SESSION 2023

Concours commun Centrale

MATHÉMATIQUES 1. FILIERE MP/MPI

I - Etude d'un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$

I.A -

Q 1. Soit $a \in \mathbb{K}$. E_a est une application de $\mathbb{K}[X]$ dans lui-même et de plus, pour tout $(p, q) \in (\mathbb{K}[X])^2$ et tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$,

$$E_a(\lambda p + \mu q) = \lambda p(X + a) + \mu q(X + a) = \lambda E_a(p) + \mu E_a(q).$$

Donc, $E_a \in \mathscr{L}(\mathbb{K}[X])$. Ensuite, $E_a \circ E_{-a} = E_{-a} \circ E_a = \mathrm{Id}_{\mathbb{K}[X]}$. Donc, E_a est un automorphisme de $\mathbb{K}[X]$, de réciproque E_{-a}.

I.B -

Q 2. Pour tout $p \in \mathbb{K}[X]$, $J(p)$ est un polynôme et de plus, pour tout $(p, q) \in (\mathbb{K}[X])^2$ et tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$J(\lambda p + \mu q)(x) = \int_x^{x+1} (\lambda p(t) + \mu q(t))\ dt = \lambda \int_x^{x+1} p(t)\ dt + \mu \int_x^{x+1} q(t)\ dt = (\lambda J(p) + \mu J(q))(x),$$

puis $J(\lambda p + \mu q) = \lambda J(p) + \mu J(q)$. Donc, $J \in \mathscr{L}(\mathbb{K}[X])$.

Q 3. • Soit $k \in \mathbb{N}$. Pour tout réel x,

$$J\left(X^k\right)(x) = \int_x^{x+1} t^k\ dt = \frac{1}{k+1}\left((x+1)^{k+1} - x^{k+1}\right) = \frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k}\binom{k+1}{j}x^j,$$

puis $J(X^k) = \dfrac{1}{k+1}\displaystyle\sum_{j=0}^{k}\binom{k+1}{j}X^j$. En particulier, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\deg\left(J\left(X^k\right)\right) = k$.

• Soit $p \in \mathbb{K}[X]$. Si $p = 0$, $\deg(J(p)) = -\infty = \deg(p)$. Sinon, on pose $p = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $a_n \neq 0$ de sorte que $\deg(p) = n$. Puisque $\deg\left(\displaystyle\sum_{k<n} a_k J\left(X^k\right)\right) < n$ et que $\deg\left(a_n J\left(X^n\right)\right) = n$,

$$\deg(J(p)) = \deg\left(\sum_{k=0}^{n} a_k J\left(X^k\right)\right) = \deg\left(a_n J\left(X^n\right)\right) = n = \deg(p).$$

Donc, J conserve le degré.

• Soit $p \in \mathbb{K}[X]$. Si $p \neq 0$, $\deg(J(p)) = \deg(p) \geqslant 0$ et en particulier, $J(p) \neq 0$. Donc, $\mathrm{Ker}(J) = \{0\}$ puis J est injectif.

Ensuite, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $J\left(\mathbb{K}_n[X]\right) \subset \mathbb{K}_n[X]$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, J induit un endomorphisme J_n de l'espace de dimension finie $\mathbb{K}_n[X]$. Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, J_n est injectif, pour tout $n \in \mathbb{N}$, J_n est un automorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$.

Soit alors $q \in \mathbb{K}[X]$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $q \in \mathbb{K}_n[X]$. Il existe $p \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que $q = J_n(p) = J(p)$. Par suite, J est surjectif et finalement, J est un automorphisme de $\mathbb{K}[X]$.

I.C -

Q 4. Soit $k \in \mathbb{N}$. La fonction $t \mapsto t^k e^{-t}$ est continue sur $[0, +\infty[$. De plus, $t^2 \times t^k e^{-t} \underset{t \to +\infty}{=} o(1)$ d'après un théorème de croissances comparées et donc $t^k e^{-t} \underset{t \to +\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$. Ceci montre l'intégrabilité de la fonction $t \mapsto t^k e^{-t}$ sur un voisinage de $+\infty$ puis la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^k e^{-t}\ dt$. Ainsi, $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^k e^{-t}\ dt$ existe dans $\mathbb{R}$.

Soit $k \in \mathbb{N}$. Les deux fonctions $t \mapsto t^{k+1}$ et $t \mapsto -e^{-t}$ sont de classe C^1 sur $[0,+\infty[$. Au vu de la convergence de chacun des termes en $+\infty$, on peut effectuer une intégration par parties qui fournit

$$\int_0^{+\infty} t^{k+1}e^{-t}\ dt = \left[t^{k+1}\left(-e^{-t}\right)\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty}(k+1)t^k\left(-e^{-t}\right)dt = (k+1)\int_0^{+\infty} t^k e^{-t}\ dt.$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. En tenant compte de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\ dt = \left[-e^{-t}\right]_0^{+\infty} = 1$, on en déduit que $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^k e^{-t}\ dt = k\times(k-1)\times\ldots\times 2\times 1\times 1 = k!$, ce qui reste vrai pour $k=0$.

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \int_0^{+\infty} t^k e^{-t}\ dt = k!.$$

Q 5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, au vu de la convergence de toutes les intégrales considérées,

$$L\left(X^n\right)(x) = -\int_0^{+\infty} e^{-t}n(x+t)^{n-1}\ dt = -\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\left(\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{n-1-k}\ dt\right)x^k = -n!\sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^k}{k!}.$$

D'autre part, $L(1)=0$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $L\left(X^n\right) \in \mathbb{K}[X]$.

Soit $p \in \mathbb{K}[X]$. On pose $p = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ où $n \in \mathbb{N}$. Pour tout réel x, toutes les intégrales considérées étant convergentes, $L(p)(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k L\left(X^k\right)(x)$ et donc $L(p) \in \mathbb{K}[X]$. Ainsi, L est une application de $\mathbb{K}[X]$ dans lui-même.

Soit $(p,q) \in (\mathbb{K}[X])^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$. Pour tout réel x,

$$L(\lambda p+\mu q)(x) = \lambda\int_0^{+\infty} e^{-t}p'(x+t)\ dt + \mu\int_0^{+\infty} e^{-t}q'(x+t)\ dt = (\lambda L(p)+\mu L(q))(x)$$

et donc $L(\lambda p+\mu q) = \lambda L(p)+\mu L(q)$. Donc, $L \in \mathscr{L}(\mathbb{K}[X])$.

Enfin, $L(1)=0$ et donc $\mathrm{Ker}(L) \neq \{0\}$. L n'est pas inversible.

II - Formule de Taylor pour les endomorphismes shift-invariants de $\mathbb{K}[X]$

II.A -

Q 6. Pour tout $a \in \mathbb{K}$, $E_a \circ I = I \circ E_a = E_a$ et donc I est shift-invariant.

Soit $a \in \mathbb{K}$. Pour tout $p \in \mathbb{K}[X]$, $E_a \circ D(p) = p'(X+a) = D \circ E_a(p)$. Donc, pour tout $a \in \mathbb{K}$, $E_a \circ D = D \circ E_a$. D est shift-invariant.

Soit $a \in \mathbb{K}$. Pour tout $b \in \mathbb{K}$, pour tout $p \in \mathbb{K}[X]$, $E_a \circ E_b(p) = p(X+a+b) = E_b \circ E_a(p)$. Donc, pour tout $b \in \mathbb{K}$, $E_b \circ E_a = E_a \circ E_b$. E_a est shift-invariant.

Soit $a \in \mathbb{K}$. Pour tout $p \in \mathbb{K}[X]$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, en posant $u = t-a$,

$$E_a \circ J(p)(x) = \int_{x+a}^{x+a+1} p(t)\ dt = \int_x^{x+1} p(u+a)\ du = \int_x^{x+1} E_a(p)(u)/;du = J \circ E_a(p)(x)$$

et donc $E_a \circ J(p) = J \circ E_a(p)$. Ainsi, pour tout $a \in \mathbb{K}$, $E_a \circ J = J \circ E_a$. J est shift-invariant.

Soit $a \in \mathbb{K}$. Pour tout $p \in \mathbb{K}[X]$, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$E_a \circ L(p)(x) = -\int_0^{+\infty} e^{-t}p'(x+a+t)\ dt = -\int_0^{+\infty} e^{-t}\left(E_a(p)\right)'(x+t)\ dt = L \circ E_a(p)(x),$$

et donc $e_a \circ L(p) = L \circ E_a(p)$. Ainsi, pour tout $a \in \mathbb{K}$, $E_a \circ L = L \circ E_a$. L est shift-invariant.

I, J et E_a, $a \in \mathbb{K}$, conservent le degré et donc, I, J et E_a ne sont pas des endomorphismes delta.
$D(X) = 1$ et donc D est un endomorphisme delta. $L(X) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\ dt = -1$ et donc L est un endomorphisme delta.

Q 7. On note $\mathscr{S}$ l'ensemble des endomorphismes de $\mathbb{K}[X]$ qui sont shift-invariants.
Pour tout $a \in \mathbb{K}$, $E_a \circ 0 = 0 \circ E_a = 0$ et donc $0 \in \mathscr{S}$. Soient $(f,g) \in \mathscr{S}^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$. Pour tout $a \in \mathbb{K}$,

$$\mathsf{E}_a \circ (\lambda f + \mu g) = \lambda \mathsf{E}_a \circ f + \mu \mathsf{E}_a \circ g = \lambda f \circ \mathsf{E}_a + \mu g \circ \mathsf{E}_a = (\lambda f + \mu g) \circ \mathsf{E}_a$$

et donc $\lambda f + \mu g \in \mathscr{S}$. $\mathscr{S}$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathscr{L}(\mathbb{K}[X]), +, .)$.

Soit $(f, g) \in \mathscr{S}^2$. Pour tout $a \in \mathbb{K}$,

$$\mathsf{E}_a \circ f \circ g = f \circ \mathsf{E}_a \circ g = f \circ g \circ \mathsf{E}_a$$

et donc $f \circ g \in \mathscr{S}$. En tenant compte de $\mathrm{I} \in \mathscr{S}$, on a montré que $\mathscr{S}$ est une sous-algèbre de $(\mathscr{L}(\mathbb{K}[X]), +, ., \circ)$.

D et $-D$ sont des endomorphismes delta. Mais $(D + (-D))(X) = 0$ et $D \circ D(X) = 0$. Donc, $D + (-D)$ et $D \circ D$ ne sont pas des endomorphismes delta. L'ensemble des endomorphismes delta n'est pas stable pour l'addition et n'est pas stable pour la loi $\circ$.

II.B -

Q 8. Soit $p \in \mathbb{K}[X]$. Pour $k > \deg(p)$, $D^k(p) = 0$. La somme considérée est en fait finie et en particulier existe.

Q 9. Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Soit $a \in \mathbb{K}$. Pour tout $p \in \mathbb{K}[X]$, puisque la somme ci-dessous est finie et que E_a et D commutent,

$$\mathsf{E}_a \left(\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k D^k \right)(p) \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \mathsf{E}_a \left(D^k(p) \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k D^k \left(\mathsf{E}_a(p) \right) = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k D^k \right) \left(\mathsf{E}_a(p) \right)$$

et donc $\mathsf{E}_a \circ \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k D^k \right) = \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k D^k \right) \circ \mathsf{E}_a$. $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k D^k$ est un endomorphisme shift-invariant.

Q 10. Soit $\left((a_k)_{k\in\mathbb{N}}, (b_k)_{k\in\mathbb{N}}\right) \in \left(\mathbb{K}^{\mathbb{N}}\right)^2$ tel que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k D^k = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k D^k$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k D^k \right)(X^n) = \sum_{k=0}^{n} a_k D^k (X^n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!} a_k X^{n-k}.$$

Mais alors,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{+\infty} a_k D^k = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k D^k &\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ \left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k D^k \right)(X^n) = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} b_k D^k \right)(X^n) \\
&\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!} a_k X^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!} b_k X^{n-k} \\
&\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in [\![0, n]\!],\ \frac{n!}{(n-k)!} a_k = \frac{n!}{(n-k)!} b_k \\
&\Rightarrow \forall k \in \mathbb{N},\ a_k = b_k.
\end{aligned}$$

Q 11. Soit T un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$, shift-invariant. Pour tout $p \in \mathbb{K}[X]$, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $a \in \mathbb{K}$, $T(p)(x+a) = T(p(X+a))(x)$. En particulier, pour tout $a \in \mathbb{K}$, tout $n \in n$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$T(X^n)(x+a) = T((X+a)^n)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} T\left(X^k\right)(x) = \sum_{k=0}^{n} T\left(\frac{X^k}{k!}\right)(x) \frac{n!}{(n-k)!} a^{n-k}.$$

Pour $x = 0$, on obtient pour tout $a \in \mathbb{K}$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$T(X^n)(a) = \sum_{k=0}^{n} (Tq_k)(0) \frac{n!}{(n-k)!} a^{n-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} (Tq_k)(0) D^k (X^n)(a)$$

et donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T(X^n) = \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} (Tq_k)(0) D^k \right)(X^n)$. Ainsi, les deux endomorphismes T et $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} (Tq_k)(0) D^k$ coïncident sur une base de $\mathbb{K}[X]$ et finalement

$$T = \sum_{k=0}^{+\infty} (Tq_k)(0)D^k.$$

Inversement, si $T = \sum_{k=0}^{+\infty} (Tq_k)(0)D^k$, alors T est shift-invariant d'après la question Q9.

Q 12. Soient T et U deux endomorphismes shift-invariants de $\mathbb{K}[X]$. Soit $p \in \mathbb{K}[X]$.

$$\begin{aligned}
T(U(p)) &= \left(\sum_{k=0}^{+\infty} (Tq_k)(0)D^k\right) \circ \left(\sum_{\ell=0}^{+\infty} (Uq_\ell)(0)D^\ell\right)(p) \\
&= \sum_{(k,\ell)\in\mathbb{N}^2} (Tq_k)(0)(Uq_\ell)(0)D^{k+\ell}(p) \text{ (toutes les sommes étant finies)} \\
&= \sum_{(k,\ell)\in\mathbb{N}^2} (Uq_\ell)(0)(Tq_k)(0)D^{k+\ell}(p) \\
&= \left(\sum_{\ell=0}^{+\infty} (Uq_\ell)(0)D^\ell\right) \circ \left(\sum_{k=0}^{+\infty} (Tq_k)(0)D^k\right)(p) \\
&= U(T(p))
\end{aligned}$$

et donc T et U commutent.

II.C -

Q 13. Soit $a \in \mathbb{K}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $E_a q_k = \dfrac{(X+a)^k}{k!}$ et en particulier, $(E_a q_k)(0) = \dfrac{a^k}{k!}$.
Soit alors $p \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$. Puisque E_a est un endomorphisme shift-invariant d'après la question Q6, la question Q11 fournit

$$p(X+a) = E_a(p) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^k}{k!} D^k(p) = \sum_{k=0}^{\deg(p)} \frac{a^k}{k!} p^{(k)}.$$

Soient enfin a et h deux éléments fixés de $\mathbb{K}$.

$$p(a+h) = \sum_{k=0}^{\deg(p)} \frac{p^{(k)}(h)}{k!} a^k.$$

On reconnaît la formule de TAYLOR usuelle pour les polynômes.

Q 14. Soit $k \in \mathbb{N}$. Pour tout réel x,

$$(Jq_k)(x) = \frac{1}{k!} \int_x^{x+1} t^k \, dt = \frac{(x+1)^k - x^k}{(k+1)!}$$

et en particulier, pour $k \geqslant 1$, $(Jq_k)(0) = \dfrac{1}{(k+1)!}$, ce qui reste vrai quand $k = 0$. D'après la question Q11 (encore une fois, la somme est finie),

$$\forall p \in \mathbb{K}[X],\ Jp = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)!} p^{(k)}.$$

Q 15. Soient $p \in \mathbb{K}[X]$ puis $n \in \mathbb{N}$ tel que $p \in \mathbb{K}_n[X]$.

$$\begin{aligned}(\mathrm{D}-\mathrm{I})\circ\left(-\sum_{k=0}^{+\infty}\mathrm{D}^k\right)(p) &= -(\mathrm{D}-\mathrm{I})\left(\sum_{k=0}^{n}p^{(k)}\right)=\sum_{k=0}^{n}\left(p^{(k)}-p^{(k+1)}\right)\\ &= p-p^{(n+1)} \text{ (somme télescopique)}\\ &= p \text{ (car } \deg(p)\leqslant n).\end{aligned}$$

Donc, $(\mathrm{D}-\mathrm{I})\circ\left(-\sum_{k=0}^{+\infty}\mathrm{D}^k\right)=\mathrm{I}$ et de même, $\left(-\sum_{k=0}^{+\infty}\mathrm{D}^k\right)\circ(\mathrm{D}-\mathrm{I})=\mathrm{I}$. On en déduit que $\mathrm{D}-\mathrm{I}$ est un automorphisme de $\mathbb{K}[X]$ et que

$$(\mathrm{D}-\mathrm{I})^{-1}=\sum_{k=0}^{+\infty}-\mathrm{D}^k.$$

Maintenant, $Lq_0=L1=0$ puis pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $(Lq_k)(0)=-\dfrac{1}{k!}\displaystyle\int_0^{+\infty}kt^{k-1}e^{-t}\,dt=-1$ d'après la question Q4. Mais alors, d'après la question Q11, $L=\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}-\mathrm{D}^k$. On en déduit que $(\mathrm{D}-\mathrm{I})^{-1}=L-\mathrm{I}$ ou encore que

$$L=\mathrm{I}+(\mathrm{D}-\mathrm{I})^{-1}.$$

II.D - La convention adoptée sur le degré du polynôme nul permet d'écrire : $\forall p\in\mathbb{K}[X]\setminus\{0\}$, $\deg(p')$à $=\deg(p)-1$ (mais pas plus car par exemple $\deg(0')=\deg(0)=-1\neq-1-1$).

Q 16. Supposons que pour tout $k\in\mathbb{N}$, $(Tq_k)(0)=0$. Alors, d'après la question Q11, $T=0$ ce qui est faux. Donc, il existe $k\in\mathbb{N}$ tel que $(Tq_k)(0)\neq0$. On peut définir

$$n(T)=\mathrm{Min}\{k\in\mathbb{N}/\ (Tq_k)(0)\neq0\}.$$

Par définition de $n(T)$, pour tout $p\in\mathbb{K}[X]$,

$$T(p)=\sum_{k=n(T)}^{+\infty}(Tq_k)(0)p^{(k)}\quad(*)$$

où de plus, $\left(Tq_{n(T)}\right)(0)\neq0$.

Si $\deg(p)<n(T)$ (et donc $\deg(p)-n(T)<0$ ou encore $\deg(p)-n(T)\leqslant-1$), $T(p)=0$) puis
$\deg(Tp)=-1=\mathrm{Max}\{-1,\deg(p)-n(T)\}$.

Sinon, $\deg(p)\geqslant n(T)$ (et donc $\deg(p)-n(T)\geqslant0\geqslant-1$) puis $\deg(T(p))=\deg\left(\left(Tq_{n(T)}\right)(0)p^{(n(T))}\right)=\deg(p)-n(T)$ (d'après $(*)$). Encore une fois, $\deg(Tp)=-1=\mathrm{Max}\{-1,\deg(p)-n(T)\}$.

On a montré qu'il existe $n(T)\in\mathbb{N}$ tel que, pour tout $p\in\mathbb{K}[X]$, $\deg(Tp)=-1=\mathrm{Max}\{-1,\deg(p)-n(T)\}$.

Q 17. Si $n(T)=0$, alors pour tout $p\in\mathbb{K}[X]\setminus\{0\}$, $\deg(Tp)=\deg(p)$ et en particulier, $Tp\neq0$. Dans ce cas, $\mathrm{Ker}(T)=\{0\}$.

Supposons maintenant $n(T)\geqslant1$. Soit $p\in\mathbb{K}[X]$.

$$Tp=0\Leftrightarrow\mathrm{Max}\{-1,\deg(p)-n(T)\}=-1\Leftrightarrow\deg(p)\leqslant n(T)-1\Leftrightarrow p\in\mathbb{K}_{n-1}[X].$$

En résumé, si $n(T)=0$, $\mathrm{Ker}(T)=\{0\}$. Si $n(T)\geqslant1$, $\mathrm{Ker}(T)=\mathbb{K}_{n(T)-1}[X]$.

Q 18. (1) $\Rightarrow$ (2). Si T est inversible, alors $\mathrm{Ker}(T)=\{0\}$ et en particulier, $T1\neq0$.

(2) $\Rightarrow$ (3). Si $T1\neq0$, alors $n(T)=0$. D'après la question précédente, pour tout $p\in\mathbb{K}[X]$, $\deg(Tp)=\deg(p)$.

(3) $\Rightarrow$ (1). Si pour tout $p\in\mathbb{K}[X]$, $\deg(Tp)=\deg(p)$, en particulier, si $p\in\mathbb{K}[X]\setminus\{0\}$, alors $Tp\neq0$ et donc $\mathrm{Ker}(T)=\{0\}$. T est donc injectif.
De plus, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\mathbb{K}_n[X]$ est stable par T et donc T induit un endomorphisme T_n de $\mathbb{K}_n[X]$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, T_n est un endomorphisme injectif de l'espace de dimension finie $\mathbb{K}_n[X]$ et donc T_n est un automorphisme de cet espace.
Soient $q\in\mathbb{K}[X]$ puis $n\in\mathbb{N}$ tel que $q\in\mathbb{K}_n[X]$. Il existe $p\in\mathbb{K}_n[X]$ tel que $q=T_np=Tp$. Ceci montre que T est surjectif et finalement que T est un automorphisme de $\mathbb{K}[X]$.

Q 19. On suppose donc que $\mathsf{T}1 \neq 0$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $a_k = \mathsf{T}q_k(0)$ (en particulier, $a_0 = \mathsf{T}1 \neq 0$). Montrons l'existence d'une suite $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ telle que $\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k D^k\right) \circ \left(\sum_{k=0}^{+\infty} b_k D^k\right) = \mathrm{I}$ ou encore telle que

$$\forall p \in \mathbb{K}[X],\ \left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k D^k\right) \circ \left(\sum_{k=0}^{+\infty} b_k D^k\right)(p) = p.$$

Pour tout $p \in \mathbb{K}[X]$, puisque les sommes ci-dessus, évaluées en p, sont en fait finies, on a

$$\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k D^k\right) \circ \left(\sum_{k=0}^{+\infty} b_k D^k\right)(p) = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{i=0}^{k} a_{k-i}b_i\right)p^{(k)}.$$

Il suffit alors de montrer qu'il est possible de choisir la suite $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de sorte que

$$a_0b_0 = 1 \text{ et pour tout } k \geqslant 1,\ \sum_{i=0}^{k} a_{k-i}b_i = 0.$$

On montre par récurrence l'existence d'une telle suite.

- Puisque $a_0 \neq 0$, il existe $b_0 \in \mathbb{K}$ tel que $a_0b_0 = 1$ à savoir $b_0 = \dfrac{1}{a_0}$.
- Soit $k \geqslant 0$. Supposons avoir résolu les $k+1$ premières équations et trouvé $b_0, b_1, \dots, b_k$. La $k+2$-ème équation s'écrit $\displaystyle\sum_{i=0}^{k+1} a_{k+1-i}b_i = 0$ ou encore $a_0b_{k+1} = -\displaystyle\sum_{i=0}^{k} a_{k+1-i}b_i$ et finalement $b_{k+1} = -\dfrac{1}{a_0}\displaystyle\sum_{i=0}^{k} a_{k+1-i}b_i$.

On a montré par récurrence l'existence d'une suite $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k D^k\right) \circ \left(\sum_{k=0}^{+\infty} b_k D^k\right) = \mathrm{I}$.

On a donc $\mathsf{T} \circ \left(\sum_{k=0}^{+\infty} b_k D^k\right) = \mathsf{T} \circ \mathsf{T}^{-1}$ puis, après simplification par l'automorphisme T, $\mathsf{T}^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k D^k$. Mais alors, d'après la question Q9, T^{-1} est shift-invariant.

II.E -

Q 20. Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $\alpha_k = (\mathsf{T}q_k)(0)$.
Puisque T est un endomorphisme delta, $\mathsf{T}X$ est une constante non nulle et donc $\deg(\mathsf{T}X) = 0 \neq \deg(X)$. D'après la question Q18, $\alpha_0 = \mathsf{T}1 = 0$. Ensuite, $\alpha_1 = \mathsf{T}X(0) \in \mathbb{K}\setminus\{0\}$ et donc $\alpha_1 \neq 0$. Puisque T est shift-invariant, d'après la question Q11,

$$\mathsf{T} = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k D^k,$$

avec $\alpha_0 = 0$ et $\alpha_1 \neq 0$.

Q 21. Existence. $\mathsf{T} = D \circ \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k D^{k-1}\right) = D \circ \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_{k+1} D^k\right)$. L'endomorphisme $U = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_{k+1} D^k$ est shift-invariant d'après la question Q9. Ensuite, $U1 = U1(0) = \alpha_{0+1} = \alpha_1 \neq 0$ et donc U est inversible d'après la question Q18. L'endomorphisme U convient.

Unicité. Soit V un endomorphisme shift-invariant inversible tel que $\mathsf{T} = D \circ V$. Il existe une suite $(\beta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $V = \sum_{k=0}^{+\infty} \beta_k D^k$ puis $D \circ V = \sum_{k=0}^{+\infty} \beta_k D^{k+1} = \sum_{k=1}^{+\infty} \beta_{k-1} D^k$.

Ensuite, $D \circ V = \mathsf{T} \Rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} \beta_{k-1} D^k = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k D^k \Rightarrow \forall k \geqslant 1,\ \beta_{k-1} = \alpha_k$ (d'après la question Q10). Donc, nécessairement $V = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_{k+1} D^k = U$. Ceci montre l'unicité de U.

D est un endomorphisme delta car $DX = 1 \in \mathbb{K}\setminus\{0\}$. Ensuite, $D = D \circ \mathrm{I}$ où I est shift-invariant inversible. Par unicité, $U = \mathrm{I}$.

L est un endomorphisme delta car L shift-invariant et $LX = -1 \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. D'après la question Q15, $L = -\sum_{k=1}^{+\infty} D^k = D \circ \left(-\sum_{k=1}^{+\infty} D^{k-1}\right) = D \circ (L - I)$. $L - I$ est shift-invariant en tant que combinaison linéaire d'endomorphismes shift-invariants et de plus $(L-I)1 = -1 \neq 0$ de sorte que $L - I$ est inversible (d'après Q18). Dans ce cas, $U = L - I$.

Q 22. Puisque $T1 = 0$, si p est un polynôme de degré 0, $Tp = 0$ puis $\deg(Tp) = -1 = \deg(p) - 1$.
Puisque $\alpha_1 \neq 0$, on a $n(T) = 1$ et d'après la question Q16, pour tout polynôme p de degré supérieur ou égal à 1, $\deg(Tp) = \deg(p) - n(T) = \deg(p) - 1$.
En résumé, pour tout polynôme p, $\deg(Tp) = \deg(p) - 1$.

Ainsi, si $\deg(p) \geqslant 1$, $\deg(Tp) = \deg(p) - 1 \geqslant 0$ puis $Tp \neq 0$ ou encore $Tp \notin \mathrm{Ker}(p)$. Si $\deg(p) = 0$, alors $Tp = 0$ et donc $p \in \mathrm{Ker}(T)$. Ceci montre que $\mathrm{Ker}(T) = \mathbb{K}_0[X]$. En particulier, 0 est valeur propre de T et $E_0(T) = \mathbb{K}_0[X]$.

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ une éventuelle valeur propre non nulle de T. Soit $p \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$ un vecteur propre associé. Donc, $Tp = \lambda p$. Mais puisque $p \neq 0$ en et $\lambda \neq 0$, $\deg(Tp) = \deg(p) - 1$ et $\deg(\lambda p) = \deg(p)$. Tp ne peut être égal à λp. Dit autrement, aucun nombre non nul n'est valeur propre de T.

Ceci montre que $\mathrm{Sp}(T) = \{0\}$.

Q 23. Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque pour tout $p \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$, $\deg(Tp) = \deg(p) - 1$. On en déduit que $T\left(\mathbb{K}_n[X]\right) \subset \mathbb{K}_n[X]$. Ainsi, T induit un endomorphisme T_n de $\mathbb{K}_n[X]$.

Si $n = 0$, $T_n = 0$ et donc T_n est diagonalisable. Dorénavant, on suppose $n \geqslant 1$. D'après la question précédente, T_n admet 0 pour unique valeur propre. Donc, si T_n est diagonalisable, T_n s'annule sur base (de vecteurs propres) de $\mathbb{K}_n[X]$ et donc $T_n = 0$. Mais ceci est faux car $T_n X = TX \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Donc, si $n \geqslant 1$, T_n n'est pas diagonalisable.

Q 24. Soit $n \geqslant 1$. $\mathrm{Ker}\left(T_n\right) = \mathbb{K}_0[X]$. D'après le théorème du rang, $\dim\left(\mathrm{Im}\left(T_n\right)\right) = n + 1 - \dim\left(\mathrm{Ker}\left(T_n\right)\right) = n$.
Ensuite, puisque pour tout polynôme p non nul, $\deg(Tp) = \deg(p) - 1$, on a $\mathrm{im}\left(T_n\right) \subset \mathbb{K}_{n-1}[X]$. Puisque de plus, $\dim\left(\mathrm{Im}\left(T_n\right)\right) = n = \dim\left(\mathbb{K}_{n-1}[X]\right) < +\infty$, on en déduit que $\mathrm{Im}\left(T_n\right) = \mathbb{K}_{n-1}[X]$.

Soit alors $q \in \mathbb{K}[X]$ puis $n \in \mathbb{N}$ tel que $q \in \mathbb{K}_n[X]$. D'après ce qui précède, il existe $p \in \mathbb{K}_{n+1}[X]$ tel que $q = T_{n+1}p = Tp$. Donc, tout polynôme q a un antécédent par T dans $\mathbb{K}_[X]$. On en déduit que T est surjectif.

III - Suite de polynômes associée à un endomorphisme delta

III.A -

Q 25. Montrons l'existence et l'unicité pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- Nécessairement $q_0 = 1$ qui réciproquement convient. q_0 existe et est unique.

- Soit $n \geqslant 0$. Supposons avoir montré l'existence et l'unicité de $q_0, \ldots, q_n$. Puisque $\deg\left(q_n\right) = n$, d'après la question Q24, il existe $p_{n+1} \in \mathbb{K}_{n+1}[X]$ tel que $Qp_{n+1} = q_n$. Soit $q_{n+1} = p_{n+1} - p_{n+1}(0)$.
$q_{n+1} \in \mathbb{K}_{n+1}[X]$, $q_{n+1}(0) = 0$ et $Qq_{n+1} = Qp_{n+1} = q_n$ (car $\mathrm{Ker}(Q) = \mathbb{K}_0[X]$). Enfin, si $\deg\left(q_{n+1}\right) \leqslant n$,
alors $\deg\left(Qq_{n+1}\right) < n = \deg\left(q_n\right)$ et en particulier $Qq_{n+1} \neq q_n$. Donc, $\deg\left(q_{n+1}\right) = n + 1$. Ceci montre l'existence de q_{n+1}.
Ensuite, si r_{n+1} est un polynôme de degré $n+1$ tels que $Qr_{n+1} = q_n$ et $r_{n+1}(0) = 0$, alors $Q\left(q_{n+1} - r_{n+1}\right) = 0$ puis $q_{n+1} - r_{n+1} \in \mathbb{K}_0[X]$. Plus précisément, $q_{n+1} - r_{n+1} = q_{n+1}(0) - r_{n+1}(0) = 0$. Ceci montre l'unicité de q_{n+1}.

Le résultat est démontré par récurrence.

Q 26. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $(x, y) \in \mathbb{K}^2$, $q_n(x + y) = \sum_{k=0}^{n} q_k(x)q_{n-k}(y)$ $(\mathscr{P}_n)$.

- $q_0 = 1$ et donc pour tout $(x, y) \in \mathbb{K}^2$, $\sum_{k=0}^{0} q_0(x)q0 - k(y) = 1 \times 1 = q_0(x + y)$. Le résultat est vrai quand $n = 0$.

- Soit $n \geqslant 0$. Supposons $(\mathscr{P}_n)$. Soit $y \in \mathbb{K}$ fixé. Pour tout polynôme q, $q(X + y) = E_y q$ et donc, puisque Q est shift-invariant, $Q(q(X + y)) = E_y(Qq) = (Qq)(X + y)$. Par linéarité de Q, on obtient

$$\begin{aligned}
Q\left(\sum_{k=0}^{n+1} q_k(X)q_{n+1-k}(y)\right) &= \sum_{k=0}^{n+1} q_{n+1-k}(y)Qq_k(X) = \sum_{k=1}^{n+1} q_{n+1-k}(y)q_{k-1}(X)\\
&= \sum_{k'=0}^{n} q_{n+1--(k'+1)}(y)q_{k'}(X) = \sum_{k=0}^{n} q_k(X)q_{n-k}(y)\\
&= q_n(X+y) \text{ (par hypothèse de récurrence)}\\
&= Qq_{n+1}(X+y) = E_y\left(Qq_{n+1}\right) = Q\left(E_y\left(q_{n+1}\right)\right) = Q\left(q_{n+1}(X+y)\right).
\end{aligned}$$

On en déduit que $q_{n+1}(X+y) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} q_k(X)q_{n+1-k}(y) \in \mathrm{Ker}(Q) = \mathbb{K}_0[X]$ puis qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que

$$q_{n+1}(X+y) = \sum_{k=0}^{n+1} q_k(X)q_{n+1-k}(y) + \lambda.$$

En évaluant en 0 et en tenant compte de $q_0(0) = 1$ et $q_k(0) = 0$ pour $k \geqslant 1$, on obtient $q_{n+1}(y) = q_{n+1}(y) + \lambda$ puis $\lambda = 0$ et donc, pour tout $(x, y) \in \mathbb{K}^2$, $q_{n+1}(x+y) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} q_k(x)q_{n+1-k}(y)$.

On a montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $(x, y) \in \mathbb{K}^2$, $q_n(x+y) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} q_k(x)q_{n-k}(y)$.

III.B -

Q 27. Soit Q un éventuel endomorphisme shift-invariant $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit la suite de polynômes associée. On a nécessairement $Q1 = 0$ et pour tout $n \geqslant 1$, $Qq_n = q_{n-1}$. L'endomorphisme Q est ainsi défini sur une base de $\mathbb{K}[X]$ et donc Q est unique.

Soit donc Q l'unique endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$ défini par $Q1 = 0$ et pour tout $n \geqslant 1$, $Qq_n = q_{n-1}$. Vérifions que Q est shift-invariant.
Pour cela, vérifions que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $a \in \mathbb{K}$, $Q\left(q_n(X+a)\right) = \left(Qq_n\right)(X+a)$.
Le résultat est vrai quand $n = 0$ car $q_0 = 1$ et $Q1 = 0$. Soit alors $n \geqslant 1$ et $a \in \mathbb{K}$.

$$\begin{aligned}
Q\left(q_n(X+a)\right) = Q\left(\sum_{k=0}^{n} q_k(X)q_{n-k}(a)\right) &= \sum_{k=0}^{n} q_{n-k}(a)\left(Qq_k\right)(X) = \sum_{k=1}^{n} q_{k-1}(X)q_{n-k}(a) = \sum_{k=0}^{n-1} q_k(X)q_{n-1-k}(a)\\
&= q_{n-1}(X+a) = \left(Qq_n\right)(X+a).
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $a \in \mathbb{K}$, les endomorphismes $Q \circ E_a$ et $E_a \circ Q$ coïncident sur une base de $\mathbb{K}[X]$. Donc, pour tout $a \in \mathbb{K}$, $Q \circ E_a = E_a \circ Q$ ou encore Q est shift-invariant. Enfin, $Q1 = 0$ et donc Q est un endomorphisme delta. Finalement, Q est un endomorphisme delta dont $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite de polynômes associée. Ceci montre l'existence (et l'unicité d'après le début de la question) d'un tel endomorphisme.

III.C -

Q 28. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\deg\left(q_k\right) = k$. Donc, $\left(q_k\right)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est une famille de polynômes non nuls de $\mathbb{K}_n[X]$, de degrés deux à deux distincts, et donc une famille libre de $\mathbb{K}_n[X]$. De plus, $\mathrm{card}\left(q_k\right)_{k\in[\![0,n]\!]} = n+1 = \dim\left(\mathbb{K}_n[X]\right) < +\infty$ et donc $\left(q_k\right)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$.

Q 29. Soit $n \geqslant 1$. $Q_n 1 = 0$ et pour $k \in [\![1, n]\!]$, $Qq_k = q_{k-1}$. Donc,

$$\mathrm{Mat}_{(q_0,\dots,q_n)}\left(Q_n\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & & & \ddots & 1\\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que $\mathrm{Tr}\left(Q_n\right)=0$ et $\chi_{Q_n}=X^{n+1}$. Ceci reste vrai pour $n=0$ car $Q_0=0$.

III.D -

Q 30. $\dfrac{X^0}{0!}=1=q_0$ puis pour $n\geqslant 1$, $\dfrac{0^n}{n!}=0$, $\deg\left(\dfrac{X^n}{n!}\right)=n$ et $D\left(\dfrac{X^n}{n!}\right)=\dfrac{X^{n-1}}{(n-1)!}$. Par unicité, on a donc pour tout $n\in\mathbb{N}$, $q_n=\dfrac{X^n}{n!}$.

Q 31. On pose $r_0=1$ et pour $n\in\mathbb{N}^*$, $r_n=\dfrac{X(X-1)\dots(X-(n-1))}{n!}$.
$\left(E_1-I\right)\left(r_1\right)=(X+1)-X=1=r_0$ et de plus r_1 s'annule en 0 et $\deg\left(r_1\right)=1$. Soit $n\geqslant 2$. $r_n(0)=0$, $\deg\left(r_n\right)=n$ puis

$$\begin{aligned}\left(E_1-I\right)\left(r_n\right)&=\frac{(X+1)X\dots(X-(n-2))-X(X-1)\dots(X-(n-1))}{n!}\\&=\frac{X(X-1)\dots(X-(n-2))((X+1)-(X-(n-1))}{n!}=\frac{X(X-1)\dots(X-(n-2))}{(n-1)!}\\&=r_{n-1}.\end{aligned}$$

Par unicité d'une telle suite, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $q_n=r_n=\dfrac{X(X-1)\dots(X-(n-1))}{n!}$ (et $q_0=r_0=1$).

III.E -

Q 32. Soit $n\in\mathbb{N}$. Calculons $\left(Q^kq_n\right)(0)$ pour tout $k\in\mathbb{N}$. Si $k>n$, $Q^kq_n=0$ et en particulier, $\left(Q^kq_n\right)(0)=0$. Si $k\in[\![0,n]\!]$, alors $Q^kq_n=q_{n-k}$ puis $\left(Q^kq_n\right)(0)=q_{n-k}(0)=\left\{\begin{array}{l}1 \text{ si } k=n\\ 0 \text{ sinon}\end{array}\right.$. En résumé,

$$\forall(n,k)\in\mathbb{N}^2,\ \left(Q^kq_n\right)(0)=\delta_{n,k}.$$

(Par suite, $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\left(Q^kq_n\right)(0)q_k=\sum_{k=0}^{+\infty}\delta_{n,k}q_k=q_n$.)

Soit alors $p\in\mathbb{K}[X]$. Posons $p=\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\alpha_kq_k$ (la somme étant en fait finie). Pour $k\in\mathbb{N}$,

$$\left(Q^kp\right)(0)=\sum_{\ell=0}^{+\infty}\alpha_\ell\left(Q^kq_\ell\right)(0)=\sum_{\ell=0}^{+\infty}\alpha_\ell\delta_{k,\ell}=\alpha_k$$

et donc la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\left(Q^kp\right)(0)q_k=\sum_{k=0}^{+\infty}\alpha_kq_k$ a un sens puis

$$p=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(Q^kp\right)(0)q_k.$$

Q 33. Soit T un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$ shift-invariant. Soit $p\in\mathbb{K}[X]$. Puisque Q est shift-invariant, pour tout $a\in\mathbb{K}$, Q et E_a commutent et donc

$$p(X+a)=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(Q^kp(X+a)\right)(0)q_k=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\left(Q^kp\right)(X+a)\right)(0)q_k=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(Q^kp\right)(a)q_k.$$

Pour tout $a\in\mathbb{K}$, T et E_a commutent également et donc

$$(Tp)(X+a)=T(p(X+a))=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(Q^kp\right)(a)Tq_k.$$

En évaluant en 0, on obtient pour tout $a\in\mathbb{K}$,

$$(Tp)(a)=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(Tq_k\right)(0)\left(Q^kp\right)(a),$$

et finalement, pour tout $p\in\mathbb{K}[X]$, $Tp=\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\left(Tq_k\right)(0)Q^kp$ puis

$$T = \sum_{k=0}^{+\infty} (Tq_k)(0) Q^k.$$

III.F -

Q 34. On prend $Q = E_1 - I$. Alors, $q_0 = 1$ et pour $k \in \mathbb{N}^*$, $q_k = \dfrac{X(X-1)\dots(X-(k-1))}{k!}$. Puisque D est shift-invariant, d'après la question précédente,

$$D = \sum_{k=0}^{+\infty} (Dq_k)(0)(E_1 - I)^k.$$

Déjà, $q_0 = 1$ puis $(Dq_0)(0) = 0$. Ensuite, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $(Dq_k)(0)$ est le coefficient de X dans l'expression développée de q_k, à savoir $\dfrac{-1)^{k-1}(k-1)!}{k!} = \dfrac{(-1)^{k-1}}{k}$. On a donc

$$D = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (E_1 - I)^k \quad (*).$$

Ensuite, pour tout polynôme non nul p, $\deg((E_1 - I)(p)) = \deg(p(X+1) - p(X)) \leqslant \deg(p) - 1$ et donc pour $k > \deg(p)$, $(E_1 - I)^k(p) = 0$. En appliquant l'égalité $(*)$ à un polynôme p non constant de sorte que $\deg(p) \geqslant 1$, on obtient

$$\begin{aligned}
p' = Dp &= \sum_{k=1}^{\deg(p)} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (E_1 - I)^k(p) \\
&= \sum_{k=1}^{\deg(p)} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^{k-j} E_1^j(p) \text{ (d'après la formule du binôme de Newton car } E_1 \text{ et } -I \text{ commutent)} \\
&= \sum_{k=1}^{\deg(p)} \frac{1}{k} \left(\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^{j+1} p(X+j) \right) \text{ (car } j+1 \text{ et } 2k-j-1 \text{ ont même parité).}
\end{aligned}$$

IV - Un peu de calcul ombral

IV.A -

Q 35. Supposons qu'il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $T = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k D^k$. Pour tout polynôme p,

$$\begin{aligned}
T'(p) = T(Xp) - XT(p) &= \sum_{k=0}^{+\infty} a_k D^k(Xp) - X \sum_{k=0}^{+\infty} a_k D^k p \\
&= a_0 Xp + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \left(Xd^k p + kD^{k-1} p \right) - X \sum_{k=0}^{+\infty} a_k D^k p \text{ (d'après la formule de Leibniz)} \\
&= X \sum_{k=0}^{+\infty} a_k D^k p + \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k D^{k-1} p - X \sum_{k=0}^{+\infty} a_k D^k p \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k D^{k-1} p
\end{aligned}$$

et donc $T' = \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k D^{k-1}$.

Q 36. D'après la question précédente et la question Q9, si T est shift-invariant, alors T' est shift-invariant.

Q 37. Supposons de plus que T est un endomorphisme delta. Déjà, T' est un endomorphisme shift-invariant d'après la question précédente. Ensuite, $a_0 = 0$ et $a_1 \neq 0$. Mais alors $T' = a_1 I + \sum_{k=1}^{+\infty} (k+1) a_{k+1} D^k$ est inversible car $T'1 = a_1 \neq 0$ et d'après la question Q18.

Q 38. Pour tout polynôme p,

$$S'\circ T(p)+S\circ T'(p)=S(XT(p))-XS(T(p))+S(T(Xp))-S(XT(p))=S\circ T(Xp)-XS\circ T(p)=(S\circ T)'(p),$$

et donc $(S\circ T)'=S'\circ T+S\circ T'$.

IV.B -

Q 39. $D=\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\delta_{k,1}D^k$ et donc $D'=\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}k\delta_{k,1}D^{k-1}=I$. Ensuite, si T est shift-invariant, alors T' est shift-invariant puis T et T' commutent d'après la question Q12. Mais alors, la formule de la question Q38 a pour conséquences usuelles : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $(T^n)'=nT'\circ T^{n-1}$ et si de plus T est inversible, $\forall n\in\mathbb{Z}$, $(T^n)'=nT'\circ T^{n-1}$.

Ici, Q, Q', D, D', U, U', sont shift-invariants et donc commutent deux à deux puis, pour $n\in\mathbb{N}^*$,

$$Q'\circ U^{-n-1}=(D'\circ U+D\circ U')\circ U^{-n-1}=U^{-n}+D\circ U'\circ U^{-n-1}=U^{-n}-\frac{1}{n}\left(U^{-n}\right)'\circ D.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}Q'\circ U^{-n-1}\left(X^n\right)&=U^{-n}\left(X^n\right)-\frac{1}{n}\left(U^{-n}\right)'\left(nX^{n-1}\right)\\&=U^{-n}\left(X^n\right)-\left(U^{-n}\left(X\times X^{n-1}\right)-XU^{-n}\left(X^{n-1}\right)\right)=XU^{-n}\left(X^{n-1}\right).\end{aligned}$$

Q 40. Montrons par récurrence que pour tout $n\geqslant 1$, $Q'\circ U^{-n-1}\left(X^n\right)=n!q_n$.

- $\deg(q_1)=1$ et $q_1(0)=0$. Donc, il existe $\alpha\in\mathbb{K}^*$ tel que $q_1=\alpha X$. De plus, $Qq_1=q_0=1$ fournit $UDq_1=1$ puis $\alpha=Dq_1=U^{-1}(1)$. Finalement, $1!q_1=XU^{-1}(1)$. La formule est vraie quand $n=1$.
- Soit $n\geqslant 1$. Supposons que $Q'\circ U^{-n-1}\left(X^n\right)=n!q_n$. L'égalité $Qq_{n+1}=q_n$ fournit

  $$Q\left((n+1)!q_{n+1}\right)=(n+1)\times n!q_n=(n+1)Q'\circ U^{-n-1}\left(X^n\right),$$

  puis $UD\left((n+1)!q_{n+1}\right)=(n+1)Q'\circ U^{-n-1}\left(X^n\right)$ et donc, puisque les différents endomorphismes commutent deux à deux,

  $$D\left(n+1)!q_{n+1}\right)=Q'\circ U^{-n-2}\left((n+1)X^n\right)=q'\circ U^{-n-2}\circ D\left(X^{n+1}\right)=D\left(Q'\circ U^{-n-2}\left(X^{n+1}\right)\right).$$

  Par suite, il existe $\lambda\in\mathbb{L}$ tel que $(n+1)!q_{n+1}=Q'\circ U^{-n-2}\left(X^{n+1}\right)+\lambda$.
  Enfin, puisque $Q'\circ U^{-n-2}\left(X^{n+1}\right)=XU^{-n-1}\left(X^n\right)$, $Q'\circ U^{-n-2}\left(X^{n+1}\right)(0)=0$.
  En évaluant en 0, on obtient $\lambda=0$ et donc $(n+1)!q_{n+1}=Q'\circ U^{-n-2}\left(X^{n+1}\right)$.

On a montré par récurrence que, pour tout $n\geqslant 1$, $Q'\circ U^{-n-1}\left(X^n\right)=n!q_n$ et donc que

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ n!q_n=XU^{-n}\left(X^{n-1}\right).$$

Ensuite, puisque Q est un endomorphisme delta, Q' est inversible d'après la question Q37. Soit $n\geqslant 2$. Vérifions que $Q'\left(U^{-n}\left(\dfrac{X^{n-1}}{(n-1)!}\right)\right)=q_{n-1}$.

$$Q'\left(U^{-n}\left(\frac{X^{n-1}}{(n-1)!}\right)\right)=\frac{1}{(n-1)!}Q'\circ U^{-n}\left(X^{n-1}\right)=\frac{1}{(n-1)!}\times(n-1)!q_{n-1}=q_{n-1}.$$

Mais alors, $\dfrac{1}{(n-1)!}U^{-n}\left(X^{n-1}\right)=\left(Q'\right)^{-1}\left(q_{n-1}\right)$ puis $X\left(Q'\right)^{-1}\left(q_{n-1}\right)=\dfrac{1}{(n-1)!}XU^{-n}\left(X^{n-1}\right)=\dfrac{n!q_n}{(n-1)!}=nq_n$.

. Enfin, $Q'(1)=U(1)+U'\circ D(1)=U(1)$. On pose $Q'(1)=U(1)=\alpha$ où $\alpha\in\mathbb{K}^*$. On alors $\left(Q'\right)^{-1}=U^{-1}(\alpha)=1$ puis $\left(Q'\right)^{-1}(1)=\dfrac{1}{\alpha}=U^{-1}(1)$. On en déduit que $1\times q_1=XU^{-1}(1)=X\left(Q'\right)^{-1}(1)$ et la formule reste vraie quand $n=1$. On a montré que

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ nq_n=X\left(Q'\right)^{-1}\left(q_{n-1}\right).$$

IV.C -

Q 41. • Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}\ell_n' &= D\ell_n = U^{-1}Q\ell_n \text{ } (U^{-1} \text{ et } Q \text{ commutent})\\ &= U^{-1}\ell_{n-1} = (L-I)^{-1}\ell_{n-1} \text{ (d'après la question Q21)}\\ &= (D-I)\ell_{n-1} \text{ (d'après la question Q15)}\\ &= \ell_{n-1}' - \ell_{n-1}.\end{aligned}$$

• En appliquant le résultat de la question Q35, on obtient $D' = I$ et $I' = 0$. D'après la question Q15, $(L-I)\circ(D-I) = I$ puis, en « dérivant », $L'\circ(D-I)+(L-I) = 0$ puis $L' = -(L-I)(D-I)^{-1} = -(D-I)^{-2}$ et finalement $(L')^{-1} = -(D-I)^2$. D'après la question Q40,

$$n\ell_n = X(L')^{-1}(\ell_{n-1}) = -X(D-I)^2(\ell_{n-1}) = -X(D-I)\left(\ell_{n-1}' - \ell_{n-1}\right) = -X(D-I)(\ell_n') = -X(\ell_n'' - \ell_n')$$

et finalement, $X\ell_n'' - X\ell_n' + n\ell_n = 0$.

• Soit $n \geqslant 2$. Puisque $\deg(\ell_n) = n$ et que $\ell_n(0) = 0$, on peut poser $\ell_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k X^k$.

$$\begin{aligned}X\ell_n'' - X\ell_n' + n\ell_n &= X\sum_{k=2}^{n} k(k-1)a_kX^{k-2} - X\sum_{k=1}^{n} ka_kX^{k-1} + n\sum_{k=1}^{n} a_kX^k = 0\\ &= \sum_{k=1}^{n} k(k-1)a_kX^{k-1} - \sum_{k=1}^{n} ka_kX^k + n\sum_{k=1}^{n} a_kX^k\\ &= \sum_{k=0}^{n-1} k(k+1)a_{k+1}X^k + \sum_{k=1}^{n}(n-k)a_kX^k.\end{aligned}$$

Puisque $X\ell_n'' - X\ell_n' + n\ell_n = 0$, on en déduit que pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, $a_{k+1} = -\dfrac{n-k}{k(k+1)}a_k$. Mais alors, pour $k \in [\![2, n]\!]$,

$$\begin{aligned}a_k &= -\frac{n-(k-1)}{k(k-1)} \times -\frac{n-(k-2)}{(k-1)(k-2)} \times \ldots \times \frac{n-1}{2\times 1} \times a_1 = (-1)^{k-1}\frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-(k-1))}{k!(k-1)!}a_1\\ &= (-1)^{k-1}\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}\frac{a_1}{k!} = (-1)^{k-1}\binom{n-1}{k-1}\frac{a_1}{k!},\end{aligned}$$

ce qui reste vrai pour $k = 1$. Enfin, $a_1 = \ell_n'(0)$. Or, pour tout $n \geqslant 1$, $\ell_n' = \ell_{n-1}' - \ell_{n-1}$. Par suite, pour $n \geqslant 2$, $\ell_n'(0) = \ell_{n-1}'(0)$ puis, pour $n \geqslant 1$, $\ell_n'(0) = \ell_1'(0) = \ell_0'(0) - \ell_0(0) = -1$. Donc, $a_1 = -1$ puis

$$\forall n \geqslant 2,\ \forall k \in [\![1, n]\!],\ a_k = (-1)^k\binom{n-1}{k-1}\frac{1}{k!}.$$

Ceci reste vrai quand $n = 1$ car $\ell_1 = \ell_1(0) + \ell_1'(0)X = -X$. On a montré que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ell_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n-1}{k-1}\frac{X^k}{k!}.$$

IV.D -

Q 42. $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\dfrac{X^n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux bases de $\mathbb{K}[X]$ (car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\deg(q_n) = n = \deg\left(\dfrac{X^n}{n!}\right)$). Donc, il existe un automorphisme T de $\mathbb{K}[X]$ et un seul tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Tq_n = \dfrac{X^n}{n!}$.

Q 43. $T^{-1}(1) = T^{-1}\left(\dfrac{X^0}{0!}\right) = q_0 = 1$ puis $T\circ Q\circ T^{-1}(1) = T(Q(1)) = 0 = D(1)$. Ensuite, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$T \circ Q \circ T^{-1}\left(\frac{X^n}{n!}\right) = T \circ Q\left(q_n\right) = T\left(q_{n-1}\right) = \frac{X^{n-1}}{(n-1)!} = D\left(\frac{X^n}{n!}\right).$$

Ainsi, les endomorphismes D et $T \circ Q \circ T^{-1}$ coïncident sur la base $\left(\dfrac{X^n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et donc $D = T \circ Q \circ T^{-1}$.

Q 44. W est une application de $\mathbb{K}[X]$ dans lui-même, linéaire, et de plus si V est l'application $p \mapsto p\left(\dfrac{1}{\alpha}X\right)$, alors $V \circ W = W \circ V = I$. Donc, W est un automorphisme de $\mathbb{K}[X]$ et W^{-1} est l'application $p \mapsto p\left(\dfrac{1}{\alpha}X\right)$. On note que W n'est pas shift-invariant si $\alpha \neq 1$.

Q 45. Soit $\alpha > 0$. Puisque $\left(\dfrac{1}{\alpha}D - I\right)(1) = -1 \neq 0$ et que $\dfrac{1}{\alpha}D - I$ est shift-invariant, $\dfrac{1}{\alpha}D - I$ est un automorphisme de $\mathbb{K}[X]$ d'après la question Q18.

Soit $p \in \mathbb{K}[X]$. Puisque $L = -\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} D^k$,

$$P(p) = W \circ L \circ W^{-1}(p) = W \circ L\left(p\left(\frac{X}{\alpha}\right)\right) = W\left(-\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\alpha^k}\left(D^k p\right)\left(\frac{X}{\alpha}\right)\right) = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\alpha^k} D^k p$$

et donc

$$P = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\alpha^k} D^k = \frac{1}{\alpha} D \circ \left(-\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{\alpha^k} D^k\right).$$

Ensuite, pour $p \in \mathbb{K}[X]$ puis $n \in \mathbb{N}$ tel que $p \in \mathbb{K}_n[X]$,

$$\begin{aligned}
\left(-\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{\alpha^k} D^k\right) \circ \left(\frac{1}{\alpha}D - I\right)(p) &= \left(-\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{\alpha^k} D^k\right)\left(\frac{1}{\alpha}p' - p\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{\alpha^k}p^{(k)} - \frac{1}{\alpha^{k+1}}p^{(k+1)}\right) = p - \frac{1}{\alpha^{n+1}}p^{(n+1)} \\
&= p
\end{aligned}$$

et donc $\left(-\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{\alpha^k} D^k\right) \circ \left(\dfrac{1}{\alpha}D - I\right) = I$ puis $-\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{\alpha^k} D^k = \left(\dfrac{1}{\alpha}D - I\right)^{-1}$. On a montré que

$$P = \frac{1}{\alpha} D \circ \left(\frac{1}{\alpha}D - I\right)^{-1}.$$

Q 46. P est un endomorphisme shift-invariant en tant que composée d'endomorphismes shift-invariants. Ensuite, $\dfrac{1}{\alpha}D - I$ est un automorphisme shift-invariant et donc $\left(\dfrac{1}{\alpha}D - I\right)^{-1}$ conserve le degré d'après la question Q18. $\left(\dfrac{1}{\alpha}D - I\right)^{-1}(X)$ est de degré 1 puis PX est une contante non nulle. Ceci montre que P est un endomorphisme delta.

Q 47. $L = DU$ et donc $D = LU^{-1} = L(L-I)^{-1}$ d'après les questions Q15 et Q21. Ensuite, les différents endomorphismes ci-dessous commutant deux à deux ,

$$\begin{aligned}
P &= \frac{1}{\alpha} D \circ \left(\frac{1}{\alpha}D - I\right)^{-1} = D \circ (D - \alpha I)^{-1} = L \circ (L - I)^{-1} \circ \left(L(L-I)^{-1} - \alpha I\right)^{-1} \\
&= L \circ \left((L - I) \circ \left(L(L-1)^{-1} - \alpha I\right)\right)^{-1} \\
&= L \circ (L - \alpha(L - I))^{-1} = L \circ ((1-\alpha)L + \alpha I)^{-1}.
\end{aligned}$$

Q 48. D'après la question Q48, $TLT^{-1} = D$ puis

$$TPT^{-1} = TLT^{-1} \circ T((1-\alpha)L + \alpha I)^{-1}T^{-1} = D\left(T((1-\alpha)L + \alpha I)T^{-1}\right)^{-1} = D \circ ((1-\alpha)D + \alpha I)^{-1}.$$

$Q = TPT^{-1}$ est un endomorphisme shift-invariant en tant que composée d'endomorphismes shift-invariants. De plus, $((1-\alpha)D + \alpha I)^{-1}(1)$ est une constante non nulle et donc $Q1 = 0$ puis Q est un endomorphisme delta.

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $r_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \alpha^k (1-\alpha)^{n-k} \frac{X^k}{k!}$.

- Posons $r_1 = aX$. Puisque $(\alpha I + (1-\alpha)D)^{-1} Dr_1 = Qr_1 = 1$, on a $a = Dr_1 = (\alpha I + (1-\alpha)D)(1) = \alpha$. Donc, $r_1 = \alpha X$. Puisque d'autre part, $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} \binom{0}{k-1} \alpha^k (1-\alpha)^{1-k} \frac{X^k}{k!} = \alpha X$, l'égalité est vraie quand $n = 1$.

- Soit $n \geqslant 1$. Supposons que $r_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \alpha^k (1-\alpha)^{n-k} \frac{X^k}{k!}$. Alors,

$$\begin{aligned}
(\alpha I + (1-\alpha)D)(r_n) &= \alpha \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \alpha^k (1-\alpha)^{n-k} \frac{X^k}{k!} + (1-\alpha) \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \alpha^k (1-\alpha)^{n-k} \frac{X^{k-1}}{(k-1)!} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \alpha^{k+1} (1-\alpha)^{n-k} \frac{X^k}{k!} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \alpha^k (1-\alpha)^{n-k+1} \frac{X^{k-1}}{(k-1)!} \\
&= \sum_{k'=2}^{n+1} \binom{n-1}{k'-2} \alpha^{k'} (1-\alpha)^{n-k'+1} \frac{X^{k'-1}}{(k'-1)!} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \alpha^k (1-\alpha)^{n-k+1} \frac{X^{k-1}}{(k-1)!} \\
&= \alpha^{n+1} \frac{X^n}{n!} + \sum_{k=2}^{n} \left(\binom{n-1}{k-2} + \binom{n-1}{k-1} \right) \alpha^k (1-\alpha)^{n+1-k} \frac{X^{k-1}}{(k-1)!} + \alpha(1-\alpha)^n \\
&= \alpha^{n+1} \frac{X^n}{n!} + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k-1} \alpha^k (1-\alpha)^{n+1-k} \frac{X^{k-1}}{(k-1)!} + \alpha(1-\alpha)^n \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} \alpha^k (1-\alpha)^{n+1-k} \frac{X^{k-1}}{(k-1)!} = D\left(\sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} \alpha^k (1-\alpha)^{n+1-k} \frac{X^k}{k!} \right).
\end{aligned}$$

Par suite, $r_n = (\alpha I + (1-\alpha)D)^{-1} D \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} \alpha^k (1-\alpha)^{n+1-k} \frac{X^k}{k!} \right) = Q \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} \alpha^k (1-\alpha)^{n+1-k} \frac{X^k}{k!} \right)$.

Puisque $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} \alpha^k (1-\alpha)^{n+1-k} \frac{X^k}{k!}$ est de degré $n+1$ et s'annule en 0, ceci montre par unicité que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} \alpha^k (1-\alpha)^{n+1-k} \frac{X^k}{k!} = r_{n+1}$.

On a montré par récurrence que,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ r_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \alpha^k (1-\alpha)^{n-k} \frac{X^k}{k!}.$$

Q 49. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $T\ell_n = \dfrac{X^n}{n!}$ et donc $\ell_n = T^{-1}\dfrac{X^n}{n!}$. En prenant l'image des deux membres de l'égalité précédente par T^{-1}, on obtient pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \alpha^k (1-\alpha)^{n-k} \ell_k = T^{-1} r_n.$$

D'autre part, d'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $TPT^{-1}r_n = Qr_n = r_{n-1}$ et donc $PT^{-1}r_n = T^{-1}r_{n-1}$. De plus, T^{-1} conservant le degré, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\deg\left(T^{-1}r_n\right) = n$. Enfin, $T^{-1}r_n$ est une combinaison linéaire des $T^{-1}\left(\dfrac{X^k}{k!}\right) = \ell_k$, $1 \leqslant k \leqslant n$, et donc $T^{-1}r_n(0) = 0$. Ceci montre que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $T^{-1}r_n = p_n = \ell_n(\alpha X)$ et finalement,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall \alpha > 0,\ \ell_n(\alpha X) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \alpha^k (1-\alpha)^{n-k} \ell_k.$$

