Corrigé du DM01

Vitesse de convergence d'une suite réelle
Extrait de l'épreuve Centrale Supélec PC 2017, math 2

Partie I : des résultats généraux

1. Par exemple, la suite $(u_n) = (\frac{1}{2^n})$ appartient à E^c, puisqu'elle converge vers $\ell = 0$, ne vaut jamais 0, et que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n^c = \left|\frac{u_{n+1}-\ell}{u_n-\ell}\right| = \frac{1}{2},$$
donc la suite (u_n^c) est convergente. Ceci montre que l'ensemble E^c est non vide.
2. Non, E^c n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ car il ne contient pas la suite nulle (elle converge mais vaut constamment sa limite, donc elle n'est même pas dans E).
3. Par exemple, la suite (u_n) définie par $u_{2k} = u_{2k+1} = \frac{1}{k!}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ est dans E (puisqu'elle converge vers $\ell = 0$ et ne vaut jamais 0), mais pas dans E^c. En effet, on a
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n^c = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 2k \\ \frac{1}{k+1} & \text{si } n = 2k+1 \end{cases},$$
donc $\lim\limits_{k\to+\infty} u_{2k}^c = 1 \neq \lim\limits_{k\to+\infty} u_{2k+1}^c = 0$, ce qui montre que la suite (u_n^c) diverge.
L'ensemble E^c est donc strictement inclus dans E.
4. Si $(u_n) \in E^c$, alors on a déjà $\ell^c \geq 0$ (en tant que limite d'une suite à termes positifs).
Par définition de la limite de la suite (u_n^c) : pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0 \Longrightarrow \ell^c - \varepsilon \leq u_n^c \leq \ell^c + \varepsilon$.
Supposons que $\ell^c > 1$. On peut alors choisir $\varepsilon_0 > 0$ tel que $\ell^c - \varepsilon_0 > 1$ (par exemple $\varepsilon_0 = (\ell^c - 1)/2$), et on aura donc $u_n^c \geq \ell^c - \varepsilon_0 > 1$ à partir d'un certain rang n_0, ce qui se réécrit :
$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_0 \Longrightarrow |u_{n+1} - \ell| \geq (\ell^c - \varepsilon_0)|u_n - \ell|.$$
Une récurrence immédiate entraîne alors
$$n \geq n_0 \Longrightarrow |u_n - \ell| \geq (\ell^c - \varepsilon_0)^{n-n_0}|u_{n_0} - \ell|,$$
et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - \ell| = +\infty$ (puisque $\ell^c - \varepsilon_0 > 1$), ce qui est contradictoire avec le fait que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$. On a donc nécessairement $\ell^c \in [0;1]$.

Partie II : exemples de calcul de vitesse de convergence

5.
   - La suite $(u_n) = \left(\frac{1}{(n+1)^k}\right)$ converge vers $\ell = 0$ et ne vaut jamais 0, donc $(u_n) \in E$. De plus
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n^c = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1,$$
donc $(u_n) \in E^c$ et $\ell^c = 1$ (convergence lente).
   - La suite $(v_n) = (n^k q^n)$ converge vers 0 (par croissances comparées) et ne vaut jamais 0 pour $n \geq 1$, donc $(v_n) \in E$. De plus
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad v_n^c = \frac{v_{n+1}}{v_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^k q \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} q,$$
donc $(v_n) \in E^c$ et $\ell^c = q \in]0;1[$ (convergence géométrique de rapport q).
   - La suite $(w_n) = (\frac{1}{n!})$ converge vers 0 et ne vaut jamais 0, donc $(w_n) \in E$. De plus
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad w_n^c = \frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$
donc $(w_n) \in E^c$ et $\ell^c = 0$ (convergence rapide).

6. (a) On a $v_n = e^{2^n \ln\left(1+2^{-n}\right)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^{-n} = 0$, le développement limité $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$ donne le développement asymptotique suivant :

$$v_n = e^{2^n\left(2^{-n}-\frac{1}{2}(2^{-n})^2+\underset{n\to+\infty}{o}((2^{-n})^2)\right)} = e^{1-\frac{1}{2}2^{-n}+\underset{n\to+\infty}{o}(2^{-n})} = e \times e^{-2^{-n-1}+\underset{n\to+\infty}{o}(2^{-n})}.$$

Enfin, on utilise le développement limité $e^y = 1+y+\underset{y\to 0}{o}(y)$ avec $y = -2^{-n-1}+\underset{n\to+\infty}{o}(2^{-n})$ (qui tend bien vers 0 lorsque $n \to +\infty$) :

$$v_n = e \times \left(1 - 2^{-n-1} + \underset{n\to+\infty}{o}(2^{-n})\right) = e - \frac{e}{2^{n+1}} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{2^n}\right).$$

(b) La suite (v_n) converge vers $\ell = e$ et ne vaut pas e à partir d'un certain rang, puisque $v_n - e \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{e}{2^{n+1}} < 0$, donc $v_n < e$ à partir d'un certain rang. Ceci montre que $(v_n) \in E$. De plus,

$$v_n^c = \frac{|v_{n+1}-e|}{|v_n - e|} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e/2^{n+2}}{e/2^{n+1}} = \frac{1}{2},$$

donc (v_n^c) converge vers $\ell^c = \frac{1}{2}$, ce qui montre que (v_n) appartient à E^c, et sa vitesse de convergence est géométrique de rapport $1/2$.

7. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n : x \mapsto \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-x}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et on a la majoration :

$$\forall x \in [0,+\infty[, \qquad 0 \le f_n(x) \le \frac{x}{n}e^{-x} = \underset{x\to+\infty}{o}(1/x^2),$$

(par concavité de ln) donc f_n est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, ce qui montre que la suite (I_n) est bien définie.
Cette majoration montre également que (I_n) converge vers 0 puisque

$$0 \le I_n \le \frac{1}{n}\int_0^{+\infty} xe^{-x} = \frac{1}{n}$$

(calcul simple par IPP généralisée). De plus, $I_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ car si on avait $I_n = 0$, la continuité et la positivité de f_n sur $[0;+\infty[$ impliqueraient que f_n est identiquement nulle sur $[0;+\infty[$, ce qui n'est pas le cas. Ceci montre bien que $(I_n) \in E$.

Remarque (Pour les 5/2)
On peut aussi utiliser le théorème de convergence dominée pour montrer que (I_n) converge vers 0 : chaque fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}^+$, la suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}^+$ et on a $0 \le f_n(x) \le \frac{x}{n}e^{-x} \le xe^{-x}$ pour tout $(x,n) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{N}^*$. Puisque $x \mapsto xe^{-x}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ (elle est continue sur $\mathbb{R}^+$ et négligeable devant $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ au voisinage de $+\infty$, elle-même intégrable), on en déduit par le théorème de convergence dominée que $I_n = \int_0^{+\infty} f_n(x)dx$ est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \int_0^{+\infty} 0dx = 0$.

(b) Soit $X > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Une intégration par parties donne :

$$\int_0^X \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-x}dx = \left[-\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-x}\right]_0^X + \frac{1}{n}\int_0^X \frac{1}{1+\frac{x}{n}}e^{-x}dx.$$

Puisque $\int_0^X \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-x}dx \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} I_n$ et $\left[-\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-x}\right]_0^X \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on en déduit que l'intégrale $\frac{1}{n}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+\frac{x}{n}}e^{-x}dx$ converge et que

$$I_n = \frac{1}{n}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+\frac{x}{n}}e^{-x}dx.$$

Pour déterminer un équivalent de I_n en $+\infty$, on utilise l'idée suivante : pour chaque $x \in \mathbb{R}^+$, on a $\frac{1}{1+\frac{x}{n}}e^{-x} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-x}$, donc on conjecture que

$$I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}\int_0^{+\infty} e^{-x}dx = \frac{1}{n}.$$

Démontrons-le en prouvant que $nI_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$:

$$|nI_n - 1| = \left|\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{1+(x/n)}dx - \int_0^{+\infty} e^{-x}dx\right| = \int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{n+x}dx \leq \frac{1}{n}\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx = \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donc on a bien l'équivalent $I_n \sim \frac{1}{n}$.

Remarque (Pour les 5/2)
Là encore, le théorème de convergence dominée fonctionne pour montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n = 1$. *En effet,* $nI_n = \int_0^{+\infty} g_n(x)dx$, *avec* $g_n(x) = \frac{1}{1+\frac{x}{n}}e^{-x}$, *chaque fonction* g_n *est continue sur* $\mathbb{R}^+$, *la suite* (g_n) *converge simplement sur* $\mathbb{R}^+$ *vers la fonction* $x \mapsto e^{-x}$, *et* $|g_n(x)| \leq e^{-x}$ *pour tout* $(n,x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}^+$, *avec la fonction* $x \mapsto e^{-x}$ *qui est intégrable sur* $\mathbb{R}^+$. *On a donc*

$$\lim_{n\to+\infty} nI_n = \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = 1.$$

(c) On déduit de la question précédente que la suite (I_n) appartient à E^c, et possède une vitesse de convergence lente (puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} = 1$).

8. (a) Cela résulte d'une comparaison série-intégrale : puisque $t \mapsto t^{-\alpha}$ est continue et décroissante sur $]0;+\infty[$, on a

$$\forall k \geq 2, \qquad \int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha}dt \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^\alpha}dt.$$

En sommant pour k variant de $n+1$ à N, on obtient, pour tous entiers $N > n \geq 1$:

$$\int_{n+1}^{N+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_n^N \frac{dt}{t^\alpha},$$

c'est-à-dire

$$\frac{(N+1)^{1-\alpha} - (n+1)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \leq \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{N^{1-\alpha} - n^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

En faisant tendre $N \to +\infty$ dans cette inégalité, on obtient bien (puisque $1-\alpha < 0$) l'inégalité voulue :

$$\frac{-(n+1)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{-n^{1-\alpha}}{1-\alpha},$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{(\alpha-1)(n+1)^{\alpha-1}} \leq \ell - S_n \leq \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}.$$

(b) La suite (S_n) est strictement croissante et converge vers ℓ, donc $S_n < \ell$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui montre que $(S_n) \in E$. De plus, $S_n^c = \frac{\ell - S_{n+1}}{\ell - S_n}$, donc en utilisant les inégalités précédentes :

$$\frac{n^{\alpha-1}}{(n+2)^{\alpha-1}} \leq S_n^c \leq 1.$$

Cet encadrement montre que $S_n^c \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, d'où (S_n) appartient à E^c et possède une vitesse de convergence lente.

Partie III : vitesse de convergence d'ordre r d'une suite réelle

9. Puisque $(u_n) \in E$ et la vitesse de convergence de (u_n) est d'ordre $r > 1$, il existe une constante $M > 0$ et un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0 \Longrightarrow u_n \neq \ell$ et $\dfrac{|u_{n+1} - \ell|}{|u_n - \ell|^r} \leq M$.
   On a donc, en multipliant cette inégalité par $|u_n - \ell|^{r-1}$:
$$n \geq n_0 \Longrightarrow \left|\frac{u_{n+1} - \ell}{u_n - \ell}\right| \leq M|u_n - \ell|^{r-1}.$$
   Puisque $r - 1 > 0$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - \ell|^{r-1} = 0$, et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}-\ell}{u_n-\ell}\right| = 0$ par l'inégalité précédente, ce qui montre que la convergence de (u_n) est rapide.

10. (a) La convergence de la suite (S_n) s'obtient simplement en utilisant la règle de d'Alembert : le quotient u_{k+1}/u_k tend vers $0 < 1$ donc la suite (S_n) converge vers un réel s.
   De plus, la suite (S_n) est strictement croissante, donc on a $S_n \neq s$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui montre que $(S_n) \in E$.

   Remarque (Pour les 5/2)
   On sait que la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{x^n}{n!}$ *converge vers e^x pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc en évaluant en $x = 1$, on obtient que la suite (S_n) converge vers $s = e$.*

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $s - S_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{1}{k!}$.
   Puisque c'est une somme de termes positifs, elle est supérieure à son premier terme, ce qui donne l'inégalité $s - S_n \geq \frac{1}{(n+1)!}$. De plus, en factorisant par $\frac{1}{(n+1)!}$, on a
$$s - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1+k)!} = \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{\prod\limits_{j=2}^{k+1}(n+j)}.$$
   Or, $\prod\limits_{j=2}^{k+1}(n+j) \geq \prod\limits_{j=2}^{k+1} 2 = 2^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, donc
$$s - S_n \leq \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{2}{(n+1)!},$$
   ce qui montre l'encadrement voulu.

   (c) Grâce à l'encadrement précédent, on obtient
$$\left|\frac{S_{n+1} - s}{S_n - s}\right| = \frac{s - S_{n+1}}{s - S_n} \leq \frac{2}{n+2},$$
   donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{S_{n+1}-s}{S_n-s}\right| = 0$, ce qui montre que la convergence de la suite (S_n) est rapide.

   (d) Supposons que la convergence de (S_n) soit d'ordre $r > 1$. Il existe alors une constante $M > 0$ et un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que $|S_{n+1} - s| \leq M|S_n - s|^r$ pour tout $n \geq n_0$.
   Les encadrements précédemment établis impliquent :
$$\frac{1}{(n+2)!} \leq |S_{n+1} - s| \leq M|S_n - s|^r \leq M\frac{2^r}{((n+1)!)^r},$$
   soit
$$\forall n \geq n_0, \qquad ((n+1)!)^{r-1} \leq M2^r(n+2).$$
   Mais ceci est impossible car $n + 2$ est négligeable devant $((n+1)!)^{r-1}$ (vu que $r - 1 > 0$). Donc la convergence de (S_n) n'est pas d'ordre r.

11. (a) Puisque f est dérivable en ℓ, elle est continue en ℓ. On a donc $(f(u_n))$ qui converge vers $f(l)$ (puisque (u_n) converge vers ℓ). En faisant tendre $n \to +\infty$ dans la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ (vraie pour tout n), on obtient donc (par unicité de la limite) $\ell = f(\ell)$.

(b) Supposons (u_n) non stationnaire.
Tout d'abord, la suite (u_n) est dans E. En effet, s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} = \ell$, alors, puisque $f(\ell) = \ell$, une récurrence immédiate montre que la suite stationne à ℓ à partir du rang n_0, et ceci est contraire à l'hypothèse. On a donc $u_n \neq \ell$ pour tout ℓ, donc $(u_n) \in E$.
En outre, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\left|\frac{u_{n+1} - \ell}{u_n - \ell}\right| = \left|\frac{f(u_n) - f(\ell)}{u_n - \ell}\right| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} |f'(\ell)|,$$

(par définition de la dérivabilité de f en ℓ et continuité de la valeur absolue).
Ceci montre que $(u_n) \in E^c$ et que sa vitesse de convergence est $|f'(\ell)|$.

(c) Supposons que $|f'(\ell)| > 1$.
Si (u_n) n'est pas stationnaire, la suite (u_n) est dans E^c (d'après la question précédente) et $\ell^c = |f'(\ell)| > 1$. Mais d'après la question **4.**, c'est impossible (ℓ^c doit appartenir à $[0; 1]$). Donc la suite (u_n) est nécessairement stationnaire.

(d) Puisqu'on suppose ici que (u_n) n'est pas stationnaire, on a nécessairement $(u_n) \in E$ (d'après la question **11.(b)**, donc le quotient $\frac{|u_{n+1}-\ell|}{|u_n-\ell|^r} = \frac{|f(u_n)-f(\ell)|}{|u_n-\ell|^r}$ est bien défini.
Montrons alors l'équivalence voulue :

- Si $f^{(k)}(\ell) = 0$ pour tout $k \in \{1, \cdots, r-1\}$, alors la formule de Taylor-Young donne :

$$\frac{|u_{n+1} - \ell|}{|u_n - \ell|^r} = \frac{|f(u_n) - f(\ell)|}{|u_n - \ell|^r} = \frac{\left|\frac{f^{(r)}(\ell)}{r!}|u_n - \ell|^r + \underset{n\to+\infty}{o}\left(|u_n - \ell|^r\right)\right|}{|u_n - \ell|^r} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \left|\frac{f^{(r)}(\ell)}{r!}\right|.$$

Etant convergente, la suite $\left(\frac{|u_{n+1}-\ell|}{|u_n-\ell|^r}\right)$ est bornée, donc la vitesse de convergence de (u_n) est d'ordre r.

- Sinon, l'ensemble $\{k \in \{1, \cdots, r-1\},\ f^{(k)}(\ell) \neq 0\}$ est non vide. En notant j son minimum, la formule de Taylor-Young donne :

$$\frac{|u_{n+1} - \ell|}{|u_n - \ell|^r} = \frac{|f(u_n) - f(\ell)|}{|u_n - \ell|^r} = \frac{\left|\frac{f^{(j)}(\ell)}{j!}|u_n - \ell|^j + \underset{n\to+\infty}{o}\left(|u_n - \ell|^j\right)\right|}{|u_n - \ell|^r} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{C}{|u_n - \ell|^{r-j}}$$

avec $C > 0$ et $r - j > 0$, ce qui entraîne que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{|u_{n+1} - \ell|}{|u_n - \ell|^r} = +\infty$, et donc la convergence de (u_n) n'est pas d'ordre r.