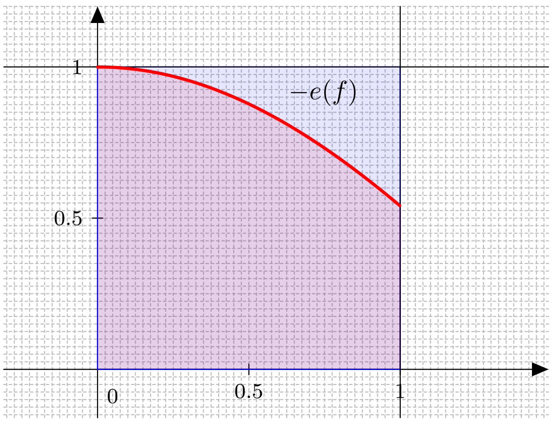
Corrigé du DM03

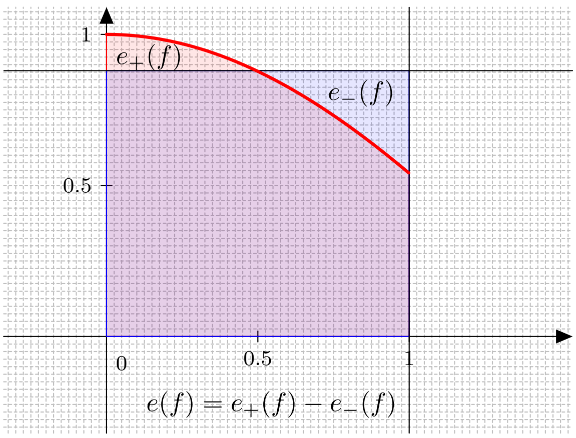
Sujet Centrale-Supelec PC 2021 Math 2

I Généralités sur les formules de quadrature

1. Par linéarité de l'application $f \mapsto e(f)$, il suffit de tester la nullité de e sur les fonctions $x \mapsto x^k$ pour connaître l'ordre de la formule.
   Pour $f : x \mapsto 1$, on a $e(f) = \int_0^1 f(x)dx - f(0) = \int_0^1 dx - 1 = 1 - 1 = 0$.
   Pour $f : x \mapsto x$, on a $e(f) = \int_0^1 f(x)dx - f(0) = \int_0^1 xdx - 0 = \frac{1}{2} \neq 0$.
   Donc la formule est exacte sur $\mathbb{R}_0[X]$ et n'est pas exacte sur $\mathbb{R}_1[X]$, ce qui prouve qu'elle est d'ordre $m = 0$.



2. On procède de même.
   Pour $f : x \mapsto 1$, on a $e(f) = \int_0^1 f(x)dx - f(1/2) = \int_0^1 dx - 1 = 1 - 1 = 0$.
   Pour $f : x \mapsto x$, on a $e(f) = \int_0^1 f(x)dx - f(1/2) = \int_0^1 xdx - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$.
   Pour $f : x \mapsto x^2$, on a $e(f) = \int_0^1 f(x)dx - f(1/2) = \int_0^1 x^2dx - \frac{1}{4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \neq 0$.
   Donc la formule est exacte sur $\mathbb{R}_1[X]$ et n'est pas exacte sur $\mathbb{R}_2[X]$, ce qui prouve qu'elle est d'ordre $m = 1$.



3. La formule proposée est exacte sur $\mathbb{R}_2[X]$ si et seulement si $e(x \mapsto x^k) = 0$ pour $k \in \{0, 1, 2\}$, ce

qui donne le système linéaire :

$$\begin{cases} e(x\mapsto 1)=0 \\ e(x\mapsto x)=0 \\ e(x\mapsto x^2)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_0+\lambda_1+\lambda_2=\int_0^1 dx=1 \\ \frac{1}{2}\lambda_1+\lambda_2=\int_0^1 xdx=\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4}\lambda_1+\lambda_2=\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_0=\frac{1}{6} \\ \lambda_1=\frac{2}{3} \\ \lambda_2=\frac{1}{6} \end{cases}.$$

Dans ce cas, pour savoir si la formule est d'ordre 2, on teste la fonction $x\mapsto x^3$:

$$e(x\mapsto x^3)=\int_0^1 x^3dx-\left(\frac{1}{6}*(0^3)+\frac{2}{3}*(1/2)^3+\frac{1}{6}*(1^3)\right)=\frac{1}{4}-\frac{1}{12}-\frac{1}{6}=0.$$

La formule n'est donc pas d'ordre 2, mais d'ordre $m\geq 3$.
En fait, elle est d'ordre $m=3$ car

$$e(x\mapsto x^4)=\int_0^1 x^4dx-\left(\frac{1}{6}*(0^4)+\frac{2}{3}*(1/2)^4+\frac{1}{6}*(1^4)\right)=\frac{1}{5}-\frac{1}{24}-\frac{1}{6}\neq 0.$$

4. L'application φ est linéaire car si $P,Q\in\mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda\in\mathbb{R}$:

$$\varphi(\lambda P+Q)=(\lambda P(x_0)+Q(x_0),\cdots,\lambda P(x_n)+Q(x_n))=\lambda(P(x_0),\cdots,P(x_n))+(Q(x_0),\cdots,Q(x_n)),$$

donc $\varphi(\lambda P+Q)=\lambda\varphi(P)+\varphi(Q)$.
Ensuite, φ est injective car si $P\in Ker(\varphi)$, alors $P(x_1)=\cdots=P(x_n)=0$, donc P possède $n+1$ racines distinctes, ce qui entraîne $P=0$ (puisque $P\in\mathbb{R}_n[X]$), et donc $Ker(\varphi)=\{0\}$.
Enfin, par le théorème du rang :

$$rg(\varphi)=\dim(\mathbb{R}_n[X])-\dim(Ker(\varphi))=n+1-0=n+1=\dim(\mathbb{R}^{n+1}),$$

donc φ est surjective.
En conclusion, φ est une application linéaire bijective, donc un isomorphisme.

5. Pour $i\in\{0,\cdots,n\}$ fixé, il existe un unique polynôme $L_i\in\mathbb{R}_n[X]$ tel que $\varphi(L_i)=(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)$ (avec le "1" à la $(i+1)^e$ place), car φ est bijective. Ceci revient à dire qu'il existe un unique polynôme $L_i\in\mathbb{R}_n[X]$ tel que $L_i(x_i)=1$ et $L_i(x_j)=0$ si $j\neq i$.

6. La famille $(L_0,\cdots,L_n)$ est l'image de la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$ par l'isomorphisme réciproque φ^{-1}. Puisque qu'un isomorphisme transforme une base en une base, on en déduit que $(L_0,\cdots,L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

7. Par linéarité de l'erreur $f\mapsto e(f)$, la formule de quadrature $I_n(f)$ est exacte sur $\mathbb{R}_n[X]$ si et seulement si elle est exacte sur la base de Lagrange, c'est-à-dire $e(L_i)=0$ pour tout $i\in\{0,\cdots,n\}$. Or,

$$e(L_i)=\int_I L_i(x)w(x)dx-\sum_{j=0}^n\lambda_j\underbrace{L_i(x_j)}_{=\delta_{i,j}}=\int_I L_i(x)w(x)dx-\lambda_i,$$

donc la formule $I_n(f)$ est exacte sur $\mathbb{R}_n[X]$ si et seulement si $\int_I L_i(x)w(x)dx-\lambda_i=0$ pour tout $i\in\{0,\cdots,n\}$, ce qui donne la condition voulue.

8. Le polynôme L_0 est de degré ≤ 2, admet $1/2$ et 1 pour racines, donc il existe un réel α tel que

$$L_0=\alpha(X-\frac{1}{2})(X-1).$$

En outre, la condition $L_0(0)=1$ donne $\alpha=2$, et donc

$$L_0=(2X-1)(X-1)=2X^2-3X+1.$$

De même, on obtient

$$L_1=\frac{X(X-1)}{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}=-4X^2+4X,$$

$$L_2 = \frac{X(X-\frac{1}{2})}{1*(1-\frac{1}{2})} = 2X^2 - X.$$

On en déduit que la formule de quadrature $I_2(f)$ de la question 3. est exacte sur $\mathbb{R}_2[X]$ si et seulement si :

$$\lambda_0 = \int_0^1 L_0(x)dx = \int_0^1 (2x^2 - 3x + 1)dx = \frac{2}{3} - \frac{3}{2} + 1 = \frac{1}{6},$$

$$\lambda_1 = \int_0^1 L_1(x)dx = \int_0^1 (-4x^2 + 4x)dx = -\frac{4}{3} + \frac{4}{2} = \frac{2}{3},$$

$$\lambda_2 = \int_0^1 L_2(x)dx = \int_0^1 (2x^2 - x)dx = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6},$$

ce qui confirme bien le résultat de la question 3.

9. Soit $x \in [a;b]$. On applique la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction f (qui est bien de classe $\mathcal{C}^{m+1}$) entre les points a et x :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{1}{m!}\int_a^x (x-t)^m f^{(m+1)}(t)dt.$$

On peut réécrire le reste intégral à l'aide de la fonction φ_m :

$$\frac{1}{m!}\int_a^x (x-t)^m f^{(m+1)}(t)dt = \frac{1}{m!}\int_a^b \varphi_m(x,t) f^{(m+1)}(t)dt = R_m(x)$$

(car $t \mapsto \varphi_m(x,t)$ est nulle sur $]x;b]$ et coincide avec $t \mapsto (x-t)^m$ sur $[a,x]$).
On a donc $f(x) = P_m(x) + R_m(x)$, où P_m est une fonction polynomiale de degré $\leq m$. Puisque la formule de quadrature est d'ordre m, on a $e(P_m) = 0$ et donc par linéarité de l'erreur :

$$e(f) = e(P_m) + e(R_m) = e(R_m).$$

10. Evaluons $e(R_m)$:

$$\begin{aligned} e(R_m) &= \int_a^b R_m(x)w(x)dx - \sum_{j=0}^{n} \lambda_j R_m(x_j) \\ &= \int_a^b \left(\frac{1}{m!}\int_a^b \varphi_m(x,t)f^{(m+1)}(t)dt\right) w(x)dx - \sum_{j=0}^{n} \lambda_j \frac{1}{m!}\int_a^b \varphi_m(x_j,t)f^{(m+1)}(t)dt. \end{aligned}$$

Le premier terme se réécrit en utilisant le résultat admis sur la permutation des intégrales :

$$\begin{aligned} \int_a^b \left(\frac{1}{m!}\int_a^b \varphi_m(x,t)f^{(m+1)}(t)dt\right) w(x)dx &= \frac{1}{m!}\int_a^b \left(\int_a^b \varphi_m(x,t)f^{(m+1)}(t)w(x)dt\right)dx \\ &= \frac{1}{m!}\int_a^b \left(\int_a^b \varphi_m(x,t)f^{(m+1)}(t)w(x)dx\right)dt \\ &= \frac{1}{m!}\int_a^b \left(\int_a^b \varphi_m(x,t)w(x)dx\right)f^{(m+1)}(t)dt \end{aligned}$$

(il s'applique car la fonction $(x,t) \mapsto \varphi_m(x,t)f^{(m+1)}(t)w(x)$ est continue sur $[a;b]^2$).
Le second terme se réécrit par linéarité de l'intégrale :

$$\sum_{j=0}^{n} \lambda_j \frac{1}{m!}\int_a^b \varphi_m(x_j,t)f^{(m+1)}(t)dt = \frac{1}{m!}\int_a^b \left(\sum_{j=0}^{n} \lambda_j \varphi_m(x_j,t)\right) f^{(m+1)}(t)dt.$$

On en déduit :

$$e(R_m) = \frac{1}{m!}\int_a^b \underbrace{\left(\int_a^b \varphi_m(x,t)w(x)dx - \sum_{j=0}^{n} \lambda_j \varphi_m(x_j,t)\right)}_{=K_m(t)} f^{(m+1)}(t)dt = \frac{1}{m!}\int_a^b K_m(t) f^{(m+1)}(t)dt.$$

D'après la question précédente, on conclut finalement que :

$$e(f) = e(R_m) = \frac{1}{m!}\int_a^b K_m(t) f^{(m+1)}(t)dt.$$

11. Soit $t \in [0;1]$. Par définition du noyau de Peano, on a

$$K_1(t) = \int_0^1 \varphi_1(x,t)dx - \frac{1}{2}(\varphi_1(0,t) + \varphi_1(1,t)).$$

Puisque $\varphi_1(x,t) = 0$ si $x \in [0;t[$ et $\varphi_1(x,t) = x - t$ si $x \in [t;1]$, on a :

$$K_1(t) = \int_t^1 (x-t)dx - \frac{1}{2}(0 + (1-t)) = \frac{(1-t)^2}{2} - \frac{1-t}{2} = \frac{1}{2}t(t-1).$$

Si $g \in \mathcal{C}^2([0;1];\mathbb{R})$, alors on déduit de la question 10 :

$$e(g) = \int_0^1 K_1(t)g''(t)dt = \frac{1}{2}\int_0^1 t(t-1)g''(t)dt,$$

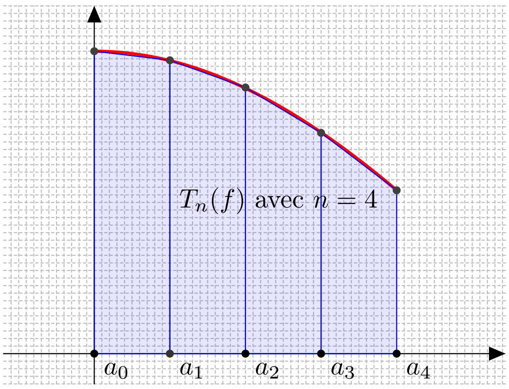
d'où :

$$|e(g)| \leq \frac{1}{2}\int_0^1 |t(t-1)| \times |g''(t)|dt \leq \frac{\|g''\|_{\infty,[0;1]}}{2}\int_0^1 t(1-t)dt.$$

Puisque $\int_0^1 t(1-t)dt = \int_0^1 (t-t^2)dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$, on en déduit finalement la majoration voulue :

$$|e(g)| \leq \frac{\|g''\|_{\infty,[0;1]}}{12}.$$

12. Représentation graphique de $T_n(f)$:



13. Décomposons l'erreur $e_n(f)$.
Tout d'abord, en utilisant la relation de Chasles et le changement de variable affine $x = a_i + th$ sur chaque sous-segment $[a_i; a_{i+1}]$, on a :

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)dx = h\sum_{i=0}^{n-1}\int_0^1 f(a_i + th)dt.$$

En outre,

$$T_n(f) = h\sum_{i=0}^{n-1}\frac{f(a_i) + f(a_{i+1})}{2},$$

donc
$$e_n(f) = h\sum_{i=0}^{n-1}\left(\int_0^1 f(a_i+th)dt - \frac{f(a_i)+f(a_{i+1})}{2}\right).$$
En posant $g_i(t) = f(a_i+th)$ pour tout $i \in \{0,\cdots,n-1\}$ et pour tout $t \in [0;1]$, ceci se réécrit :
$$e_n(f) = h\sum_{i=0}^{n-1}\left(\int_0^1 g_i(t)dt - \frac{g_i(0)+g_i(1)}{2}\right) = h\sum_{i=0}^{n-1} e_i(g),$$
ce qu'il fallait démontrer.

14. En utilisant alors la question 11. avec les fonctions g_i (qui sont bien de classe $\mathcal{C}^2$ comme f), on en déduit :
$$|e_n(f)| \leq h\sum_{i=0}^{n-1}|e_i(g)| \leq h\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{12}\|g_i''\|_{\infty,[0;1]}.$$
Puisque $\forall t \in [0;1],\ g_i''(t) = h^2 f''(a_i+th)$, on en déduit que
$$\|g_i''\|_{\infty,[0;1]} = \sup_{t\in[0;1]} h^2|f''(a_i+th)| = h^2 \sup_{x\in[a_i;a_{i+1}]}|f''(x)| \leq h^2\|f''\|_{\infty,[a;b]},$$
et donc
$$|e_n(f)| \leq h\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{12}h^2\|f''\|_{\infty,[a;b]} = \frac{h^3}{12}\|f''\|_{\infty,[a;b]} \times n.$$
Puisque $h = \frac{b-a}{n}$, ceci se réécrit :
$$|e_n(f)| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2}\|f''\|_{\infty,[a;b]}.$$

II Polynômes orthogonaux et applications

15. Pour tous réels a, b, on a
$$a^2+b^2-2|ab| = |a|^2+|b|^2-2|a||b| = (|a|-|b|)^2 \geq 0,$$
d'où l'inégalité $|ab| \leq \frac{1}{2}(a^2+b^2)$.
On en déduit que si f, g sont dans E, alors, par positivité de w :
$$|fgw| = |fg|w \leq \frac{1}{2}(f^2+g^2)w.$$
Comme f^2w et g^2w sont intégrables sur I, on en déduit que $\frac{1}{2}(f^2+g^2)w$ est intégrable sur I, et donc par comparaison, fgw est intégrable sur I.

16. Montrons que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$:
   - La fonction nulle $\tilde{0}$ est dans E car elle est continue et $\tilde{0}^2w = \tilde{0}$ est intégrable sur I.
   - Soit f, g dans E et $\lambda \in \mathbb{R}$. La fonction $\lambda f + g$ est continue (car f et g le sont), et
$$(\lambda f+g)^2w = \lambda^2(f^2w) + 2\lambda(fgw) + (g^2w),$$
donc $(\lambda f+g)^2w$ est intégrable sur I (comme combinaison linéaire de fonctions intégrables, en utilisant la question précédente), ce qui montre que $\lambda f + g \in E$.

   Cela entraîne que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

17. D'après la question 15., la quantité $\langle f,g\rangle$ est bien définie pour tout $(f,g) \in E^2$. De plus, $\langle f,g\rangle = \langle g,f\rangle$ (puisque $fg = gf$), et par linéarité de l'intégrale sur I, l'application $f \mapsto \langle f,g\rangle$ est une forme linéaire sur E. Donc $(f,g) \mapsto \langle f,g\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique sur E.
On a en outre, pour tout $f \in E$:
   - $\langle f,f\rangle = \int_I f^2(x)w(x)dx \geq 0$ car la fonction f^2w est positive (en tant que produit de fonctions positives) ;

- si $\langle f, f\rangle = 0$, alors $\int_I f^2(x)w(x)dx = 0$, ce qui entraîne, par continuité et positivité de la fonction f^2w :
$$\forall x \in I, \qquad f^2(x)w(x) = 0.$$
Mais w ne s'annule pas sur I (puisqu'elle est strictement positive), donc on obtient que f^2 est nulle, et donc f est nulle sur I, c'est-à-dire $f = 0_E$.

Finalement, l'opération $(f, g) \mapsto \langle f, g\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive, donc c'est un produit scalaire sur E.

18. Avec les notations de l'énoncé :
$$\langle p_n, q\rangle = \int_I p_n(x)q(x)w(x)dx.$$
Or, par hypothèse, on a
$$p_n(x)q(x)w(x) = \left(\prod_{i=1}^k (X - x_i)^{m_i+\varepsilon_i}\right) r(x)w(x),$$
où $r = \dfrac{p_n}{\prod_{i=1}^k (X - x_i)^{m_i}} \in \mathbb{R}[X]$ ne s'annule pas sur $\mathring{I}$ et $w > 0$.
Donc la fonction continue $x \mapsto p_n(x)q(x)w(x)$ a un signe constant sur $\mathring{I}$ (puisque $m_i + \varepsilon_i$ est pair pour tout i), et ne s'annule qu'en $x_0, \cdots, x_k$, donc n'est pas identiquement nulle sur I.
On en déduit que $\langle p_n, q\rangle \neq 0$.
Or, de par sa définition, le polynôme p_n est orthogonal à $p_0, \cdots, p_{n-1}$, donc $p_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]^{\perp}$.
Vu que p_n n'est pas orthogonal à q, on a nécessairement $\deg(q) \geq n$, c'est-à-dire $\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_k \geq n$.
Mais les ε_i valant 0 ou 1, on a nécessairement $k = n$ et $\varepsilon_i = 1$ pour tout i.
Par définition de l'entier k, ceci prouve que p_n possède n racines distinctes dans $\mathring{I}$.

Remarque
Preuve de l'existence et l'unicité (admises par l'énoncé) de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

- *Il y a un seul polynôme unitaire et de degré 0 : $p_0 = 1$.*
- *Supposons $p_0, \cdots, p_n$ construits et montrons que parmi les polynômes unitaires de degré $n + 1$, il en existe un seul qui soit orthogonal aux $(p_i)_{0\leq i\leq n}$. Un tel polynôme est de la forme :*
$$p_{n+1} = X^{n+1} + R_n,$$
avec $R_n \in \mathbb{R}_n[X]$. Puisque $\deg(p_k) = k$ pour tout $k \leq n$, la famille $(p_0, \cdots, p_n)$ est une base (orthogonale) de $\mathbb{R}_n[X]$, et donc R_n se décompose de manière unique sous la forme :
$$R_n = \sum_{k=0}^n \lambda_k p_k.$$
Dès lors, pour tout $i \in \{0, \cdots, n\}$:
$$\langle p_{n+1}, p_i\rangle = \langle X^{n+1}, p_i\rangle + \sum_{k=0}^n \lambda_k \underbrace{\langle p_k, p_i\rangle}_{=0 \text{ si } k\neq i} = \langle X^{n+1}, p_i\rangle + \lambda_i\|p_i\|^2,$$
donc p_{n+1} est orthogonal aux $(p_i)_{0\leq i\leq n}$ si et seulement si
$$\forall i \in \{0, \cdots, n\}, \qquad \lambda_i = -\frac{\langle X^{n+1}, p_i\rangle}{\|p_i\|^2},$$
ce qui montre l'existence et l'unicité de p_{n+1} :
$$p_{n+1} = X^{n+1} - \sum_{k=0}^n \frac{\langle X^{n+1}, p_k\rangle}{\|p_k\|^2} p_k.$$

19. Si $m \geq 2n+2$, alors la formule $I_n(f)$ sera exacte pour $f : x \mapsto \left(\prod_{i=0}^n (x-x_i)\right)^2$ (qui est un polynôme de degré $2(n+1) = 2n+2$). D'où l'égalité :

$$\int_I \left(\prod_{i=0}^n (x-x_i)\right)^2 w(x)dx = \sum_{j=0}^n \lambda_j \left(\underbrace{\prod_{i=0}^n (x_j - x_i)}_{=0}\right)^2 = 0.$$

Par continuité et positivité de la fonction $x \mapsto \left(\prod_{i=0}^n (x-x_i)\right)^2 w(x)$, cela entraîne que cette fonction est identiquement nulle sur I, ce qui est faux puisque $w > 0$ et $x \mapsto \left(\prod_{i=0}^n (x-x_i)\right)$ ne s'annule qu'en les x_i. Donc par l'absurde, on a $m \leq 2n+1$.

20. - Si $m = 2n+1$, alors le polynôme $\prod_{i=0}^n (X-x_i)$ est orthogonal aux premiers polynômes orthogonaux $p_0, \cdots, p_n$. En effet, pour tout $k \in \{0, \cdots, n\}$, la formule $I_n(f)$ est exacte pour $f : x \mapsto \left(\prod_{i=0}^n (x-x_i)\right) p_k(x)$ (car c'est un polynôme de degré $n+1+k \leq 2n+1$), ce qui donne :

$$\langle \prod_{i=0}^n (X-x_i), p_k \rangle = \int_I \left(\prod_{i=0}^n (x-x_i)\right) p_k(x) w(x) dx = \sum_{j=0}^n \lambda_j \left(\prod_{i=0}^n (x_j - x_i)\right) p_k(x_j) = 0.$$

    En conclusion, le polynôme $\prod_{i=0}^n (X-x_i)$ est unitaire, de degré $n+1$ et il est orthogonal à $p_0, \cdots, p_n$: par unicité des polynômes orthogonaux, on a donc $\prod_{i=0}^n (X-x_i) = p_{n+1}$, ce qui montre bien que les x_i sont les racines de p_{n+1}.
    - Réciproquement, si les x_i sont les racines de p_{n+1}, alors on a $p_{n+1} = \prod_{i=0}^n (X-x_i)$. Etant donné un polynôme $P \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$, on effectue sa division euclidienne par p_{n+1} :

$$P = p_{n+1}Q + R,$$

    avec $(Q, R) \in \mathbb{R}[X]$ tels que $\deg(R) \leq n$. Montrons alors que $e(P) = 0$: tout d'abord, par linéarité de l'erreur :

$$e(P) = e(p_{n+1}Q) + e(R).$$

    Mais par hypothèse, la formule est d'ordre $m \geq n$ et $\deg(R) \leq n$, donc $e(R) = 0$.
    D'autre part, $\langle p_{n+1}, Q\rangle = 0$ car $Q = 0$ ou $\deg(Q) = \deg(P) - \deg(p_{n+1}) \leq n$. Cela amène :

$$e(p_{n+1}Q) = \underbrace{\int_I p_{n+1}(x)Q(x)w(x)dx}_{=\langle p_{n+1}, Q\rangle = 0} - \sum_{j=0}^n \lambda_j \underbrace{p_{n+1}(x_j)}_{=0} Q(x_j) = 0,$$

    donc finalement $e(P) = 0$, ce qui montre que $m \geq 2n+1$. On a déjà vu à la question précédente que $m > 2n+1$ était impossible, donc la formule est d'ordre $m = 2n+1$.

21. p_0 est unitaire et de degré 0, donc $p_0 = 1$.
Ensuite, d'après la formule de récurrence obtenue dans la remarque faite à la question 18. :

$$p_1 = X - \frac{\langle X, p_0\rangle}{\|p_0\|^2} p_0 = X,$$

puisque $\langle X, p_0\rangle = \int_{-1}^1 x dx = 0$.
On itère le processus :

$$p_2 = X^2 - \frac{\langle X^2, p_1\rangle}{\|p_1\|^2} p_1 - \frac{\langle X^2, p_0\rangle}{\|p_0\|^2} p_0 = X^2 - \frac{1}{3},$$

car $\langle X^2, p_1\rangle = \int_{-1}^1 x^3 dx = 0$, $\langle X^2, p_0\rangle = \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{2}{3}$ et $\|p_0\|^2 = \int_{-1}^1 1^2 dx = 2$;

$$p_3 = X^3 - \frac{\langle X^3, p_2\rangle}{\|p_2\|^2} p_2 - \frac{\langle X^3, p_1\rangle}{\|p_1\|^2} p_1 - \frac{\langle X^3, p_0\rangle}{\|p_0\|^2} p_0 = X^3 - \frac{3}{5}X,$$

car $\langle X^3, p_2\rangle = \int_{-1}^1 (x^5 - \frac{1}{3}x^3) dx = 0$, $\langle X^3, p_1\rangle = \int_{-1}^1 x^4 dx = \frac{2}{5}$, $\|p_1\|^2 = \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{2}{3}$ et $\langle X^3, p_0\rangle = \int_{-1}^1 x^3 dx = 0$.
Finalement, on a donc :

$$p_0 = 1,\ p_1 = X,\ p_2 = X^2 - \frac{1}{3},\ p_3 = X^3 - \frac{3}{5}X.$$

22. On utilise le résultat de la question 20. avec $n = 2$: la formule de quadrature
$$I_2(f) = \lambda_0 f(x_0) + \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$$
est d'ordre $2n+1 = 5$ si et seulement si (x_0, x_1, x_2) sont les racines du polynôme orthogonal $p_3 = X^3 - \frac{3}{5}X$. En ordonnant ces racines dans l'ordre croissant, on obtient :
$$x_0 = -\sqrt{\frac{3}{5}}, \qquad x_1 = 0, \qquad x_2 = \sqrt{\frac{3}{5}}.$$
Pour calculer les coefficients $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$, on utilise l'exactitude de la formule sur $1, X, X^2$ (par exemple), ce qui donne les équations :
$$\left\{\begin{array}{l} \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = \int_{-1}^1 1dx \\ \lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = \int_{-1}^1 xdx \\ \lambda_0 x_0^2 + \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 = \int_{-1}^1 x^2 dx \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 2 \\ \sqrt{\frac{3}{5}}(-\lambda_0 + \lambda_2) = 0 \\ \frac{3}{5}(\lambda_0 + \lambda_2) = \frac{2}{3} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \lambda_0 = \lambda_2 = \frac{5}{9} \\ \lambda_1 = \frac{8}{9} \end{array}\right. .$$
Finalement, on obtient la formule d'ordre 5 suivante :
$$I_2(f) = \frac{5}{9} f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right).$$

23. Soit $k \in \mathbb{N}$. La fonction $x \mapsto x^k w(x) = \frac{x^k}{\sqrt{1-x^2}}$ est continue sur $]-1;1[$ et paire ou impaire (selon la parité de k, donc il suffit de montrer qu'elle est intégrable au voisinage de 1. Puisque $x^k w(x) \underset{x \to 1^-}{\sim} w(x) > 0$ et que
$$\int_0^x w(t)dt = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \arcsin(x) \underset{x \to 1^-}{\longrightarrow} \arcsin(1) = \frac{\pi}{2},$$
on en déduit que w est intégrable au voisinage de 1, et donc $x \mapsto x^k w(x)$ aussi.

24. Soit $x \in [-1;1]$. On note $\theta = \arccos(x) \in [0;\pi]$.
On a $Q_0(x) = \cos(0) = 1$, $Q_1(x) = \cos(\arccos(x)) = x$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\begin{aligned} Q_{n+2}(x) &= \cos((n+2)\theta) = \cos(n\theta)\cos(2\theta) - \sin(n\theta)\sin(2\theta) \\ &= (2\cos^2(\theta) - 1)\cos(n\theta) - 2\cos(\theta)\sin(\theta)\sin(n\theta) \\ &= 2\cos(\theta)\big(\underbrace{\cos(\theta)\cos(n\theta) - \sin(\theta)\sin(n\theta)}_{=\cos((n+1)\theta)}\big) - \cos(n\theta) \\ &= 2xQ_{n+1}(x) - Q_n(x). \end{aligned}$$
Finalement, on a les relations :
$$\forall x \in [-1;1], \qquad \left\{\begin{array}{l} Q_0(x) = 1 \\ Q_1(x) = x \\ \forall n \in \mathbb{N},\ Q_{n+2}(x) = 2xQ_{n+1}(x) - Q_n(x) \end{array}\right. .$$

25. Montrons par récurrence double que pour tout $n \in \mathbb{N}$, Q_n est polynomiale de degré n et de coefficient dominant $c_n = 2^{n-1}$ si $n \geq 1$ et $c_0 = 1$.
   - C'est vrai pour $n = 0$ car $Q_0 : x \mapsto 1$.
   - C'est vrai pour $n = 1$ car $Q_1 : x \mapsto x$.
   - Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [-1;1]$. Si $Q_n(x) = c_n x^n + R_n(x)$ et $Q_{n+1}(x) = c_{n+1}x^{n+1} + R_{n+1}(x)$, avec $\deg(R_n) < n$ et $\deg(R_{n+1}) < n+1$, alors
   $$Q_{n+2}(x) = 2c_{n+1}x^{n+2} + \underbrace{(2xR_{n+1}(x) - Q_n(x))}_{\deg < n+2},$$
   ce qui montre que Q_{n+2} est polynomiale de degré $n+2$ et de coefficient dominant $c_{n+2} = 2c_{n+1} = 2 * 2^n = 2^{n+1}$.

26. Les polynômes p_n sont unitaires et de degré n (d'après les résultats de la question précédente). Reste à montrer qu'ils sont deux à deux orthogonaux pour le produit scalaire associé à w.
Pour $(n,m) \in \mathbb{N}^2$ tels que $n \neq m$, on a :

$$\begin{aligned}
\langle Q_n, Q_m \rangle &= \int_{-1}^{1} \frac{Q_n(x)Q_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \underset{x=\cos(\theta)}{=} \int_0^{\pi} Q_n(\cos\theta) Q_m(\cos\theta) d\theta \\
&= \int_0^{\pi} \cos(n\theta)\cos(m\theta) d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \left(\cos((n+m)\theta) + \cos((n-m)\theta)\right) d\theta \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((n+m)\theta)}{n+m} + \frac{\sin((n-m)\theta)}{n-m}\right]_0^{\pi} = 0
\end{aligned}$$

(car on a $n - m \neq 0$ et $n + m \geq \max(n,m) > 0$).
Vu que p_n est colinéaire à Q_n pour tout $n \in \mathbb{N}$, on en déduit que

$$\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2,\ n \neq m \Longrightarrow \langle p_n, p_m \rangle = 0,$$

ce qui montre bien que les p_n sont les polynômes orthogonaux associés au poids w.

27. On réutilise la question 20. : la formule de quadrature $I_n(f)$ sera d'ordre maximal ($m = 2n+1$) si et seulement si $(x_0, \cdots, x_n)$ sont les racines de p_{n+1}, c'est-à-dire les racines de Q_{n+1}.
Or, d'après la question 18., on sait que ces racines sont situées dans $]-1;1[$.
On résout donc, pour $x \in]-1;1[$:

$$\begin{aligned}
Q_{n+1}(x) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \cos((n+1)\arccos(x)) = 0 \Longleftrightarrow (n+1)\arccos(x) = \tfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\
&\Longleftrightarrow \quad x = \cos\left(\tfrac{2k+1}{2n+2}\pi\right),\ k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Vu que cos réalise une bijection décroissante de $]0;\pi[$ dans $]-1;1[$, on obtient que les $n+1$ racines de p_{n+1} (ordonnées par ordre décroissant) sont :

$$y_j = \cos\left(\frac{2j+1}{2n+2}\pi\right), \qquad 0 \leq j \leq n.$$

Pour les avoir dans l'ordre croissant, on réindexe en posant :

$$x_j = y_{n-j} = \cos\left(\frac{2(n-j)+1}{2n+2}\pi\right), \qquad 0 \leq j \leq n.$$

III Accélération de la méthode des trapèzes

28. Soit un réel r tel que $0 < r < R$. Par définition du rayon de convergence R, la suite $(\alpha_n r^n)$ est bornée, donc il existe une constante $M > 0$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |\alpha_n| \leq \frac{M}{r^n}.$$

On peut choisir $M \geq 1$, donc pour tout $n \geq 1$, $\frac{M}{r^n} \leq \frac{M^n}{r^n}$, ce qui entraîne $|\alpha_n| \leq \left(\frac{M}{r}\right)^n$. Cela reste vrai pour $n = 0$ car $\alpha_0 = 1$. D'où l'inégalité voulue avec $q = \frac{M}{r}$.

29. Puisque $S \times \frac{1}{S} = 1$, il existe un disque ouvert de centre 0 dans lequel on a l'égalité :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n z^n \times \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n z^n = 1,$$

donc par produit de Cauchy de deux séries entières absolument convergentes sur ce disque, on obtient :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \beta_{n-k}\right) z^n = 1.$$

Par unicité d'un développement en série entière, on en déduit les relations :

$$\alpha_0\beta_0 = 1, \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=0}^{n} \alpha_k\beta_{n-k} = 0,$$

et donc (puisque $\alpha_0 = 1$) :

$$\beta_0 = 1, \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \beta_n = -(\alpha_1\beta_{n-1} + \alpha_2\beta_{n-2} + \cdots + \alpha_{n-1}\beta_1 + \alpha_n).$$

Montrons alors par récurrence forte que $\forall n \in \mathbb{N},\ |\beta_n| \leq (2q)^n$:

- C'est vrai pour $n = 0$ car $|\beta_0| = 1 \leq (2q)^0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $|\beta_k| \leq (2q)^k$ pour tout $k \in \{0, \cdots, n-1\}$, alors

$$|\beta_n| = \left|\sum_{k=1}^{n} \alpha_k\beta_{n-k}\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k||\beta_{n-k}| \leq \sum_{k=1}^{n} q^k(2q)^{n-k} = q^n \sum_{k=1}^{n}(1 + 2 + \cdots + 2^{n-1}),$$

c'est-à-dire

$$|\beta_n| \leq q^n \frac{2^n - 1}{2 - 1} \leq (2q)^n.$$

30. Considérons la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} \beta_n z^n$, où la suite (β_n) est définie par les relations obtenues à la question précédente. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a la majoration :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |\beta_n z^n| \leq (2q|z|)^n,$$

donc la série entière converge absolument si $|z| < \frac{1}{2q}$. En notant $T(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \beta_n z^n$, on a donc T qui est développable en série entière, et pour tout z tel que $|z| < \frac{1}{2q}$, on a $S(z) \times T(z) = 1$ (d'après le produit de Cauchy effectué auparavant), ce qui montre que $T = \frac{1}{S}$, et donc que $\frac{1}{S}$ est développable en série entière au voisinage de 0.

31. Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, on a

$$\frac{e^z - 1}{z} = \frac{1}{z}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^{n-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{(n+1)!}.$$

En notant $S(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{(n+1)!}$, on définit donc une fonction S développable en série entière sur $\mathbb{C}$ dont le premier coefficient vaut $\alpha_0 = 1$. D'après la question précédente, la fonction $\frac{1}{S}$ est développable en série entière au voisinage de 0, donc il existe une suite complexe (β_n) (unique par unicité d'un développement en série entière) et un réel $r > 0$ tels que :

$$\forall 0 < |z| < r, \qquad \frac{z}{e^z - 1} = \frac{1}{S(z)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n z^n,$$

d'où le résultat en posant $b_n = n!\beta_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

32. Au voisinage de 0, on a l'égalité

$$z = (e^z - 1) \times \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{n!} z^n = \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} z^k\right) \times \left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{b_p}{p!} z^p\right),$$

avec convergence absolue des deux séries entières. On peut donc effectuer un produit de Cauchy :

$$z = \sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\sum_{\substack{k \geq 1 \\ p \geq 0 \\ k+p=n}} \frac{1}{k!} \times \frac{b_p}{p!} \Big) z^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{(n-p)!} \times \frac{b_p}{p!}\right) z^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{p=0}^{n-1} \binom{n}{p} b_p\right) z^n.$$

Par unicité d'un développement en série entière, on peut identifier les coefficients : pour $n = 1$, on obtient $b_0 = 1$. Pour tout $n \geq 2$, on obtient $\sum\limits_{p=0}^{n-1} \binom{n}{p} b_p = 0$.

33. Avec $n=2$, la formule précédente donne $b_0+2b_1=0$, donc $b_1=-\frac{b_0}{2}=-\frac{1}{2}$.
Avec $n=3$, cela donne $b_0+3b_1+3b_2=0$, donc $b_2=-\frac{b_0+3b_1}{3}=\frac{1}{6}$.
Avec $n=4$, cela donne $b_0+4b_1+6b_2+4b_3=0$, donc $b_3=0$.
Avec $n=5$, cela donne $b_0+5b_1+10b_2+10b_3+5b_4=0$, donc $b_4=-\frac{1}{30}$.

34. La fonction $\Psi : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{b_n}{n!}x^n$ (définie sur un intervalle $]-r;r[$ avec $r>0$) est paire car pour tout $x \in]-r;r[$:

$$\Psi(x) = \frac{x}{e^x-1} - b_1 x - b_0 = \frac{x}{e^x-1} + \frac{x}{2} - 1 = \frac{x(e^x+1)}{2(e^x-1)} - 1,$$

donc

$$\Psi(-x) = \frac{-x(e^{-x}+1)}{2(e^{-x}-1)} - 1 = \frac{-x(1+e^x)}{2(1-e^x)} - 1 = \Psi(x).$$

Le développement en série entière de Ψ ne comporte donc que des termes d'exposants pairs, ce qui montre que les b_n d'indices impairs sont nuls pour $n \geq 3$.

35. On a facilement :

$$B_0(x) = 1, \qquad B_1(x) = b_0 x + b_1 = x - \frac{1}{2},$$

$$B_2(x) = b_0x^2 + 2b_1x + b_2 = x^2 - x + \frac{1}{6}, \qquad B_3(x) = b_0x^3 + 3b_1x^2 + 3b_2x + b_3 = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x.$$

36.
- Par définition de B_m :

$$B_m(1) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} b_k.$$

Or, si $m \geq 2$, on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} \binom{m}{k} b_k = 0$ d'après la question 32., donc $B_m(1) = \binom{m}{m} b_m = b_m$.

- Pour $m \geq 1$, on a

$$B'_m(x) = \sum_{k=0}^{m-1} (m-k)\binom{m}{k} b_k x^{m-k-1}.$$

Or $(m-k)\displaystyle\binom{m}{k} = \frac{m!}{k!(m-k-1)!} = m\binom{m-1}{k}$, donc

$$B'_m(x) = m\sum_{k=0}^{m-1} \binom{m-1}{k} b_k x^{m-1-k} = mB_{m-1}(x).$$

37. Travaillons sur le terme $\displaystyle\int_0^n B_1(x-\lfloor x\rfloor)g'(x)dx$. Par la relation de Chasles, on a :

$$\int_0^n B_1(x-\lfloor x\rfloor)g'(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} B_1(x-\lfloor x\rfloor)g'(x)dx.$$

Or, pour $x \in [k, k+1[$, on a $\lfloor x\rfloor = k$, donc

$$\int_0^n B_1(x-\lfloor x\rfloor)g'(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} B_1(x-k)g'(x)dx.$$

En intégrant par parties, on a pour tout $k \in \{0, \cdots, n-1\}$:

$$\begin{aligned}
\int_k^{k+1} B_1(x-k)g'(x)dx &= [B_1(x-k)g(x)]_k^{k+1} - \int_k^{k+1} B'_1(x-k)g(x)dx \\
&= B_1(1)g(k+1) - B_1(0)g(k) - \int_k^{k+1} B_0(x-k)g(x)dx \\
&= \frac{1}{2}(g(k+1)+g(k)) - \int_k^{k+1} g(x)dx.
\end{aligned}$$

On en déduit par sommation :

$$\int_0^n B_1(x-\lfloor x\rfloor)g'(x)dx \quad = \quad \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(g(k+1)+g(k)) - \int_0^n g(x)dx,$$

ce qui donne la relation voulue.

38. D'après la question précédente, il suffit de démontrer que pour tout entier $m \geq 2$:

$$-\int_0^n B_1(x-\lfloor x\rfloor)g'(x)dx = \sum_{p=2}^{m}\frac{(-1)^{p-1}b_p}{p!}\left(g^{(p-1)}(n)-g^{(p-1)}(0)\right)+\frac{(-1)^m}{m!}\int_0^n B_m(x-\lfloor x\rfloor)g^{(m)}(x)dx.$$

On procède par récurrence sur m :

- Montrons la formule pour $m=2$: en décomposant les intégrales avec la relation de Chasles et en intégrant par parties, on obtient (puisque $B_1 = \frac{1}{2}B_2'$) :

$$\begin{aligned}
-\int_0^n B_1(x-\lfloor x\rfloor)g'(x)dx &= -\sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1} B_1(x-k)g'(x)dx \\
&= -\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2}\left(B_2(1)g'(k+1)-B_2(0)g'(k)-\int_k^{k+1}B_2(x-k)g''(x)dx\right).
\end{aligned}$$

  Mais $B_2(1)=B_2(0)=b_2$, donc ceci se réécrit :

$$\begin{aligned}
-\int_0^n B_1(x-\lfloor x\rfloor)g'(x)dx &= -\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2}\left(b_2\big(g'(k+1)-g'(k)\big)-\int_k^{k+1}B_2(x-k)g''(x)dx\right) \\
&= -\frac{b_2}{2}\big(g'(n)-g'(0)\big)+\frac{1}{2}\int_0^n B_2(x-\lfloor x\rfloor)g''(x)dx,
\end{aligned}$$

  ce qui montre la formule voulue pour $m=2$.

- Soit $m \geq 2$. On suppose que

$$-\int_0^n B_1(x-\lfloor x\rfloor)g'(x)dx = \sum_{p=2}^{m}\frac{(-1)^{p-1}b_p}{p!}\left(g^{(p-1)}(n)-g^{(p-1)}(0)\right)+\frac{(-1)^m}{m!}\int_0^n B_m(x-\lfloor x\rfloor)g^{(m)}(x)dx.$$

  Travaillons sur la dernière intégrale : par la relation de Chasles,

$$\int_0^n B_m(x-\lfloor x\rfloor)g^{(m)}(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1}B_m(x-k)g^{(m)}(x)dx.$$

  On intègre par parties, en remarquant que $B_m = \left(\frac{B_{m+1}}{m+1}\right)'$. Pour tout $k\in\{0,\cdots,n-1\}$:

$$\int_k^{k+1}B_m(x-k)g^{(m)}(x)dx = \left[\frac{B_{m+1}(x-k)}{m+1}g^{(m)}(x)\right]_k^{k+1} - \int_k^{k+1}\frac{B_{m+1}(x-k)}{m+1}g^{(m+1)}(x)dx$$

$$= \frac{1}{m+1}\left(B_{m+1}(1)g^{(m+1)}(k+1)-B_{m+1}(0)g^{(m+1)}(k)-\int_k^{k+1}B_{m+1}(x-k)g^{(m+1)}(x)dx\right).$$

  Or, $B_{m+1}(1)=B_{m+1}(0)=b_{m+1}$ (puisque $m+1\geq 2$), donc

$$\int_k^{k+1}B_m(x-k)g^{(m)}(x)dx = \frac{1}{m+1}\left(b_{m+1}\big(g^{(m+1)}(k+1)-g^{(m+1)}(k)\big)-\int_k^{k+1}B_{m+1}(x-k)g^{(m+1)}(x)dx\right.$$

  Par sommation, on en déduit

$$\int_0^n B_m(x-\lfloor x\rfloor)g^{(m)}(x)dx = \frac{b_{m+1}}{m+1}(g^{(m+1)}(n)-g^{(m+1)}(0))-\frac{1}{m+1}\int_0^n B_{m+1}(x-\lfloor x\rfloor)g^{(m+1)}(x)dx.$$

  En utilisant l'hypothèse de récurrence, on obtient finalement

$$-\int_0^n B_1(x-\lfloor x\rfloor)g'(x)dx = \sum_{p=2}^{m+1}\frac{(-1)^{p-1}b_p}{p!}\left(g^{(p-1)}(n)-g^{(p-1)}(0)\right)+\frac{(-1)^{m+1}}{(m+1)!}\int_0^n B_{m+1}(x-\lfloor x\rfloor)g^{(m+1)}(x$$

39. On effectue le changement de variable affine $x = a + th$:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_0^n hf(a+th)dt.$$

Pour $m \geq 1$, on applique alors la formule d'Euler-Maclaurin à $g : t \mapsto hf(a+th)$ (qui est bien de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0;n]$), jusqu'à l'ordre $2m$:

$$\begin{aligned} \int_0^n hf(a+th)dt &= h\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(a_k)+f(a_{k+1})}{2} + \sum_{p=2}^{2m} \frac{(-1)^{p-1}b_p}{p!} h^p \left(f^{(p-1)}(b) - f^{(p-1)}(a)\right) \\ &\quad + \frac{h^{2m+1}}{(2m)!}\int_0^n B_{2m}(t-\lfloor t\rfloor) f^{(2m)}(a+th)dt. \end{aligned}$$

Or, pour $p \geq 2$, les b_p d'indices impairs sont nuls, donc

$$\sum_{p=2}^{2m} \frac{(-1)^{p-1}b_p}{p!} h^p \left(f^{(p-1)}(b) - f^{(p-1)}(a)\right) = -\sum_{p=1}^{m} \frac{b_{2p}}{(2p)!} h^{2p} \left(f^{(2p-1)}(b) - f^{(2p-1)}(a)\right).$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dt &= h\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(a_k)+f(a_{k+1})}{2} - \sum_{p=1}^{m} \frac{b_{2p}}{(2p)!} h^{2p} \left(f^{(2p-1)}(b) - f^{(2p-1)}(a)\right) \\ &\quad + \frac{h^{2m+1}}{(2m)!}\int_0^n B_{2m}(t-\lfloor t\rfloor) f^{(2m)}(a+th)dt \\ &= T_n(f) - \sum_{p=1}^{m} \frac{(b-a)^{2p} b_{2p}}{(2p)! n^{2p}} \left(f^{(2p-1)}(b) - f^{(2p-1)}(a)\right) \\ &\quad + \frac{(b-a)^{2m+1}}{(2m)! n^{2m+1}}\int_0^n B_{2m}(t-\lfloor t\rfloor) f^{(2m)}(a+th)dt. \end{aligned}$$

D'où le résultat en posant

$$\rho_{2m}(n) = \frac{(b-a)^{2m+1}}{(2m)! n^{2m+1}}\int_0^n B_{2m}(t-\lfloor t\rfloor) f^{(2m)}(a+th)dt,$$

puisque

$$\left|\int_0^n B_{2m}(t-\lfloor t\rfloor) f^{(2m)}(a+th)dt\right| \leq n \times \sup_{x\in[0,1]} |B_{2m}(x)| \times \sup_{t\in[0;n]} |f^{2m}(a+th)|,$$

donc

$$|\rho_{2m}(n)| \leq \frac{\|B_{2m}\|_{\infty,[0;1]} \times \|f^{(2m)}\|_{\infty,[a;b]} \times (b-a)^{2m+1}}{(2m)!} \times \frac{1}{n^{2m}}.$$