DM01 - A rendre lundi 25/09/2023

Quelques propriétés des séries semi-convergentes

Les trois parties sont indépendantes.

Partie I - Transformation d'Abel

1. On considère :
   - $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle décroissante et qui tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$.
   - $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe à sommes partielles bornées, i.e. $\exists M > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left|\sum_{k=0}^{n} v_k\right| \leq M$.

   On se propose de montrer que sous ces conditions, la série $\sum_{n\geq 0} \alpha_n v_n$ converge.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \alpha_n v_n$, $S_n = u_0 + \cdots + u_n$ et $T_n = v_0 + \cdots + v_n$.

   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (\alpha_k - \alpha_{k+1}) T_k + \alpha_n T_n$.

   (b) Montrer que la série positive $\sum_{k\geq 0} |(\alpha_k - \alpha_{k+1}) T_k|$ a ses sommes partielles majorées et conclure.

   *Cette technique de réécriture de S_n en fonction de T_n s'appelle la **transformation d'Abel**. C'est l'analogue discret de l'intégration par parties. Bien que hors-programme, cette technique est très utile pour étudier les séries non absolument convergentes.*

2. En effectuant une transformation d'Abel, étudier la convergence de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n}$ en fonction de $\theta \in \mathbb{R}$.

3. Soit $\varphi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ une application injective. En effectuant une transformation d'Abel, étudier la nature de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\varphi(n)}{n^2}$.

Partie II - Suites vérifiant les propriétés (P_1) et (P_2)

On dira qu'une suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ à valeurs complexes **vérifie la propriété (P_1)** si pour toute suite complexe $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ bornée, la série $\sum a_n u_n$ converge.

On dira qu'une suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ à valeurs réelles **vérifie la propriété (P_2)** si pour toute suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$, la convergence de la série $\sum u_n$ entraîne celle de la série $\sum a_n u_n$.

4. Montrer qu'une suite complexe $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que la série $\sum a_n$ converge absolument vérifie la propriété (P_1).
5. Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle telle que la série $\sum |a_{n+1} - a_n|$ converge.
   (a) Prouver que la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ possède une limite.
   (b) Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle telle que la série $\sum u_n$ converge.
   On note $U_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$. Prouver, pour tout entier naturel N, la relation :
   $$\sum_{n=0}^{N} a_n u_n = \sum_{n=0}^{N-1} (a_n - a_{n+1}) U_n + a_N U_N.$$
   (c) En déduire que la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vérifie (P_2).
6. Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres complexes telle que la série $\sum |a_n|$ diverge.
   (a) Construire une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de nombres complexes de module 1 telle que la série $\sum a_n u_n$ diverge.
   (b) Caractériser les suites complexes $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vérifiant la propriété (P_1).
7. Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de réels positifs telle que la série $\sum a_n$ diverge.
   On se propose de construire une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tendant vers 0 telle que la série $\sum a_n \varepsilon_n$ diverge.
   Pour cela on définit par récurrence trois suites $(p_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ comme suit :

   - $\boldsymbol{p_0 = 0,\ \varepsilon_0 = 1,\ A_0 = a_0.}$
   - **Pour** $\boldsymbol{n \geq 1}$ **:** $\boldsymbol{\begin{cases} p_n = 1 + p_{n-1} \quad \text{et} \quad \varepsilon_n = \dfrac{\varepsilon_{n-1}}{2} \quad \text{si} \quad A_{n-1} \geq p_{n-1} \\ p_n = p_{n-1} \quad \text{et} \quad \varepsilon_n = \varepsilon_{n-1} \text{ sinon} \end{cases}}$
   Dans tous les cas : $\boldsymbol{A_n = A_{n-1} + a_n \varepsilon_n.}$

   (a) Démontrer que pour tout naturel N, il existe un entier $n > N$ tel que : $p_n = 1 + p_{n-1}$ (on pourra raisonner par l'absurde).
   (b) En déduire qu'on peut définir une suite $(n_k)_{k\in\mathbf{N}}$ strictement croissante d'entiers par :
   $$\begin{cases} n_0 = 0 \\ n_{k+1} = \min\{n \in \mathbf{N} \,/\, n > n_k \text{ et } p_n = 1 + p_{n-1}\} \quad \text{pour } k \geq 0 \end{cases}.$$
   (c) Dans le cas général, calculer p_{n_k}, ε_{n_k}.
   (d) Prouver que la suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers 0 et que la série $\sum \varepsilon_n a_n$ diverge.
8. Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de réels quelconques telle que, pour toute suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de réels tendant vers 0, la série $\sum \varepsilon_n a_n$ converge.
   (a) Prouver que la série $\sum \varepsilon_n |a_n|$ converge.
   (b) En déduire que la série $\sum |a_n|$ converge.
9. Soit maintenant $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de réels telle que, pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$, la convergence de la série $\sum x_n$ entraîne la convergence de la série $\sum a_n x_n$.
   (a) Prouver que la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée.
   (b) Soit $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle de limite nulle. Prouver la convergence de la série $\sum \varepsilon_n (a_{n+1} - a_n)$.
   (c) Prouver que la série $\sum |a_{n+1} - a_n|$ converge.
   (d) Caractériser les suites vérifiant la propriété (P_2).

Partie III - Réorganisation des termes d'une série semi-convergente

On se donne un réel x. On note, pour $n \in \mathbf{N}^*$, $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ et on se propose de construire une bijection s de $\mathbf{N}^*$ dans $\mathbf{N}^*$ telle que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_{s(n)} = x$.
Ceci pour illustrer le fait que la somme des termes d'une série semi-convergente dépend de l'ordre dans lequel on somme les termes.

On définit simultanément par récurrence trois suites d'entiers naturels $(p_n)_{n\geq 0}$, $(q_n)_{n\geq 0}$, $(s_n)_{n\geq 1}$ et une suite $(S_n)_{n\geq 0}$ de réels de la manière suivante :

- $\boldsymbol{p_0 = q_0 = 0,\ S_0 = 0}$
- **pour tout $\boldsymbol{n \in \mathbf{N}}$:**
  si $\boldsymbol{S_n > x}$ alors : $\boldsymbol{q_{n+1} = 1 + q_n,\ p_{n+1} = p_n,\ s_{n+1} = 2q_{n+1} - 1}$
  si $\boldsymbol{S_n \leq x}$: $\boldsymbol{q_{n+1} = q_n,\ p_{n+1} = 1 + p_n,\ s_{n+1} = 2p_{n+1}}$
  Dans les deux cas : $\boldsymbol{S_{n+1} = S_n + u_{s_{n+1}}}$

10. Expliquer le principe de l'algorithme.
    L'exécuter pas à pas pour $x = -1$, en calculant S_k pour $k \in [\![1, 6]\!]$.
11. On pose dorénavant, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $s(n) = s_n$.
    (a) Prouver, pour $n \geq 1$, les propriétés suivantes :
    $$\begin{aligned} &\{s(1), s(2), ..., s(n)\} = \{2, 4, ..., 2p_n\} \cup \{1, 3, ..., 2q_n - 1\} \\ &p_n + q_n = n \\ &S_n = u_{s(1)} + \cdots + u_{s(n)} \end{aligned}$$
    (b) En déduire que s est injective.
12. (a) Démontrer qu'une suite d'entiers convergente est constante à partir d'un certain rang.
    (b) On se propose de démontrer que la suite $(p_n)_{n\geq 0}$ croît vers $+\infty$.
    On suppose dans un premier temps que cette suite est majorée.
    Utiliser (a) pour démontrer qu'il existe un entier n_0 tel que pour $n \geq n_0$,
    $$S_n > x \quad \text{et} \quad S_n = S_{n_0} - \sum_{k=n_0}^{n-1} \frac{1}{2q_{n_0} + 2k - 2n_0 + 1}.$$
    En déduire une contradiction et conclure.
    (c) Justifier rapidement que (q_n) tend vers $+\infty$.
    (d) Déduire de ce qui précède que s est une bijection de $\mathbf{N}^*$ sur lui-même.
13. (a) Démontrer que, pour tout entier $n \geq 0$, on a :
    $$|S_{n+1} - x| \leq |S_n - x| \quad \text{ou} \quad |S_{n+1} - x| \leq |u_{s(n+1)}|.$$
    (b) Montrer que pour tout naturel N, il existe un entier $n > N$ tel que
    $$|S_{n+1} - x| \leq |u_{s(n+1)}|.$$
    (c) Justifier l'existence d'un entier n_0 tel que pour $n \geq n_0$, $p_n \geq 1$ et $q_n \geq 1$.
    (d) Soit $n \geq n_0$. On note $v_n = \max\left(|S_n - x|, |u_{2p_{n+1}}|, |u_{2q_{n+1}-1}|\right)$.
    Démontrer que $(v_n)_{n\geq n_0}$ est décroissante. En déduire qu'elle converge vers 0.
    (e) Démontrer que (S_n) converge vers x et conclure.
14. (a) Démontrer l'existence d'une constante $\gamma > 0$ telle que :
    $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1) \text{ quand } n \to +\infty.$$

(b) Donner un développement analogue pour $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1}$ en fonction de γ.

(c) Justifier, pour tout naturel n tel que $p_n \geq 1$ et $q_n \geq 1$, l'égalité :

$$S_n = \sum_{k=1}^{p_n} \frac{1}{2k} - \sum_{k=1}^{q_n} \frac{1}{2k-1}.$$

(d) En déduire que :

$$S_n = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{p_n}{n-p_n}\right) - \ln 2 + o(1).$$

(e) En déduire un équivalent simple de p_n et de q_n.

(f) Déterminer la limite de :

$$\frac{|u_{s(1)}| + |u_{s(2)}| + \cdots + |u_{s(n)}|}{|u_1| + |u_2| + \cdots + |u_n|} \quad \text{quand} \quad n \to +\infty.$$