

# DM05 à rendre lundi 25/11/2024

## Théorème de Müntz

On désigne par  $C([0, 1])$  l'espace vectoriel des fonctions réelles continues sur  $[0, 1]$ . Pour tout  $\lambda \geq 0$ , on note  $\phi_\lambda$  l'élément de  $C([0, 1])$  défini par  $\phi_\lambda(x) = x^\lambda$ . Par convention on a posé  $0^0 = 1$  de sorte que  $\phi_0$  est la fonction constante 1.

Soit  $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$  une suite de réels  $\geq 0$  deux à deux distincts. On note  $W$  le sous-espace vectoriel de  $C([0, 1])$  engendré la famille  $(\phi_{\lambda_k})_{k \in \mathbb{N}}$ . Le but du problème est d'établir des critères de densité de l'espace  $W$  dans  $C([0, 1])$  pour l'une ou l'autre des deux normes classiques  $N_\infty$  ou  $N_2$  définies par :

$$N_\infty(f) = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)| \quad \text{et} \quad N_2(f) = \left( \int_0^1 |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

*La question préliminaire et les parties A, B, C et D sont indépendantes les unes des autres.*

### Question préliminaire

1. Montrer que  $(\phi_\lambda)_{\lambda \geq 0}$  est une famille libre de  $C([0, 1])$ .

### A. Déterminants de Cauchy

On considère un entier  $n > 0$  et deux suites finies  $(a_k)_{1 \leq k \leq n}$  et  $(b_k)_{1 \leq k \leq n}$  de réels telles que  $a_k + b_k \neq 0$  pour tout  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Pour tout entier  $m$  tel que  $0 < m \leq n$ , le *déterminant de Cauchy* d'ordre  $m$  est défini par :

$$D_m = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1 + b_1} & \frac{1}{a_1 + b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1 + b_m} \\ \frac{1}{a_2 + b_1} & \frac{1}{a_2 + b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2 + b_m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_m + b_1} & \frac{1}{a_m + b_2} & \cdots & \frac{1}{a_m + b_m} \end{vmatrix}.$$

On définit la fraction rationnelle :

$$R(X) = \frac{\prod_{k=1}^{n-1} (X - a_k)}{\prod_{k=1}^n (X + b_k)}.$$

2. Montrer que si  $R(X)$  est de la forme  $R(X) = \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{X + b_k}$  (avec les  $A_k$  réels), alors

$$A_n D_n = R(a_n) D_{n-1}.$$

*On pourra pour cela considérer le déterminant obtenu à partir de  $D_n$  en remplaçant la dernière colonne par*

$$\begin{pmatrix} R(a_1) \\ R(a_2) \\ \vdots \\ R(a_n) \end{pmatrix}.$$

3. En déduire que

$$D_n = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} (a_i + b_j)}.$$

## B. Distance d'un point à une partie d'un espace normé

Soit  $E$  un espace vectoriel normé par une norme  $\|\cdot\|$ . On rappelle que la distance d'un élément  $x \in E$  à une partie non vide  $A$  de  $E$  est le réel noté  $d(x, A)$  défini par :

$$d(x, A) = \inf_{y \in A} \|x - y\|.$$

4. Montrer que  $d(x, A) = 0$  si et seulement si  $x$  est adhérent à  $A$ .

5. Montrer que si  $(A_n)_{n \geq 0}$  est une suite croissante de parties de  $E$  (pour l'inclusion) et si  $A = \bigcup_{n \geq 0} A_n$  alors  $d(x, A) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x, A_n)$ .

On considère un sous-espace vectoriel  $V$  de dimension finie de  $E$ , et on note

$$B = \{y \in E, \|y - x\| \leq \|x\|\}.$$

6. Montrer que  $B \cap V$  est compacte et que  $d(x, V) = d(x, B \cap V)$  pour tout  $x \in E$ .

7. En déduire que pour tout  $x \in E$ , il existe  $y \in V$  tel que  $d(x, V) = \|x - y\|$ .

## C. Distance d'un point à un sous-espace de dimension finie dans un espace euclidien

Dans cette partie, on suppose que la norme sur l'espace vectoriel  $E$  est définie à partir d'un produit scalaire  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  sur  $E$  :

$$\|x\| = \sqrt{\langle x | x \rangle}.$$

8. Montrer que si  $V$  est un sous-espace vectoriel de dimension finie de  $E$ , alors pour tout  $x \in E$ , la projection orthogonale de  $x$  sur  $V$  est l'unique élément  $y \in V$  vérifiant  $d(x, V) = \|x - y\|$ .

Pour toute suite finie  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E^n$ , on désigne par  $G(x_1, x_2, \dots, x_n)$  le déterminant de la matrice de Gram d'ordre  $n$  définie par :

$$M(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} \langle x_1 | x_1 \rangle & \langle x_1 | x_2 \rangle & \cdots & \langle x_1 | x_n \rangle \\ \langle x_2 | x_1 \rangle & \langle x_2 | x_2 \rangle & \cdots & \langle x_2 | x_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_n | x_1 \rangle & \langle x_n | x_2 \rangle & \cdots & \langle x_n | x_n \rangle \end{pmatrix}.$$

9. Montrer que  $G(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$  si et seulement si la famille  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  est liée.

10. On suppose que la famille  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  est libre et l'on désigne par  $V$  l'espace vectoriel qu'elle engendre. Montrer que, pour tout  $x \in E$ ,

$$d(x, V)^2 = \frac{G(x_1, x_2, \dots, x_n, x)}{G(x_1, x_2, \dots, x_n)}.$$

## D. Comparaison des normes $N_\infty$ et $N_2$

Pour toute partie  $A$  de  $C([0, 1])$ , on note  $\overline{A}^\infty$  et  $\overline{A}^2$  les adhérences de  $A$  pour les normes  $N_\infty$  et  $N_2$  respectivement. Pour  $f \in C([0, 1])$ , la notation  $d(f, A)$  désigne toujours la distance de  $f$  à  $A$  relativement à la norme  $N_2$  (on ne considérera jamais, dans l'énoncé, la distance d'un élément à une partie relativement à la norme  $N_\infty$ ).

11. Montrer que pour tout  $f \in C([0, 1])$ ,  $N_2(f) \leq N_\infty(f)$ .

En déduire que pour toute partie  $A$  de  $C([0, 1])$ , on a  $\overline{A}^\infty \subset \overline{A}^2$ .

On considère l'ensemble

$$V_0 = \{f \in C([0, 1]), f(0) = 0\},$$

et on rappelle que  $\phi_0$  désigne la fonction constante 1.

12. Montrer que  $\phi_0 \in \overline{V_0}^2$ .
13. En déduire que  $V_0$  est dense dans  $C([0, 1])$  pour la norme  $N_2$ , mais n'est pas dense pour la norme  $N_\infty$ .
14. Montrer que si  $V$  est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel normé, alors son adhérence  $\overline{V}$  est également un espace vectoriel.
15. On admet le théorème suivant, dû à Weierstrass : pour toute fonction  $f \in C([0, 1])$ , il existe une suite  $(f_n)$  de fonctions polynomiales de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$  telles que  $N_\infty(f_n - f) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .  
En utilisant ce théorème, montrer qu'un sous-espace vectoriel  $V$  de  $C([0, 1])$  est dense pour la norme  $N_\infty$  si et seulement si pour tout entier  $m \geq 0$ ,  $\phi_m \in \overline{V}^\infty$ .
16. En déduire qu'un sous-espace vectoriel  $V$  de  $C([0, 1])$  est dense pour la norme  $N_2$  si et seulement si pour tout entier  $m \geq 0$ ,  $\phi_m \in \overline{V}^2$ .

## E. Un critère de densité de $W$ pour la norme $N_2$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $W_n$  l'espace vectoriel engendré par la famille finie  $(\phi_{\lambda_k})_{0 \leq k \leq n}$ .

On rappelle que la famille  $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$  a été définie au début du problème.

17. Montrer que l'espace  $W$  (défini aussi au début du problème) est dense dans  $C([0, 1])$  pour la norme  $N_2$  si et seulement si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(\phi_\mu, W_n) = 0$  pour tout entier  $\mu \geq 0$ .
18. Montrer que pour tout  $\mu \geq 0$ ,

$$d(\phi_\mu, W_n) = \frac{1}{\sqrt{2\mu+1}} \prod_{k=0}^n \frac{|\lambda_k - \mu|}{\lambda_k + \mu + 1}.$$

19. Montrer que pour tout  $\mu \geq 0$ , la suite  $\left(\frac{|\lambda_k - \mu|}{\lambda_k + \mu + 1}\right)_{k \in \mathbb{N}}$  tend vers 1 si et seulement si la suite  $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$  tend vers  $+\infty$ .  
(On pourra pour cela étudier les variations de  $x \mapsto \frac{\mu - x}{x + \mu + 1}$  sur  $[0, \mu]$ ).
20. En déduire que l'espace  $W$  est dense dans  $C([0, 1])$  pour la norme  $N_2$  si et seulement si la série  $\sum_k \frac{1}{\lambda_k}$  est divergente.

## F. Un critère de densité de $W$ pour la norme $N_\infty$

21. Montrer que si  $W$  est dense dans  $C([0, 1])$  pour la norme  $N_\infty$ , alors la série  $\sum_k \frac{1}{\lambda_k}$  est divergente.
22. Soit  $\psi = \sum_{k=0}^n a_k \phi_{\lambda_k}$  un élément quelconque de  $W_n$ . Montrer que si  $\lambda_k \geq 1$  pour tout  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ , alors pour tout  $\mu \geq 1$ , on a :

$$N_\infty(\phi_\mu - \psi) \leq N_2(\mu\phi_{\mu-1} - \sum_{k=0}^n a_k \lambda_k \phi_{\lambda_k-1}).$$

23. On suppose que la suite  $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$  vérifie les deux conditions suivantes :

$$\begin{cases} (i) : & \lambda_0 = 0 \\ (ii) : & \lambda_k \geq 1 \text{ pour tout } k \geq 1. \end{cases}$$

Montrer que sous ces conditions, si la série  $\sum_k \frac{1}{\lambda_k}$  est divergente, alors  $W$  est dense dans  $C([0, 1])$  pour la norme  $N_\infty$ .

24. Montrer que la conclusion précédente est encore valable si on remplace la condition (ii) par la condition plus faible :

$$(ii') : \quad \inf_{k \geq 1} \lambda_k > 0$$

\* \* \*