

DM01 à rendre lundi 30/09/2024

Vitesse de convergence d'une suite réelle

On utilisera les notations suivantes :

- $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels ;
- $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ désigne l'espace vectoriel des suites définies sur $\mathbb{N}$ à valeurs réelles ;
- E désigne le sous-ensemble de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ constitué des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergentes telles que

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall k \geq N, u_k \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n;$$

- à toute suite (u_n) appartenant à E et de limite égale à ℓ , on associe la suite (u_n^c) définie à partir d'un certain rang par

$$u_n^c = \left| \frac{u_{n+1} - \ell}{u_n - \ell} \right|;$$

- E^c désigne l'ensemble des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$ telles que (u_n^c) converge ;
- soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite appartenant à E^c et soit ℓ^c la limite de (u_n^c) .
On dit que la vitesse de convergence de la suite (u_n) est *lente* si $\ell^c = 1$, *géométrique de rapport* ℓ^c si $\ell^c \in]0, 1[$, *rapide* si $\ell^c = 0$;
- soit (u_n) une suite appartenant à E et de limite égale à ℓ , et soit un réel $r > 1$.
On dit que la vitesse de convergence de la suite (u_n) est *d'ordre* r si la suite définie à partir d'un certain rang par $\frac{u_{n+1} - \ell}{|u_n - \ell|^r}$ est bornée ;
- on rappelle qu'une suite (u_n) est *stationnaire* lorsqu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0, u_n = u_{n_0}$.

Partie I : des résultats généraux

1. Montrer que l'ensemble E^c est non vide.
2. L'ensemble E^c est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?
3. Montrer que E^c est strictement inclus dans E .
4. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un élément de E^c . Montrer que $\ell^c \in [0, 1]$.

Partie II : exemples de calcul de vitesse de convergence

5. Soit k un entier strictement positif et q un réel appartenant à l'intervalle $]0, 1[$. Montrer que les suites

$$\left(\frac{1}{(n+1)^k} \right)_{n \in \mathbb{N}}, \quad (n^k q^n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad \left(\frac{1}{n!} \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

appartiennent à E^c et donner leur vitesse de convergence.

6. On considère la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \left(1 + \frac{1}{2^n} \right)^{2^n}$.

(a) Montrer qu'on a le développement asymptotique :

$$v_n = e - \frac{e}{2^{n+1}} + o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2^n} \right)$$

(b) Montrer que la suite (v_n) appartient à E^c et donner sa vitesse de convergence.

7. On considère la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$I_0 = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = \int_0^{+\infty} \ln \left(1 + \frac{x}{n} \right) e^{-x} dx.$$

- (a) Montrer que (I_n) est bien définie et appartient à E .
- (b) A l'aide d'une intégration par parties, déterminer un équivalent de I_n lorsque $n \rightarrow +\infty$.
- (c) En déduire que (I_n) appartient à E^c et donner sa vitesse de convergence.

8. Soit un réel $\alpha > 1$. La série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge vers un réel que l'on notera ℓ .

On note $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par

$$S_0 = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}.$$

- (a) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$:

$$\frac{1}{(\alpha-1)(n+1)^{\alpha-1}} \leq \ell - S_n \leq \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}.$$

- (b) En déduire que (S_n) appartient à E^c et donner sa vitesse de convergence.

Partie III : vitesse de convergence d'ordre r d'une suite réelle

9. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un élément de E dont la vitesse de convergence est d'ordre r , où r est un réel strictement supérieur à 1. Montrer que la convergence de la suite (u_n) est rapide.
10. On considère la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}.$$

- (a) Montrer que (S_n) est un élément de E . On notera s sa limite.
- (b) Montrer que pour tout entier naturel n :

$$\frac{1}{(n+1)!} \leq s - S_n \leq \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k}.$$

- (c) En déduire que la convergence de la suite (S_n) est rapide.
- (d) Soit un réel $r > 1$. Montrer que la convergence de la suite (S_n) n'est pas d'ordre r .
Ainsi, la convergence d'ordre r implique la convergence rapide mais pas l'inverse !
11. On considère I un intervalle réel de longueur strictement positive, f une application définie sur I à valeurs dans I et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite définie par :

$$u_0 \in I, \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n).$$

On suppose que la suite (u_n) converge vers un élément ℓ de I et que f est dérivable en ℓ .

- (a) Montrer que $f(\ell) = \ell$.
- (b) Montrer que si (u_n) n'est pas stationnaire, alors elle appartient à E^c .
Donner alors sa vitesse de convergence en fonction de $f'(\ell)$.
- (c) Montrer que si $|f'(\ell)| > 1$, alors (u_n) est stationnaire.
- (d) Soit un entier $r \geq 2$. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^r$ sur I et que (u_n) n'est pas stationnaire. Montrer que la vitesse de convergence de (u_n) est d'ordre r si et seulement si $\forall k \in \{1, \dots, r-1\}, f^{(k)}(\ell) = 0$.