Corrigé du DM01

Quelques propriétés des séries semi-convergentes

Partie I - Transformation d'Abel

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k v_k$.
Réécrivons v_k en fonction des sommes partielles T_k : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ v_k = T_k - T_{k-1}$.
On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \begin{aligned} S_n &= \alpha_0 v_0 + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (T_k - T_{k-1}) \\ &= \alpha_0 v_0 + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k T_k - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k T_{k-1}. \end{aligned}$$

En faisant un changement d'indice dans la dernière somme, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \begin{aligned} S_n &= \alpha_0 v_0 + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k T_k - \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{k+1} T_k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \alpha_k T_k - \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{k+1} T_k \qquad\qquad (\text{car } v_0 = T_0) \\ &= \alpha_n T_n + \sum_{k=0}^{n-1} (\alpha_k - \alpha_{k+1}) T_k. \end{aligned}$$

(b) Commençons par majorer le terme général de la série $\sum |(\alpha_k - \alpha_{k+1}) T_k|$:

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad |(\alpha_k - \alpha_{k+1}) T_k| = (\alpha_k - \alpha_{k+1})\, |T_k|\,,$$

car la suite (α_k) est décroissante.
De plus, la suite (T_k) est bornée par M donc

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad |(\alpha_k - \alpha_{k+1}) T_k| \leq M(\alpha_k - \alpha_{k+1}).$$

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} |(\alpha_k - \alpha_{k+1}) T_k| \leq \sum_{k=0}^{n} M(\alpha_k - \alpha_{k+1}) = M(\alpha_0 - \alpha_{n+1}) \leq M\alpha_0$$

(puisque $\alpha_{n+1} \geq 0$). Ainsi, la série à termes positifs $\displaystyle\sum_{k\geq 0} |(\alpha_k - \alpha_{k+1}) T_k|$ a ses sommes partielles majorées, donc c'est une série convergente.
La série complexe $\displaystyle\sum_{k\geq 0} (\alpha_k - \alpha_{k+1}) T_k$ est donc convergente, puisqu'absolument convergente.
Il existe donc un nombre complexe S tel que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} (\alpha_k - \alpha_{k+1}) T_k = S.$$

Quant à la suite $(\alpha_n T_n)$, elle converge vers 0 puisque $\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et (T_n) est bornée.
Donc d'après 1.(a), $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} S$, ce qui montre que la série $\sum u_n$ converge.

2. • Si $\theta \equiv 0\ [2\pi]$, alors la série proposée est $\sum 1/n$, donc elle diverge.

• Supposons donc $\theta \not\equiv 0\ [2\pi]$ (c'est-à-dire $e^{i\theta} \neq 1$).
Commençons par calculer les sommes partielles de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} e^{in\theta}$ (ce sont des sommes géométriques) :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{k=1}^{n} e^{ik\theta} = \sum_{k=0}^{n} \left(e^{i\theta}\right)^k - 1 = \frac{1-\left(e^{i\theta}\right)^{n+1}}{1-e^{i\theta}} - 1 = \frac{e^{i\theta}-\left(e^{i\theta}\right)^{n+1}}{1-e^{i\theta}}.$$

Ceci peut se réécrire en factorisant par "l'angle moitié" :

$$1-e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}\right) = -2ie^{i\frac{\theta}{2}}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right),$$

$$e^{i\theta}-\left(e^{i\theta}\right)^{n+1} = e^{i\theta}\left(1-e^{in\theta}\right) = e^{i\theta}e^{i\frac{n\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{n\theta}{2}} - e^{i\frac{n\theta}{2}}\right) = -2ie^{i\theta}e^{i\frac{n\theta}{2}}\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right).$$

D'où l'expression

$$\sum_{k=1}^{n} e^{ik\theta} = \frac{e^{i\theta}e^{i\frac{n\theta}{2}}\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{e^{i\frac{\theta}{2}}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}e^{i\frac{(n+1)\theta}{2}}.$$

On en déduit que ces sommes partielles sont bornées :

$$\left|\sum_{k=1}^{n} e^{ik\theta}\right| = \left|\frac{\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}e^{i\frac{(n+1)\theta}{2}}\right| \leq \frac{1}{\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|}.$$

La constante $M = \frac{1}{\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|}$ (qui est bien indépendante de n) convient.
On peut donc appliquer le résultat de la question 1., en posant $\alpha_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = e^{in\theta}$: la suite (α_n) est décroissante et tend vers 0, et la suite (v_n) a ses sommes partielles bornées, donc la série $\sum \alpha_n v_n = \sum \dfrac{e^{in\theta}}{n}$ converge.

3. Posons, comme dans la partie 1. :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \alpha_n = \frac{1}{n^2}, \qquad v_n = \varphi(n), \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k v_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi(k)}{k^2}, \qquad T_k = \sum_{k=1}^{n} v_k = \sum_{k=1}^{n} \varphi(k).$$

La transformation d'Abel donne alors (de même qu'en 1.(a), sauf que les termes d'indice 0 n'existent pas ici) :

$$\forall n \geq 2, \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n-1} (\alpha_k - \alpha_{k+1})\, T_k + \alpha_n T_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}T_k + \frac{T_n}{n^2}.$$

Or, $\varphi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ étant injective, on a

$$T_n = \varphi(1) + \cdots + \varphi(n) \geq 1 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

puisque les $\varphi(k)$ sont des entiers naturels non nuls et tous distincts.
D'où la minoration :

$$\forall n \geq 2, \qquad S_n \geq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} \times \frac{k(k+1)}{2} \geq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2k+1}{2k(k+1)} \geq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

puisque la série harmonique diverge. Ceci montre que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\varphi(n)}{n^2}$ diverge.

Partie II - Suites vérifiant les propriétés (P_1) et (P_2)

4. Soit (u_n) une suite bornée et M un majorant des $|u_n|$. On a
$$\forall n,\ |a_n u_n| \leq M|a_n|,$$
donc la convergence absolue de $\sum a_n$ entraîne celle de $\sum(a_n u_n)$ et (P_1) est vérifiée.

5. (a) La convergence de $\sum |a_{n+1} - a_n|$ entraîne celle de $\sum(a_{n+1} - a_n)$ ce qui, en revenant aux sommes partielles et grâce à un telescopage, équivaut à la convergence de la suite (a_n).

   (b) En posant $U_{-1} = 0$, on a
$$\sum_{n=0}^{N} a_n u_n = \sum_{n=0}^{N} a_n(U_n - U_{n-1}) = \sum_{n=0}^{N} a_n U_n - \sum_{n=0}^{N} a_n U_{n-1}$$
On opère le changement d'indice $k = n-1$ dans la seconde somme et on regroupe les termes de même indice pour obtenir
$$\sum_{n=0}^{N} a_n u_n = a_N U_N + \sum_{k=0}^{N-1} (a_k - a_{k+1})U_k + a_0 U_{-1} = a_N U_N + \sum_{k=0}^{N-1} (a_k - a_{k+1})U_k$$

   (c) Supposons que $\sum u_n$ converge. La suite (U_n) converge donc. Comme elle est bornée et que $\sum(a_n - a_{n+1})$ converge absolument, la question 4. indique que $\sum(a_n - a_{n+1})U_n$ converge. De plus, $(a_n U_n)$ est une suite convergente (produit de telles suites). L'égalité prouvée en (b) indique alors que $\sum(a_n u_n)$ converge (la suite des sommes partielles admet une limite). On a prouvé la propriété (P_2) pour la suite (a_n).

6. (a) Posons $u_n = \frac{\overline{a_n}}{|a_n|}$ si $a_n \neq 0$ et $u_n = 1$ sinon. On a alors, $a_n u_n = |a_n|$ (on le vérifie quand $|a_n| \neq 0$ et dans l'autre cas). Ainsi, $\sum(a_n u_n)$ diverge et on a (u_n) qui est bornée puisque formée d'éléments de module 1. La suite (a_n) ne vérifie donc pas (P_1).

   (b) Finalement, les suites vérifiant (P_1) sont exactement celles dont la série associée converge absolument (d'après 4. et 6.(a)).

7. (a) Supposons que la suite (p_n) stationne à partir d'un certain rang N. On a alors (ε_n) qui stationne à partir de ce même rang (quand p n'évolue pas dans l'algorithme, ε n'évolue pas non plus) et donc
$$\forall n \geq N,\ A_n = A_N + \varepsilon_N \sum_{k=N+1}^{n} a_k$$
Comme (a_n) est une suite de réels positifs de série divergente, les sommes partielles de cette série tendent vers $+\infty$. Comme $\varepsilon_N > 0$ (tous les ε_k sont > 0 par récurrence), l'identité ci-dessus indique que $A_n \to +\infty$. Il existe donc $k \geq N$ tel que $A_k \geq p_k = p_N$ et alors $p_{k+1} = 1 + p_k \neq p_N$ ce qui est une contradiction.
Ainsi, la suite (p_n) ne stationne pas à partir du rang N et il existe $n > N$ tel que $p_n \neq p_{n-1}$ et donc tel que $p_n = 1 + p_{n-1}$.

   (b) On peut alors montrer par récurrence que la suite (n_k) de l'énoncé est bien définie puisque si n_k est connu alors $\{n \in \mathbb{N}/\ n > n_k \ \text{ et } \ p_n = 1+p_{n-1}\}$ est un ensemble non vide d'entiers et qu'il contient donc un minimum.

   (c) Pour $k \geq 1$, on a $n_k = \min\{n \in \mathbb{N}/\ n > n_{k-1} \ \text{ et } \ p_n = 1 + p_{n-1}\}$ et donc
$$p_{n_{k-1}} = p_{n_{k-1}+1} = \cdots = p_{n_k-1} \ \text{ et } \ p_{n_k} = 1 + p_{n_{k-1}}$$
d'où l'on déduit que
$$\varepsilon_{n_k} = \frac{1}{2}\varepsilon_{n_{k-1}}$$
Comme $p_{n_0} = p_0 = 0$ et $\varepsilon_{n_0} = \varepsilon_0 = 1$, on en déduit par récurrence que
$$\forall k,\ p_{n_k} = k \ \text{ et } \ \varepsilon_{n_k} = \frac{1}{2^k}.$$

(d) La suite (ε_n) est décroissante et minorée par 0 donc convergente. De plus, $(\varepsilon_{n_k})_k$ est une extraite de $(\varepsilon_n)_n$ (la suite des n_k croît strictement) et est de limite nulle. Ainsi, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$$

De façon similaire, la suite (A_n) des sommes partielles de $\sum(a_n\varepsilon_n)$ est croissante et on a une extraite qui tend vers $+\infty$ ($A_{n_k-1} \geq p_{n_k-1} = p_{n_{k-1}} = k-1 \to +\infty$). On a donc $A_n \to +\infty$ et $\sum(a_n\varepsilon_n)$ qui diverge.

8. (a) Soit (ε_n) une suite de limite nulle. On pose $\varepsilon'_n = \text{signe}(a_n)\varepsilon_n$. Ainsi, (ε'_n) est une suite de limite nulle et donc $\sum(a_n\varepsilon'_n) = \sum(\varepsilon_n|a_n|)$ converge.

   (b) Si $\sum |a_n|$ divergeait (par l'absurde), la question 7. donnerait une suite (ε_n) de limite nulle telle que $\sum |a_n|\varepsilon_n$ diverge et on obtiendrait une contradiction. Ainsi, $\sum |a_n|$ converge.

9. (a) Supposons, par l'absurde, que (a_n) n'est pas bornée. Pour tout M et tout N, il existe un entier $n \geq N$ tel que $|a_n| \geq M$ (sinon, la suite $(a_n)_{n\geq N}$ est bornée et (a_n) l'est donc aussi). On peut ainsi construire par récurrence une suite n_k telle que $|a_{n_0}| \geq 1$ et

$$\forall k \geq 0,\ n_{k+1} = \min\{n > n_k /\ |a_n| \geq 2^{k+1}\}$$

Soit alors (x_n) telle que

$$\forall k,\ x_{n_k} = \frac{1}{2^k}$$

les autres x_n étant nuls. $\sum(x_n)$ converge (la suite des sommes partielles est croissante et majorée par $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2$) et

$$\forall k,\ |x_{n_k} a_{n_k}| \geq 1$$

ce qui montre que $(x_n a_n)$ n'est pas de limite nulle et entraîne la divergence de $\sum(x_n a_n)$ en donnant une contradiction.

   (b) Par le même calcul qu'en 5.(b) (c'est une transformation d'Abel, voir la partie I.) on a

$$(*)\ :\ \sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k(a_{k+1}-a_k) = \sum_{k=1}^{n} (\varepsilon_{k-1}-\varepsilon_k)a_k + \varepsilon_n a_{n+1} - \varepsilon_0 a_0$$

$\varepsilon_{k-1} - \varepsilon_k$ est le terme général d'une série convergente (puisque la suite (ε_k) converge) et donc $\sum(\varepsilon_{k-1}-\varepsilon_k)a_k$ converge (vu l'hypothèse sur (a_n)). De plus $\varepsilon_n a_{n+1} \to 0$ (produit d'une suite bornée et d'une suite de limite nulle). $(*)$ montre alors que $\sum(\varepsilon_n(a_{n+1}-a_n))$ converge (la suite des sommes partielles admet une limite).

   (c) La question 8.(b) montre alors que $\sum |a_{n+1}-a_n|$ converge.

   (d) On a prouvé que les suites vérifiant (P_2) sont exactement les suites (a_n) telles que $\sum |a_{n+1}-a_n|$ converge (d'après les questions 5.(c) et 9.(c)).

Partie III - Réorganisation des termes d'une série semi-convergente

10. Principe de l'algorithme : on s'arrange pour choisir les indices s_n de façon que les sommes partielles S_n "oscillent" autour de x et que $S_n \to x$. Pour ce faire, on choisit le premier indice pair non utilisé si l'on est en-dessous de x (on ajoute alors un terme positif) et le premier indice impair sinon (on ajoute alors un terme négatif). Les suites (p_n) et (q_n) permettent de savoir quel est le dernier indice pair ou impair utilisé ($2p_n$ ou $2q_n - 1$).
Pour $x = -1$, on obtient :

n	p_n	q_n	s_n	$S_n = S_{n-1} + s_n$
0	0	0		$0 > x$
1	0	**1**	1	$-1 \leq x$
2	**1**	1	2	$-1/2 = -0.5 > x$
3	1	**2**	3	$-5/6 \simeq -0.83 > x$
4	1	**3**	5	$-31/30 \simeq -1.03 \leq x$
5	**2**	3	4	$-47/60 \simeq -0.78 > x$
6	2	**4**	7	$-389/420 \simeq -0.93 > x$

11. (a) On procède par récurrence sur n.
   - Initialement, on a $q_1 = s_1 = 1$, $S_1 = -1$ et $p_1 = 0$ (cas $x < 0$) ou $p_1 = 1$, $s_1 = 2$, $S_1 = 1/2$ et $q_1 = 0$ (cas $x \geq 0$). Dans les deux cas, on a la propriété voulue pour $n = 1$.
   - Supposons le résultat vrai jusqu'à un rang $n \geq 1$. On doit encore distinguer deux cas.
     - Si $S_n > x$ alors $q_{n+1} = 1 + q_n$, $p_{n+1} = p_n$, $s_{n+1} = 2q_{n+1} - 1$ et $S_{n+1} = S_n + u_{s_{n+1}}$ et on a les relations voulues.
     - Si $S_n \leq x$ alors $q_{n+1} = q_n$, $p_{n+1} = 1 + p_n$, $s_{n+1} = 2p_{n+1}$ et $S_{n+1} = S_n + u_{s_{n+1}}$ et on a les relations voulues.

   (b) On en déduit que
$$\text{card}\{s(1), \ldots, s(n)\} = p_n + q_n = n$$
ce qui indique que les $s(k)$ sont deux à deux distincts et que s est injective (si $s(a) = s(b)$ avec $a < b$ alors l'ensemble $\{s(1), \ldots, s(b)\}$ contient au plus $b - 1$ éléments).

12. (a) Soit (m_n) une suite d'entiers qui converge vers une limite ℓ. Par définition des limites (avec $\varepsilon = 1/3 > 0$)
$$\exists\, n_0 /\ \forall n \geq n_0,\ |m_n - \ell| \leq 1/3$$
Par inégalité triangulaire, on a $|m_n - m_r| \leq 2/3$ pour $n, r \geq n_0$ et comme on a des termes entiers, $m_r = m_n$ pour $n, r \geq n_0$. La suite est donc constante à partir du rang n_0.

   (b) La suite (p_n) est croissante (puisque p_{n+1} est égal à p_n ou à $1 + p_n$). Si elle est majorée, elle converge. Etant composée d'entiers, elle stationne à partir d'un certain rang n_0. Par définition, on a donc pour tout $n \geq n_0$, $S_n > x$ et $q_{n+1} = 1 + q_n$ ce qui donne (par récurrence) $q_n = n - n_0 + q_{n_0}$. De plus, pour $n \geq n_0$, $s_{n+1} = 2q_{n+1} - 1 = 2n - 2n_0 + 2q_{n_0} - 1$. Ainsi,
$$\forall n \geq n_0,\ S_n = S_{n_0} + \sum_{k=n_0+1}^{n} u_{s_k} = S_{n_0} - \sum_{k=n_0+1}^{n} \frac{1}{2k - 2n_0 + 2q_{n_0} - 1}$$
Le changement d'indice $j = k-1$ donne la formule voulue. La série associée à $\left(\frac{1}{2k-2n_0+2q_{n_0}+1}\right)_{k \geq n_0}$ est divergente positive et ses sommes partielles tendent vers $+\infty$. L'égalité ci-dessus donne alors $S_n \to -\infty$ ce qui contredit $S_n > x$ pour tout $n \geq n_0$. La suite (p_n) étant croissante et non majorée, le théorème de limite monotone indique que $p_n \to +\infty$.

   (c) Le raisonnement est identique pour montrer que (q_n) est de limite infinie : c'est une suite croissante ; si elle est majorée alors elle converge et stationne à partir d'un rang n_0 ; pour $n \geq n_0$, on a $S_n \leq x$ et $S_n \to +\infty$ ce qui est incompatible.

   (d) Comme $0 \leq p_{n+1} - p_n \leq 1$ et $p_n \to +\infty$, les p_n décrivent tout $\mathbb{N}$. Il en est de même des q_n. Avec l'identité ensembliste de 11.(a), on en déduit que tout entier non nul est atteint par s (et pour un entier non nul car $s(0) = 0$). s est donc surjective de $\mathbb{N}^*$ dans lui même. On a aussi vu l'injectivité et on a donc la bijectivité.

13. (a) On distingue deux cas.

- Si $S_n > x$ alors $u_{s_{n+1}} < 0$ car s_{n+1} est impair et

$$u_{s_{n+1}} \leq S_{n+1} - x = S_n + u_{s_{n+1}} - x \leq S_n - x$$

- Si $S_n \leq x$ alors $u_{s_{n+1}} \geq 0$ car s_{n+1} est pair et

$$S_n - x \leq S_{n+1} - x = S_n + u_{s_{n+1}} - x \leq u_{s_{n+1}}$$

$a \leq b \leq c$ entraînant $|b| \leq \max(|a|, |c|)$, on a donc dans tous les cas

$$|S_{n+1} - x| \leq \max(|S_n - x|, |u_{s_{n+1}}|)$$

ce qui correspond à l'alternative demandée.

(b) Soit N un entier naturel. On ne peut avoir $\forall n > N,\ S_n > x$ (sinon, comme en 12.(b) on obtient une contradiction) et on ne peut avoir non plus $\forall n > N,\ S_n \leq x$ (cette fois comme en 12.(c)). On peut, par exemple, trouver $n > N$ tel que $S_{n+1} \leq x < S_n$ (ou l'inverse). On a alors s_{n+1} impair et $u_{s_{n+1}} < 0$ et $S_{n+1} = S_n + u_{s_{n+1}} \leq x < S_n$. En particulier, $|S_{n+1} - x| = x - S_{n+1} = x - S_n - u_{s_{n+1}} < -u_{s_{n+1}} = |u_{s_{n+1}}|$.

(c) Comme (p_n) est de limite infinie, p_n finit par être plus grand que 1 (pour $n \geq n_1$). De même, q_n finit par être plus grand que 1 et

$$\forall n \geq \max(n_1, n_2),\ p_n \geq 1 \ \text{ et } \ q_n \geq 1$$

(d) Comme s_{n+1} vaut soit $2p_{n+1}$ soit $2q_{n+1} - 1$, la question 13.(a) montre que

$$|S_{n+1} - x| \leq \max(|S_n - x|, |u_{s_{n+1}}|) \leq \max(|S_n - x|, |u_{2p_{n+1}}|, |u_{2q_{n+1}-1}|) = v_n$$

De plus, la croissance de p_n et q_n ainsi que la décroissance de $|u_n|$ donnent

$$|u_{2p_{n+2}}| \leq |u_{2p_{n+1}}| \leq v_n \ \text{ et } \ |u_{2q_{n+2}-1}| \leq |u_{2q_{n+1}-1}| \leq v_n$$

On en déduit finalement que

$$v_{n+1} = \max(|S_{n+1} - x|, |u_{2p_{n+2}}|, |u_{2q_{n+2}-1}|) \leq v_n$$

La suite (v_n) est décroissante et minorée (par 0) et donc converge vers un réel $\ell \geq 0$.
Avec 13.(b),

$$\forall N,\ \exists n_N > N /\ 0 \leq v_{n_N} \leq u_{s(n_N+1)}$$

Quand $N \to +\infty$, $n_N \to +\infty$ et on peut passer à la limite ci-dessus (les termes admettent une limite) et on obtient

$$\lim_{N \to +\infty} v_{n_N} = 0,$$

ce qui montre que $\ell = 0$ (par unicité de la limite de la suite extraite $(v_{n_N})_N$).
Finalement, (v_n) converge bien vers 0.

(e) En particulier $0 \leq |S_n - x| \leq v_n \to 0$ et $S_n \to x$, ce que l'on voulait prouver (on a exhibé une bijection s telle que $\sum_{n=1}^{\infty} u_{s(n)} = x$).

14. (a) Soit $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$. On a

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \sim -\frac{1}{2(n+1)^2}$$

$\sum(u_{n+1} - u_n)$ est ainsi absolument convergente et donc aussi convergente. Comme

$$\sum_{k=1}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = u_n - u_1$$

on en déduit que (u_n) converge. En notant γ sa limite, on a alors

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$$

(b) On a alors

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} = \ln(2n) - \frac{1}{2}\ln(n) + \frac{\gamma}{2} + o(1) = \frac{1}{2}\ln(n) + \ln(2) + \frac{\gamma}{2} + o(1)$$

(c) On procède par récurrence sur n.
- Comme en 11.(a), le résultat est initialement vrai, suivant que $x > 0$ ou $x \leq 0$.
- Supposons le résultat vrai jusqu'à un rang $n \geq 1$. Si $S_n > x$ alors on ajoute $u_{2q_{n+1}-1} = -\frac{1}{2q_{n+1}-1}$ et $p_{n+1} = p_n$. Sinon, on ajoute $u_{2p_{n+1}} = \frac{1}{2p_{n+1}}$ et $q_{n+1} = q_n$. La formule reste donc toujours vraie au rang $n+1$.

(d) Comme p_n et q_n tendent vers $+\infty$, on a

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2}\left(\ln(p_n) + \gamma + o(1)\right) - \left(\frac{1}{2}\ln(q_n) + \ln(2) + \frac{\gamma}{2} + o(1)\right) \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{p_n}{q_n}\right) - \ln(2) + o(1) \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{p_n}{n-p_n}\right) - \ln(2) + o(1) \end{aligned}$$

(e) Comme $S_n \to x$, on a (continuité de exp) $\frac{p_n}{n-p_n} \to 4e^{2x}$ c'est à dire $\frac{n}{p_n} \to \frac{e^{-2x}}{4} + 1$ ou encore

$$p_n \sim \frac{4n}{e^{-2x}+4}$$

et de la même façon (en remplaçant p_n par $n - q_n$ dans la formule de la question précédente)

$$q_n \sim \frac{n}{1+4e^{2x}}$$

(f) On prouve comme en 14.(c) que

$$\sum_{k=1}^{n} |u_{s_n}| = \sum_{k=1}^{p_n} \frac{1}{2k} + \sum_{k=1}^{q_n} \frac{1}{2k-1}$$

et, comme en 14.(d), on obtient alors

$$\sum_{k=1}^{n} |u_{s_n}| = \frac{1}{2}\ln(p_n q_n) + \gamma + \ln(2) + o(1) \sim \frac{1}{2}\ln(p_n q_n)$$

Quand $x_n \to +\infty$ et $x_n \sim y_n$ alors $\ln(y_n) = \ln(x_n(1+o(1))) = \ln(x_n) + o(1) \sim \ln(x_n)$. On a donc ici

$$\ln(p_n q_n) \sim \ln\left(\frac{4n^2}{(4+e^{-2x})(1+4e^{2x})}\right) \sim 2\ln(n)$$

et donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|u_{s_1}| + \cdots + |u_{s_n}|}{|u_1| + \cdots + |u_n|} = 1$$

(numérateur et dénominateur sont tous deux équivalents à $\ln(n)$).