Mr : HAMANI Ahmed

I-Généralités sur les espaces nilpotents

1. Soit $u \in \mathcal{N}(E)$, alors $\exists r \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^r = 0$, donc pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $(u^k)^p = (u^p)^k = 0$, d'où $u^k \in \mathcal{N}(E)$ et $Sp(u^k) = \{0\}$ et par suite $tr(u^k) = 0$.
2. • Soit $f \in \mathcal{N}_{\mathbf{B}}$, alors $\chi_f = X^n$, donc par théorème de Cayley-Hamilton, $f^n = 0$, donc $f \in \mathcal{N}$.
   • L'endomorphisme nul est de matrice nulle dans la base **B**, donc appartient à $\mathcal{N}_{\mathbf{B}}$.
   • Soit $f, g \in \mathcal{N}_{\mathbf{B}}$, alors $A = Mat_{\mathbf{B}}(f)$ et $B = Mat_{\mathbf{B}}(g)$ sont triangulaires supérieures strictes, donc pour tous $\alpha \in \mathbb{R}$ et tous (i,j) tel que $i \geq j$, $(Mat_{\mathbf{B}}(f+\alpha g))_{i,j} = (Mat_{\mathbf{B}}(f))_{i,j} + \alpha\,(Mat_{\mathbf{B}}(g))_{i,j} = 0$, donc $Mat_{\mathbf{B}}(f+\alpha g) \in T_n^{++}(\mathbb{R})$.
   On conclut que $\mathcal{N}_B$ est un s-ev nilpotent.
   • $\mathcal{N}_B$ est isomorphe à l'ensemble des matrices triangulaires supérieures, donc de dimension $\dfrac{n(n-1)}{2}$.
3. Soit $\nu(u)$ le nilindice de $u \in \mathcal{N}_{\mathbf{B}}$, alors $u \in \mathcal{N}(E)$, donc $\chi_u = X^n$ ce qui entraine que $u^n = 0$ et par suite $\nu_u \in [[1,n]]$, d'où les inclusions $\{\nu(u)\ /\ u \in \mathcal{N}\} \subset \{\nu(u)\ /\ u \in \mathcal{N}(E)\} \subset [[1,n]]$.
   Soit $k \in [[1,n]]$ et notons $\mathbf{B} = \{e_1, ..., e_n\}$, alors l'endomorphisme u définit dans la base **B** par $u(e_j) = 0$ pour $j \in [[1, n-k+1]]$ et $u(e_j) = e_{j-n+k-1}$ pour $j \in [[n-k+2, n]]$ est d'indice de nilpotence $\nu_u = k$ et $u \in \mathcal{N}_{\mathbf{B}}$, donc $k \in \{\nu_u\ /\ u \in \mathcal{N}_{\mathbf{B}}\}$, ce qui assure l'égalité entre ces ensembles.
4. • Supposons que la famille est liée, alors il existe une famille $(\alpha_i)_{0\leq i\leq p-1}$ non nulle tel que $\displaystyle\sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i u^i(x) = 0$
   et considérons $j = \min\{k \in [[0, p-1]]\ /\ \alpha_k \neq 0\}$, alors $\displaystyle\sum_{i=j}^{p-1} \alpha_i u^i(x) = 0$ et en composant $p-1-j$ fois par u, on obtient $\alpha_j u^{p-1}(x) = 0$, ce qui est en contradiction avec $\alpha_j \neq 0$ et $u^{p-1}(x) \neq 0$.
   • Soit $\alpha_0, ..., \alpha_{p-1}, \beta_0, ..., \beta_{q-1}$ des réels tels que $\displaystyle\sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i u^i(x) + \sum_{j=0}^{q-1} \beta_j u^j(y) = 0$, alors en composant par u^q, on obtient $\alpha_0 u^q(x) + \alpha_1 u^{q+1}(x) + ... + \alpha_{r-1} u^{p-1}(x) = 0$ où on a posé $r = p - q \geq 0$.
   La liberté de la famille $(x, u(x), ..., u^{p-1}(x))$ exige que $\alpha_0 = ...\alpha_{r-1} = 0$.
   On obtient donc $\displaystyle\sum_{i=r}^{p-1} \alpha_i u^i(x) + \sum_{j=0}^{q-1} \beta_j u^j(y) = 0$, et en composant successivement par $u^{q-1}, u^{q-2}, ..., u$, on aura successivement $\alpha_r u^{p-1}(x) + \beta_0 u^{q-1}(y) = 0, ..., \alpha_{p-2} u^{p-1}(x) + \beta_{q-2} u^{q-1}(y) = 0$ et la liberté de $(u^{p-1}(x), u^{q-1}(y))$ entrainera $(\alpha_r, \beta_0) = ...(\alpha_{p-2}, \beta_{q-2}) = (0,0)$ et finalement $\alpha_{p-1} u^{p-1}(x) + \beta_{q-1} u^{q-1}(y) = 0$, donc $(\alpha_{p-1}, \beta_{q-1}) = (0,0)$.
5. Soit $u \in \mathcal{N}(E)$ de nilindice $p \geq n-1$.
   • Si $p = n$, alors $\mathbf{B}' = (x, u(x), ..., u^{n-1})$ est une base de E et la matrice de u dans cette base est
   $$\begin{pmatrix} 0 & & & (O) \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ (O) & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
   C'est clair que $Im(u) = Vect(u(x), ..., u^{n-1}(x))$, $Ker(u) = Vect(u^{n-1}(x))$ et $Im(u^{n-1}) = Vect(u^{n-1}(x))$ et on a bien le résultat attendu.
   • Si $p = n-1$, alors $(x, u(x), ..., u^{n-2}(x))$ est libre, on la complète en une base de E, $\mathbf{B}' = (x, u(x), ..., u^{n-2}(x), y)$, alors $u^{n-1}(y) = 0$ et d'après la question précédente, $(u^{n-2}(x), u^{n-2}(y))$ est liée, si non on aura $\mathbf{B}' \cup \{y, u(y)\}$ libre avec un cardinal $\geq n+1$.
   • $Im(u) = Vect(u(x), ..., u^{n-2}(x), u(y))$, $Ker(u) \subset Vect(u^{n-2}(x), y)$ et $Im(u^{n-2}) = Vect(u^{n-2}(x), u^{n-2}(y)) = Vect(u^{n-2}(x))$.
   Or $dim(Ker(u)) \in \{1, 2\}$.
   - Si $y \in Ker(u)$, $u(y) = 0$, donc par liberté de $(u(x), ..., u^{n-2}(x), y)$, $y \notin Im(u)$, donc $Im(u) \cap Ker(u) = Vect(u^{n-2}(x)) = Im(u^{n-2})$.
   - Si $y \notin Ker(u)$, alors $Ker(u) = Vect(u^{n-2}(x))$.

II-Endomorphismes de rang 1 d'un espace euclidien)

6. • Pour tout $z \in E$, $a, b \in E$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, $((a+\alpha b)\otimes x)(z) = (a+\alpha b|z).x = (a|z).x + \alpha(b|z).x = (a\otimes x)(z) + \alpha(b\otimes x)(z) = ((a\otimes x + \alpha b\otimes x))(z)$.
   • Notons $\varphi : E \longrightarrow \mathcal{L}(E)$ définie par $\forall a \in E, \varphi(a) = a \otimes x$.
   Soit $a \in Ker(\varphi)$, alors $\forall z \in E,\ \varphi(a)(z) = (a|z).x = 0$, or $x \neq 0$, donc avec $z = a$, on obtient $(a|a) = \|a\|^2 = 0$, donc $a = 0$, ce qui assure l'injectivité de φ.
   $\forall a \in E$, $\varphi(a) = a \otimes x$ est linéaire et $Im(\varphi(a)) \subset Vect(x)$, donc $Im(\varphi) \subset \{u \in \mathcal{L}(E)\ /\ Im(u) \subset Vect(x)\}$.
   Complétons x en une base de E, **B**$' = (x, e_2, ..., e_n)$ et soit $u \in \mathcal{L}(E)$, alors $Im(u) \subset Vect(x)$ si, et seulement si, la matrice de u dans cette base est de la forme $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$,
   donc $dim\{u \in \mathcal{L}(E)\ /\ Im(u) \subset Vect(x)\} = n = dim(E)$, ce qui entraine que φ est bijective de E vers $\{u \in \mathcal{L}(E)\ /\ Im(u) \subset Vect(x)\}$.
7. $(a\otimes x)(x) = (a|x).x$, donc en choisissant la base précédente **B**$'$, on aura $Tr(a\otimes x) = Tr\left(Mat_{\mathbf{B}'}(a\otimes x)\right) = a_1 = (a|x)$.

III- Deux lemmes

8. Par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$.
   • Pour $k = 1$, $(u+tv)^1 = u + tv = t^0u + t^1v$, donc $f_0^{(1)} = u, f_1^{(1)} = v$.
   • Supposons qu'on a le résultat pour un certain $k \geq 2$, alors
   $$\forall t \in \mathbb{R},\ (u+tv)^{k+1} = (u+tv)^k(u+tv) = \sum_{i=0}^{k} t^i f_i^{(k)}(u+tv) = \sum_{i=0}^{k}(t^i f_i^{(k)}u + t^{i+1}f_i^{(k)}v) =$$
   $$= \sum_{i=0}^{k} t^i f_i^{(k)}u + \sum_{i=1}^{k+1} t^i f_{i-1}^{(k)}v = f_0^{(k)}u + \sum_{i=1}^{k} t^i(f_i^{(k)}u + f_{i-1}^{(k)}v) + t^{k+1}f_k^{(k)}v.$$
   ce qui donne $f_0^{(k+1)} = f_0^{(k)}u, f_{k+1}^{(k+1)} = f_k^{(k)}v$ et pour $i \in [[1,k]]$, $f_i^{(k+1)} = f_i^{(k)}u + f_{i-1}^{(k)}v$.
   Cette récurrence assure l'existence et l'unicité.
   Toujours par récurrence.
   • $f_0^{(1)} = u$, et si $f_0^{(k)} = u^k$, alors $f_0^{(k+1)} = f_0^{(k)}u = u^ku = u^{k+1}$.
   • $f_1^{(1)} = v$ et si $f_1^{(k)} = \displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} u^ivu^{k-1-i}$, alors $f_1^{(k+1)} = f_1^{(k)}u + f_0^{(k)}v = \displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} u^ivu^{k-i} + u^kv = \sum_{i=0}^{k} u^ivu^{k-i}$.
9. $u, v \in \mathcal{V}$, donc $\forall t \in \mathbb{R}$, $u + tv \in \mathcal{V}$, donc $u + tv$ est nilpotent et par suite $(u+tv)^p = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, ainsi $t \longmapsto (u+tv)^p$ est une fonction polynômiale vectorielle nulle, donc les $f_i^{(p)}$ sont nuls, en particulier $f_1^{(p)} = 0$.
10. Par linéarité de la trace,on obtient
   $$tr(f_1^{(k+1)}) = \sum_{i=0}^{k} tr(u^ivu^{k-i}) = \sum_{i=0}^{k} tr(u^kv) = (k+1)tr(u^kv).$$
   $u + tv$ est nilpotent, donc aussi pour $(u+tv)^{k+1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, ce qui entraine que $\forall t \in \mathbb{R}$,
   $0 = tr\left((u+tv)^{k+1}\right) = \displaystyle\sum_{i=0}^{k+1} t^i tr(f_i^{(k+1)})$, il s'agit d'une fonction polynômiale nulle, donc $\forall k \in \mathbb{N}$ $tr(f_i^{(k+1)}) = 0$, c'est à dire $tr(u^kv) = 0$, ce qui valide le lemme **A**.
11. $\mathcal{V}^* = \{x \in E\ /\ \exists u \in \mathcal{V},\ x \in Im(u^{p-1})\}$.
   $f_1^{(p-1)}(y) = \displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left((u+tv)^{p-1}(y) - f_0^{(p-1)}(y)\right) = \lim_{t\to 0}\left((u+tv)^{p-1}\left(\frac{1}{t}y\right) - u^{(p-1)}\left(\frac{1}{t}y\right)\right)$, donc $f_1^{(p-1)}(y)$ est limite d'une fonction à valeurs dans $K(\mathcal{V})$ qui est fermé comme sous-espace vectoriel de dimension finie, donc $f_1^{(p-1)}(y) \in K(\mathcal{V})$.
   $\displaystyle\sum_{i=0}^{p-1} u^ivu^{p-1-i} = 0$, donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{p-1} u^ivu^{p-1-i} = -vu^{p-1}$,
   et par suite $uf_1^{(p-1)} = \displaystyle\sum_{i=0}^{p-2} u^{i+1}vu^{p-2-i} = \sum_{i=1}^{p-1} u^ivu^{p-1-i} = -vu^{p-1}$, donc $u\left(f_1^{(p-1)}(y)\right) = -v\left(u^{p-1}(y)\right)$.
   On en déduit que $\forall x \in Im(u^{p-1})$, $\exists y \in E$ tel que $x = u^{p-1}(y)$, donc $v(x) = v\left(u^{p-1}(y)\right) = -u\left(f_1^{(p-1)}(y)\right) \in u\left(K(\mathcal{V})\right)$ vu que $f_1^{(p-1)}(y) \in K(\mathcal{V})$.

12. D'après la question $11.$, $\forall x \in Im(u^{p-1})$,$v(x) \in u(K(\mathcal{V}))$ pour tout $v \in \mathcal{V}$, c'est à dire $\forall x \in Im(u^{p-1})$, $\mathcal{V}x \subset u(K(\mathcal{V}))$.
   • On remarque que $u(Vect(x)) = \{0\}$, donc
   $K(\mathcal{V}) \subset Vect(x) + u(K(\mathcal{V})) \subset Vect(x) + u^2(K(\mathcal{V})) \subset ... \subset Vect(x) + u^k(K(\mathcal{V}))$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
   Donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $\lambda_k \in \mathbb{R}$, $y_k \in K(\mathcal{V})$ tel que $y = \lambda_k x + u^k(y_k)$.
   • Pour $k = p$, $y = \lambda_p x + u^p(y_p) = \lambda_p x \in Vect(x)$, donc $K(\mathcal{V}) \subset Vect(x)$.
   • De l'inclusion précédente, on aura $\mathcal{V}x \subset u(K(\mathcal{V})) \subset (Vect(x)) \subset \{0\}$, donc $\mathcal{V}x = \{0\}$.

IV Démonstration du théorème de Gerstenhaber

13. On considère l'applications linéaire $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{V} & \longrightarrow & E \\ v & \longmapsto & v(x) \end{array}$. $\mathcal{V}x = Im(\varphi)$, $\mathcal{W} = Ker(\varphi)$.
   On considère l'application linéaire $\psi : \begin{array}{ccc} \mathcal{W} & \longrightarrow & \mathcal{L}(H) \\ u & \longmapsto & \overline{u} \end{array}$. $\overline{\mathcal{V}} = Im(\psi)$, $\mathcal{Z} = Ker(\psi)$.
14. On applique le théorème du rang aux applications φ et ψ, on obtient $dim(\mathcal{V}) = dim(\mathcal{W}) + dim(\mathcal{V}x)$ et $dim(\mathcal{W}) = dim(\mathcal{Z}) + dim(\overline{\mathcal{V}})$, ce qui donne l'égalité $dim(\mathcal{V}) = dim(\mathcal{V}x) + dim(\mathcal{Z}) + dim(\overline{\mathcal{V}})$.
15. • $\mathcal{Z} = \{u \in \mathcal{W} \ / \ \overline{u} = 0\}$, or
   $\overline{u} = 0$ si, et seulement si, $\forall z \in H$, $\overline{u}(z) = \pi(u(z)) = 0$ si, et seulement si, $\forall z \in H, u(z) \in Vect(x)$ si, et seulement si, $u(H) \subset Vect(x)$.
   Donc $\mathcal{Z} = \{u \in \mathcal{W} \ / \ u(H) \subset Vect(x)\}$, or d'après la question 6, l'application $a \longmapsto a \otimes x$ est un isomorphisme de E dans $\{u \in \mathcal{L}(E) \,, / \ Im(u) \subset Vect(x)\}$, donc pour chaque $u \in \mathcal{W}$ tel que $u(H) \subset Vect(x)$, notons L le sous-espace de E image réciproque de $\mathcal{Z}$ par cette application, alors $\mathcal{Z} = \{a \otimes x \ / \ a \in L\}$, et $\mathcal{Z}$ et L sont isomorphes , donc $dim(\mathcal{Z}) = dim(L)$.
   • $\forall a \in L$, $a \otimes x \in Z$, donc nilpotente et par suite grâce à la question 7, $tr(a \otimes x) = (a|x) = 0$, donc $x \in L^{\perp}$.
16. • Soit $v \in \mathcal{V}$. Montrons que $v(x) \in L^{\perp}$.
   Soit $a \in L$, alors $\forall z \in\in E$, $(a \otimes v(x))(z) = (a|z).v(x) = v((a|z)x) = v((a \otimes x)(z)) = (v \circ (a \otimes x))(z)$, donc $a \otimes v(x) = v \circ (a \otimes x)$, en appliquant le lemme **A** avec $k = 1$, on obtient $tr(v \circ (a \otimes x)) = tr(a \otimes v(x)) = (a|v(x)) = 0$, donc $v(x) \in L^{\perp}$.
   $x \in L^{\perp}$, $u \in \mathcal{V}$, donc $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $u^k \in \mathcal{V}$, et vu que $\mathcal{V}x \subset L^{\perp}$, on aura $u^k(x) \in L^{\perp}$.
17. • S'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $\lambda x \in \mathcal{V}x$, alors il existe $u \in \mathcal{V}$ tel que $\lambda x = u(x)$, donc $\lambda \in Sp(u)$, mais u est nilpotent, donc $\lambda = 0$, ce qui contredit $\lambda \neq 0$.
   • D'après les deux questions précédentes $\mathcal{V}x \subset L^{\perp}$ et $Vect(x) \subset L^{\perp}$ et $Vect(x)$ n'est pas inclus dans $\mathcal{V}x$, donc l'inclusion $\mathcal{V}x \subset L^{\perp}$ est stricte, d'où
   $dim(\mathcal{V}x) < dim(L^{\perp})$ et par suite $dim(\mathcal{V}x) + dim(L) < dim(L^{\perp}) + dim(L) = n$,
   c'est à dire $dim(\mathcal{V}x) + dim(L) \leq n - 1$.
18. π est la projection orthogonal sur H, donc $\forall z \in H$, $\pi(z) = z$, donc $\overline{u}^0(z) = z = \pi(u^0(z))$.
   Supposons que $\forall z \in H$, $\overline{u}^k(z) = \pi(u^k(z))$ pour un certain $k \in \mathbb{N}^*$.
   On fait la remarque suivante : Tout $z \in E$ se décompose par $z = \alpha x + y$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ et $y \in H$, alors pour tout $u \in \mathcal{W}$, $u(x) = 0$, donc $u(z) = u(y)$ et $\pi(z) = y$ et par suite $u(\pi(z)) = u(y) = u(z)$.
   Alors $\forall z \in H$, $\overline{u}^{k+1}(z) = \overline{u}(\overline{u}^k(z)) = \overline{u}(\pi(u^k(z))) = \overline{u}(u^k(z)) = \pi(u(u^k(z))) = \pi(u^{k+1}(z))$,ce qui achève la récurrence.
   • Soit $u \in \mathcal{W}$, u étant nilpotent, donc il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^k = 0$, donc $\overline{u}^k = \pi \circ u^k = 0$, donc $\overline{\mathcal{V}}$ est un sous-espace nilpotent.
19. $\overline{\mathcal{V}}$ est un sous-espace de $\mathcal{L}(H)$ nilpotent et $dim(H) = n - 1$, donc par hypothèse de récurrence,
   $dim(\overline{\mathcal{V}}) \leq \dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$, donc avec l'égalité de la question 14 et l'inégalité de la question 17, on obtient
   $dim(\mathcal{V}) = dim(\mathcal{V}x) + dim(L) + dim(\overline{\mathcal{V}}) \leq n - 1 + \dfrac{(n-1)(n-2)}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$.
20. • De l'inégalité de la question 17 et l'égalité de la question 14, on tire $dim(\overline{\mathcal{V}}) \geq \dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$, or par hypothèse de récurrence $dim(\overline{\mathcal{V}}) \leq \dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$, donc $dim(\overline{\mathcal{V}}) = \dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$.
   • Avec ces résultats, l'égalité de la question 14 entraine que, $dim(\mathcal{V}x) + dim(L) = n - 1$, donc
   $dim(Vect(x)) + dim(\mathcal{V}x) + dim(L) = n$.
   • On a les inclusions entre sous-espaces, $Vect(x) \subset L^{\perp}$ et $\mathcal{V}x \subset L^{\perp}$, donc $Vect(x) \oplus \mathcal{V}x \subset L^{\perp}$, de plus on a égalité de dimensions, donc $Vect(x) \oplus \mathcal{V}x = L^{\perp}$.
   • D'après la question 16, pour tout $v \in \mathcal{V}$, et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $v^k(x) \in L^{\perp}$, donc $v^k(x) \in Vect(x) \oplus \mathcal{V}x$.

21. • d'après la question 18, $\overline{\mathcal{V}}$ est un sous-espace nilpotent de $\mathcal{L}(H)$ de dimension $\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$ et $dim(H) = n-1$, donc par hypothèse de récurrence, il existe une base **B**$'$ de H tel que pour tout $v \in \mathcal{W}$, $Mat_{\mathbf{B}'}(\overline{v})$ est triangulaire supérieure stricte. Soit $v \in \mathcal{L}(H)$ de matrice dans la base **B**$'$ de taille $n-1$, est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & & (O) \\ & 0 & \ddots & \\ & (O) & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$, alors $v^{n-2} \neq 0$.

    • Considérons $u \in \mathcal{V}$ dont la restriction à H est égal à v, alors $u^{n-2} \neq 0$, donc le nilindice générique de $\mathcal{V}$ est supérieur ou égale à $n-1$.

    • Si $\mathcal{V}x = \{0\}$, alors pour tout $v \in \mathcal{V}$, $v(x) = 0$.

    On considère la base de E, **B** $=$ **B**$'$ $\cup \{x\}$, alors tout élément $v \in \mathcal{V}$ est représenté par une matrice triangulaire supérieure stricte.

22. • Si $v^{p-1} = 0$, alors $Im(v^{p-1}) = \{0\} \subset Vect(x) \oplus \mathcal{V}x$.

    • Si $v^{p-1} \neq 0$, alors le nilindice de v est $p \geq n-1$, donc d'après la question 5, $Im(v^{p-1}) = Im(v) \cap Ker(v)$ et $dim(v^{p-1}) = 1$.

    $v(x) \neq 0$, considérons $j = \max\{k \in [[1, p-1]] \ / \ v^k(x) \neq 0\}$.

    Alors $v^{j+1}(x) = 0$, donc $v^j(x) \in Im(v) \cap Ker(v) = Im(v^{p-1})$ et par suite $Im(v^{p-1}) = Vect(v^j(x))$, et par la question 20, $v^j(x) \in Vect(x) \oplus \mathcal{V}x$, donc $Im(v^{p-1}) \subset Vect(x) \oplus \mathcal{V}x$.

23. $v_0(x) \neq 0$, donc $\exists j \in [[1, n]]$ tel que $\pi_j(v_0(x)) = (v_0(x))_j \neq 0$ où π_j la j-ième projection qui envoie la j-ième composante d'un vecteur de E dans une base fixée.

    Soit $z \in E$. Considérons une forme linéaire $\varphi : E \to \mathbb{R}$ nulle sur $Vect(x) \oplus \mathcal{V}x$, et la fonction polynômiale $P : t \longmapsto \pi_j\left((v + tv_0)(x)\right).\varphi\left((v+tv_0)^{p-1}(z)\right)$ de degré $\leq p$.

    D'après la question précédente, pour tout $t \in \mathbb{R}$ tel que $(v + tv_0)(x) \neq 0$,

    $\forall z \in E$, $(v + tv_0)^{p-1}(z) \in Vect(x) \oplus \mathcal{V}x$, donc $P(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ tel que $(v + tv_0)(x) \neq 0$, donc P admet une infinité de racines, donc $P = 0$.

    Or $\pi_j(v_0(x)) \neq 0$, donc $t \longmapsto \pi_j\left((v + tv_0)(x)\right)$ est non nul, ce qui exige $\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi\left((v + tv_0)^{p-1}(z)\right)$, en particulier pour $t = 0$, $\varphi\left(v^{p-1}(z)\right) = 0$, ceci pour toute forme φ nulle sur $Vect(x) \oplus \mathcal{V}x$, en particulier pour les projections qui envoient un vecteur sur les composantes dans $(Vect(x) \oplus \mathcal{V}x)^{\perp}$, on obtient $v^{p-1}(z) \in Vect(x) \oplus \mathcal{V}x$, ce qui entraine que $Im(u^{p-1}) \subset Vect(x) \oplus \mathcal{V}x$.

24. On vient de montrer que pour tout $v \in \mathcal{V}$, $Im(v^{p-1}) \subset Vect(x) \oplus \mathcal{V}x$, donc $\displaystyle\bigcup_{v \in \mathcal{V}} Im(v^{p-1}) \subset Vect(x) \oplus \mathcal{V}x$ et par suite $K(\mathcal{V}) = Vect\left(\displaystyle\bigcup_{v \in \mathcal{V}} Im(v^{p-1})\right) \subset Vect(x) \oplus \mathcal{V}x$, ce qui entraine par le lemme **B**, que $\mathcal{V}x = \{0\}$ et par la question 21, il existe une base de E dans laquelle tout $v \in \mathcal{V}$ est représenté par une matrice triangulaire stricte.