 si $x \geq 1$.

La fonction $\rho = h_1 h_2$ est nulle hors de $]-2, 2[$ et vaut 1 sur $[-1, 1]$.

$$\boxed{\text{Il existe } \rho \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}), \text{ constante égale à 1 sur } [-1,1] \text{ et constante égale à 0 sur } \mathbb{R}\backslash[-2,2]}$$

II.D -Inégalités de Bernstein

31. On remarque tout d'abord que

$$r(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{+2} e^{ix\xi}\rho(\xi)\, d\xi$$

On utilise le théorème de régularité des intégrales à paramètres.

- Pour tout x, $\xi \mapsto e^{ix\xi}\rho(\xi)$ est continue sur le segment et donc intégrable sur ce segment.
- Pour tout $\xi \in [-2, 2]$, $x \mapsto e^{ix\xi}\rho(\xi)$ est de classe C^1 de dérivée $x \mapsto i\xi e^{ix\xi}\rho(\xi)$.
- Pour tout x, $\xi \mapsto i\xi e^{ix\xi}\rho(\xi)$ est continue.
- On a enfin, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $\xi \in [-2, 2]$, $|i\xi e^{ix\xi}\rho(\xi)| \leq 2\|\rho\|_{\infty,[-2,2]}$ qui est intégrable sur le segment $[-2, 2]$.

$$\boxed{r \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \text{ et } r'(x) = \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \xi e^{ix\xi}\rho(\xi)\, d\xi}$$

32. Utilisons à nouveau l'expression ci-dessus de r. Par intégrations par parties (sur un segment) et comme ρ et toutes ses dérivées sont nulles en 2 et -2, on trouve

$$2\pi x^2 r(x) = i\int_{-2}^{+2} x e^{ix\xi}\rho'(\xi)\, d\xi = -\int_{-2}^{+2} e^{ix\xi}\rho''(\xi)\, d\xi$$

et ainsi

$$|x^2 r(x)| \leq \frac{1}{2\pi} 4\|\rho''\|_{L^\infty([-2,2])}$$

$$\boxed{x \mapsto x^2 r(x) \text{ est bornée sur } \mathbb{R}}$$

r est continue sur $\mathbb{R}$ et les seuls problèmes d'intégrabilité sont au voisinage des infinis. En notant M un majorant de $x^2 r(x)$, on a $|r(x)| \leq M/x^2$ qui prouve cette intégrabilité par comparaison aux fonctions de Riemann.

$$\boxed{r \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}}$$

Enfin, on a $|r(x)| \leq \frac{2}{\pi}\|\rho\|_{L^\infty([-2,2])}$ et

$$\boxed{r \text{ est bornée sur } \mathbb{R}}$$

33. Commençons par le cas $\lambda = 1$. Les fonctions f et r vérifient les hypothèses de la question 26 et on a donc $\widehat{f * r} = \hat{f}\hat{r}$.
Par ailleurs, le second résultat d'inversion de Fourier donne $\rho = \hat{r}$ et $\hat{r}$ est donc égale à 1 sur $[-1, 1]$.
Ainsi, $\hat{f}\hat{r}$ est égale à $\hat{f}$ sur $[-1, 1]$ mais cela est aussi vrai ailleurs (où il y a nullité).
On a donc $\widehat{f * r} = \hat{f}\hat{r} = \hat{f}$ et donc $f * r = f$ par formule d'inversion de Fourier.

Pour un $\lambda > 0$ quelconque, on remarque que (changement de variable $u = \lambda t$)

$$f * r_\lambda(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)r(\lambda t)\,dt = \frac{1}{\lambda}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x - \frac{u}{\lambda})r(u)\,du = \frac{1}{\lambda}(f_{1/\lambda} * r)(\lambda x)$$

Or, $\widehat{f_{1/\lambda}}(x) = \lambda\hat{f}(\lambda x)$ est nulle en dehors du segment $[-1, 1]$, intégrable sur $\mathbb{R}$ et $f_{1/\lambda} \in L^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. On peut donc, avec le premier cas, affirmer que $f_{1/\lambda} * r = f_{1/\lambda}$. Ainsi

$$f * r_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda} f_{1/\lambda}(\lambda x) = \frac{1}{\lambda} f(x)$$

$$\boxed{f = \lambda f * r_\lambda}$$

34. La question 25 donne alors en dérivant (r et sa dérivée sont bornées) $f' = \lambda f * (r_\lambda)'$ et la question 24 indique que
$$\|f'\|_\infty \leq \lambda \|f\|_\infty \|(r_\lambda)'\|_1$$
Il suffit alors de remarquer que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |(r_\lambda)'(x)|\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\lambda r'(\lambda x)|\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |r'(u)|\,du$$

pour conclure que

$$\boxed{\|f'\|_\infty \leq \lambda \|f\|_\infty \|r'\|_1}$$