DM03 - A rendre lundi 16/10/2023

Sujet Centrale MP/MPI 2023, math 1

Ce DM consiste en la résolution du sujet **Centrale MP/MPI 2023**, épreuve math 1.

Remarques et conseils, à lire avant de commencer !

1. Ce sujet est très long (et parfois assez répétitif...), ne passez pas donc pas trop de temps dessus (entre 4h et 6h maximum). Mais il est très progressif (le début est assez facile), donc tout le monde peut s'y attaquer sérieusement. Cela vous donne un premier contact avec un "vrai" sujet.
2. Autre avantage de ce sujet : vous disposez de tous les outils pour le faire en entier (algèbre linéaire, polynômes, intégrales généralisées), sauf dans les questions 22. et 23., où l'on parle de "spectre" et "d'endomorphisme diagonalisable", notions encore inconnues pour les 3/2 (vous pouvez donc sauter ces sous-questions, elles n'influent pas sur la suite du problème de toute façon).
3. Attention, les parties ne sont globalement pas indépendantes, mieux vaut faire dans l'ordre (beaucoup de notions sont introduites au fur et à mesure).
4. Même si vous rédigez très peu de questions, vous pouvez toujours me rendre votre copie pour correction détaillée, c'est toujours utile !

Mathématiques 1

MP, MPI

4 heures Calculatrice autorisée

2023

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Sur le calcul ombral

Objectifs

Ce problème introduit le calcul ombral et propose d'en démontrer certains résultats.

Historiquement, ce « calcul » reposait sur un ensemble de manipulations heuristiques sur les indices qui étaient traités comme des puissances. Pour justifier ces règles, une solution consiste à utiliser des endomorphismes agissant sur des polynômes. Ce problème a pour objectif de présenter ces règles et d'en déduire des identités polynomiales non triviales.

Notations

— $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

— $\mathbb{K}[X]$ désigne l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$. Dans ce problème, on identifie polynômes formels et fonctions polynomiales de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$ associées. On identifie de plus les éléments de $\mathbb{K}$ aux polynômes constants.

— Tout polynôme $p \in \mathbb{K}[X]$ s'écrit de manière unique

$$p = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$$

où (a_k) est une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$ nulle à partir d'un certain rang. Si p n'est pas le polynôme nul, son degré $\deg(p)$ est le plus grand entier k tel que $a_k \neq 0$. Par convention, le degré du polynôme nul est -1 (cette convention est inhabituelle).

— Si n est un entier naturel, $\mathbb{K}_n[X]$ désigne le sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

— On note $\mathcal{L}(\mathbb{K}[X])$ l'algèbre des endomorphismes de l'espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$.

— On note I l'endomorphisme identité de $\mathbb{K}[X]$.

— Les éléments inversibles de l'algèbre $\mathcal{L}(\mathbb{K}[X])$ sont les endomorphismes bijectifs (automorphismes) de l'espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$.

— Pour $T \in \mathcal{L}(\mathbb{K}[X])$ et $p \in \mathbb{K}[X]$, on note $Tp = T(p)$.

— D désigne l'endomorphisme de dérivation sur $\mathbb{K}[X]$: $\forall p \in \mathbb{K}[X]$, $D(p) = Dp = p'$.

— Si T est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$, on définit la suite d'endomorphismes (T^k) par récurrence : $T^0 = I$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $T^{k+1} = T \circ T^k = T^k \circ T$.

I Étude d'endomorphismes de $\mathbb{K}[X]$

I.A – Soit $a \in \mathbb{K}$. Pour tout $p \in \mathbb{K}[X]$, on pose $E_a(p) = E_a p = p(X+a)$.

Q 1. Montrer que E_a est un automorphisme de $\mathbb{K}[X]$.

I.B – À tout $p \in \mathbb{R}[X]$, on associe la fonction $J(p) = Jp$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad J(p)(x) = Jp(x) = \int_x^{x+1} p(t)\,\mathrm{d}t.$$

Q 2. Montrer que J est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

Q 3. Montrer que J conserve le degré et que J est inversible.

I.C – À tout $p \in \mathbb{K}[X]$, on associe la fonction $L(p) = Lp$ de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{K}, \quad L(p)(x) = Lp(x) = -\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} p'(x+t)\,\mathrm{d}t.$$

Q 4. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^k \,\mathrm{d}t$ existe pour tout $k \in \mathbb{N}$ et calculer sa valeur.

Q 5. Montrer que L est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$. Est-il inversible ?

II Formule de Taylor pour les endomorphismes shift-invariants de $\mathbb{K}[X]$

Soit T un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$. On dit que :

— T est *shift-invariant* si, pour tout $a \in \mathbb{K}$, $E_a \circ T = T \circ E_a$;

— T est un *endomorphisme delta* si T est shift-invariant et si l'image du polynôme X par T est une constante non nulle : $TX \in \mathbb{K}^*$.

II.A –

Q 6. Soit $a \in \mathbb{K}$. Vérifier que les endomorphismes I et D sont shift-invariants, ainsi que les endomorphismes E_a, J et L définis dans la partie I. Sont-ils des endomorphismes delta ?

Q 7. Montrer que l'ensemble des endomorphismes shift-invariants de $\mathbb{K}[X]$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(\mathbb{K}[X])$. L'ensemble des endomorphismes delta de $\mathbb{K}[X]$ est-il stable par addition ? par composition ?

II.B –

Q 8. Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$. Pour tout polynôme $p \in \mathbb{K}[X]$, montrer que l'expression

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k D^k p$$

a un sens et définit un polynôme de $\mathbb{K}[X]$.

On note alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k D^k$ l'application de $\mathbb{K}[X]$ qui, à un polynôme $p \in \mathbb{K}[X]$, associe le polynôme $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k D^k p$.

Q 9. Montrer que, pour toute suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{K}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k D^k$ est un endomorphisme shift-invariant.

Q 10. Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ des suites d'éléments de $\mathbb{K}$ telles que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k D^k = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k D^k$.
Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k = b_k$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit le polynôme $q_n = \dfrac{X^n}{n!}$. On se donne T un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$.

Q 11. Montrer que T est un endomorphisme shift-invariant si, et seulement si,

$$T = \sum_{k=0}^{+\infty} (Tq_k)(0) D^k.$$

Q 12. Montrer que deux endomorphismes shift-invariants de $\mathbb{K}[X]$ commutent.

II.C – Dans cette sous-partie, on applique le résultat de la question 11 aux endomorphismes de la partie I.

Q 13. Pour tout $p \in \mathbb{K}[X]$ non nul et $a \in \mathbb{K}$, montrer, à l'aide de la question 11, que

$$p(X+a) = \sum_{k=0}^{\deg(p)} \frac{a^k}{k!} p^{(k)}$$

où $p^{(k)}$ désigne la dérivée k-ième du polynôme p. Reconnaitre cette formule.

Q 14. Pour $p \in \mathbb{K}[X]$, exprimer Jp en fonction des dérivées $p^{(k)}$ ($k \in \mathbb{N}$) de p.

Q 15. Démontrer que l'endomophisme $D - I$ est inversible et exprimer L en fonction de $(D-I)^{-1}$.

II.D – Dans cette sous-partie, T est un endomorphisme non nul shift-invariant de $\mathbb{K}[X]$.
On rappelle que le degré du polynôme nul est par convention égal à -1.

Q 16. Montrer qu'il existe un entier naturel $n(T)$ tel que, pour tout polynôme $p \in \mathbb{K}[X]$,

$$\deg(Tp) = \max\{-1, \deg(p) - n(T)\}.$$

Q 17. En déduire $\ker(T)$ en fonction de $n(T)$.

Q 18. Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes :

(1) T est inversible ;

(2) $T1 \neq 0$;

(3) $\forall p \in \mathbb{K}[X]$, $\deg(Tp) = \deg(p)$.

Q 19. Si ces conditions sont vérifiées, montrer que T^{-1} est encore un endomorphisme shift-invariant.

II.E – Dans cette sous-partie, T est un endomorphisme delta de $\mathbb{K}[X]$.

Q 20. Montrer qu'il existe une suite de scalaires $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vérifiant $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 \neq 0$ et $T = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k D^k$.

Q 21. Montrer qu'il existe un unique endomorphisme U shift-invariant et inversible tel que $T = D \circ U$. Préciser U dans le cas $T = D$, puis dans le cas $T = L$.

Q 22. Pour tout polynôme $p \in \mathbb{K}[X]$ non nul, vérifier que $\deg(Tp) = \deg(p) - 1$. En déduire $\ker(T)$ et le spectre de T.

Q 23. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note T_n la restriction de T à $\mathbb{K}_n[X]$. Montrer que T_n est un endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$. Est-il diagonalisable ?

Q 24. Déterminer $\mathrm{Im}(T_n)$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$ et en déduire que T est surjectif.

III Suite de polynômes associée à un endomorphisme delta

On souhaite montrer que, pour tout endomorphisme delta Q, il existe une unique suite de polynômes $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{K}[X]$ telle que

— $q_0 = 1$;

— $\forall n \in \mathbb{N}$, $\deg(q_n) = n$;

— $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $q_n(0) = 0$;

— $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $Qq_n = q_{n-1}$.

Cette suite sera appelée *suite de polynômes associée* à l'endomorphisme delta Q.

III.A – Soit Q un endomorphisme delta.

Q 25. Montrer l'existence et l'unicité de la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes associée à Q.

Q 26. Montrer que, pour tout entier naturel n,

$$\forall (x,y) \in \mathbb{K}^2, \qquad q_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} q_k(x) q_{n-k}(y).$$

III.B – Réciproquement, soit $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes de $\mathbb{K}[X]$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\deg(q_n) = n$ et

$$\forall (x,y) \in \mathbb{K}^2, \qquad q_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} q_k(x) q_{n-k}(y).$$

Q 27. Montrer qu'il existe un unique endomorphisme delta Q dont $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite de polynômes associée.

III.C – Soit Q un endomorphisme delta, soit $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes associée à Q et soit n un entier naturel.

Q 28. Montrer que la famille $(q_0, q_1, ..., q_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Q 29. D'après la question 23, Q induit un endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ noté Q_n. Donner sa matrice dans la base précédente. En déduire sa trace, son déterminant et son polynôme caractéristique.

III.D – Dans cette sous-partie, on détermine la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes associée à certains endomorphismes.

Q 30. Pour $Q = D$, vérifier que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad q_n = \frac{X^n}{n!}.$$

Q 31. Pour $Q = E_1 - I$, vérifier que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad q_n = \frac{X(X-1)\cdots(X-n+1)}{n!}.$$

III.E – Cette sous-partie propose de généraliser la formule de Taylor démontrée dans la partie II. On se donne Q un endomorphisme delta et on note $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes associée à Q.

Q 32. Démontrer que, pour tout $p \in \mathbb{K}[X]$, l'expression $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}(Q^k p)(0)q_k$ a un sens et définit un polynôme de $\mathbb{K}[X]$, puis que

$$p = \sum_{k=0}^{+\infty}(Q^k p)(0)q_k.$$

Q 33. En déduire que, pour tout endomorphisme shift-invariant T, on a

$$T = \sum_{k=0}^{+\infty}(Tq_k)(0)Q^k.$$

III.F –

Q 34. En choisissant $Q = E_1 - I$, démontrer que, si p est un polynôme non constant, alors

$$p'(X) = \sum_{k=1}^{\deg(p)} \frac{1}{k}\left(\sum_{j=0}^{k}(-1)^{j+1}\binom{k}{j}p(X+j)\right).$$

C'est la *formule de dérivation numérique des polynômes*.

IV Un peu de calcul ombral

Si T est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$ on définit sa dérivée de Pincherle, notée T', comme l'endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$ tel que,

$$\forall p \in \mathbb{K}[X], \qquad T'(p) = T(Xp) - XT(p).$$

IV.A – Soient S et T deux endomorphismes de $\mathbb{K}[X]$.

Q 35. Montrer que, s'il existe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de scalaires telle que $T = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k D^k$, alors $T' = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} k a_k D^{k-1}$.

Q 36. Si T est un endomorphisme shift-invariant, montrer que T' est encore un endomorphisme shift-invariant.

Q 37. Si T est un endomorphisme delta, montrer que T' est un endomorphisme shift-invariant et inversible.

Q 38. Vérifier que $(S \circ T)' = S' \circ T + S \circ T'$.

IV.B – Soit Q un endomorphisme delta. On rappelle que d'après la partie II, il existe un unique endomorphisme U shift-invariant et inversible tel que $Q = D \circ U$. On note $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes associée à Q au sens de la partie III.

Q 39. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$(Q' \circ U^{-n-1})(X^n) = X\,U^{-n}(X^{n-1}).$$

Q 40. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$n!q_n(X) = X\,U^{-n}(X^{n-1})$$

puis que

$$nq_n(X) = X(Q')^{-1}(q_{n-1}).$$

IV.C – Dans cette sous-partie, on applique les résultats de la question 40 à l'endomorphisme L étudié dans les parties I et II. On note $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sa suite de polynômes associée au sens de la partie III.

Q 41. Vérifier que, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\ell_n' = \ell_{n-1}' - \ell_{n-1}$$

et

$$X\ell_n'' - X\ell_n' + n\ell_n = 0$$

et

$$\ell_n(X) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n-1}{k-1}\frac{X^k}{k!}.$$

IV.D – Soient Q un endomorphisme delta de suite de polynômes associée notée $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Q 42. Montrer qu'il existe un unique endomorphisme inversible T tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad Tq_n = \frac{X^n}{n!}.$$

Q 43. Montrer aussi que $D = T \circ Q \circ T^{-1}$.

IV.E – On fixe $\alpha > 0$ et on définit la fonction W de $\mathbb{K}[X]$ par

$$W : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \to & \mathbb{K}[X] \\ p & \mapsto & p(\alpha X) \end{array} \right.$$

Q 44. Montrer que W est un automorphisme de $\mathbb{K}[X]$.

On pose $P = W \circ L \circ W^{-1}$ où L est l'endomorphisme étudié dans les parties I et II.

Q 45. Montrer que

$$P = \frac{1}{\alpha} D \circ \left(\frac{1}{\alpha} D - I \right)^{-1}.$$

Q 46. Montrer ensuite que P est un endomorphisme delta dont la suite de polynômes associée $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad p_n = \ell_n(\alpha X).$$

Q 47. Vérifier que $D = L \circ (L - I)^{-1}$ puis que $P = L \circ \big(\alpha I + (1-\alpha)L\big)^{-1}$.

On note T l'unique automorphisme vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T\ell_n = \dfrac{X^n}{n!}$ et on pose $Q = T \circ P \circ T^{-1}$.

Q 48. Montrer que $Q = D \circ \big(\alpha I + (1-\alpha)D\big)^{-1}$. En déduire que Q est un endomorphisme delta dont la suite de polynômes associée $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad r_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \alpha^k (1-\alpha)^{n-k} \frac{X^k}{k!}.$$

Q 49. Conclure que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \ell_n(\alpha X) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \alpha^k (1-\alpha)^{n-k} \ell_k(X).$$

Les endomorphismes W et T étudiés dans la sous-partie IV.E *sont appelés opérateurs ombraux. Les polynômes (ℓ_n) associés à l'endomorphisme L sont connus sous le nom de polynômes de Laguerre (de paramètre -1). La dernière formule démontrée grâce aux opérateurs ombraux est leur formule de duplication.*

• • • FIN • • •
