

Exercice 1

1. Soit $a_n = \frac{2}{n^2 - 1}$. Alors (pour $x \neq 0$), on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_nx^n} \right| = |x|$.

D'après la règle de d'Alembert, la série $\sum a_n x^n$ converge si $|x| < 1$ et diverge si $|x| > 1$: le rayon de convergence est par conséquent $R = 1$.

2. En décomposant a_n sous la forme $\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}$, on peut écrire

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad S(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n-1} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1}$$

étant donné que les deux séries entières du second membre ont également 1 pour rayon de convergence.

Par réindexation,

$$\forall x \in]-1, 1[\setminus \{0\}, \quad S(x) = x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} - \frac{1}{x} \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{x^n}{n}.$$

En reconnaissant le développement en série entière d'un logarithme, on a ainsi

$$\forall x \in]-1, 1[\setminus \{0\}, \quad S(x) = -x \ln(1-x) + \frac{1}{x} \left(\ln(1-x) + x + \frac{x^2}{2} \right),$$

soit $S(x) = 1 + \frac{x}{2} + \frac{1-x^2}{x} \ln(1-x)$.

Un calcul direct montre que $S(0) = 0$ et on peut contrôler que cette valeur est cohérente avec la limite de $S(x)$ lorsque x tend vers 0.

3. Comme $S(1-h) = 1 + \frac{1-h}{2} + \frac{2-h}{1-h} \times h \ln h$ et que $\lim_{h \rightarrow 0} h \ln h = 0$, le second membre tend vers $\frac{3}{2}$ lorsque h tend vers 0 donc $S(x)$ admet la limite finie $\frac{3}{2}$ lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures.

Exercice 2

1. – Sur $]0, +\infty[$, l'équation différentielle (E) se met sous forme "normalisée" $y' - \frac{3y}{2x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$: l'ensemble de ses solutions est donc un espace affine de dimension 1 d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz.

– L'équation homogène se résout en $y_H(x) = \lambda \exp\left(\int_1^x \frac{3}{2t} dt\right)$, où $\lambda \in \mathbb{R}$, soit $y_H(x) = \lambda x^{3/2}$.

– On recherche la solution générale par la méthode de variation de la constante : $x \mapsto \lambda(x) \cdot x^{3/2}$ vérifie (E) si et seulement si $\lambda'(x) = \frac{1}{2x^2}$ si et seulement si $\lambda(x) = -\frac{1}{2x} + C$ avec $C \in \mathbb{R}$.

Conclusion : les solutions de (E) sur $]0, +\infty[$ sont les fonctions de la forme $y(x) = -\frac{\sqrt{x}}{2} + C \cdot x^{3/2}$ où C est une constante réelle.

2. Toute solution de (E) sur $[0, +\infty[$ doit être continue en 0, donc vérifier $y(0) = 0$.

La dérivabilité (à droite) de y en 0 se traduirait par l'existence d'une limite finie pour $\frac{y(x) - y(0)}{x - 0} =$

$$-\frac{1}{2\sqrt{x}} + C \cdot \sqrt{x}, \text{ ce qui n'est réalisé pour aucune constante réelle } C.$$

L'équation (E) n'admet donc aucune solution sur $[0, +\infty[$.

Problème

1. On rappelle que, pour une fonction continue par morceaux,
 - (a) si f est positive sur $[a, +\infty[$, alors (i) $\iff$ (ii);
 - (b) si f est de signe quelconque, on a seulement (i) $\implies$ (ii).

Partie I : Exemples et propriétés

2. (a) – E contient la fonction nulle, donc n'est pas vide.
 - Soit $f, g \in E$ et λ, μ des réels donnés. Alors, pour tout $x > 0$, les fonctions $t \mapsto f(t)e^{-xt}$ et $t \mapsto g(t)e^{-xt}$ sont intégrables sur $\mathbb{R}^+$, donc $t \mapsto (\lambda f(t) + \mu g(t))e^{-xt}$ également, et par conséquent $\lambda f + \mu g$ appartient à E .
 - Conclusion** : E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$.
- (b) – Déjà, toute fonction f continue et bornée sur $\mathbb{R}^+$ appartient à E : en effet, pour tout $x > 0$, on a $f(t)e^{-xt} = O(e^{-xt})$ lorsque t tend vers $+\infty$, donc $t \mapsto f(t)e^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
 - Comme F est clairement stable par combinaison linéaire, F est un sous-espace vectoriel de E .
- (c) Soit à nouveau $f, g \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors, pour tout $x > 0$,

$$\mathcal{L}(\lambda f + \mu g)(x) = \int_0^{+\infty} (\lambda f(t) + \mu g(t))e^{-xt} dt = \lambda \mathcal{L}(f)(x) + \mu \mathcal{L}(g)(x)$$

par linéarité de l'intégrale, d'où $\mathcal{L}(\lambda f + \mu g) = \lambda \mathcal{L}(f) + \mu \mathcal{L}(g)$.

L'application $\mathcal{L}$ est donc une forme linéaire sur $\mathcal{F}(\mathbb{R}_*^+, \mathbb{R})$.

3. (a) La fonction $\mathcal{U}$ est continue et bornée donc appartient à E . De plus, pour tout $x > 0$,

$$\mathcal{L}(\mathcal{U})(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[-\frac{e^{-xt}}{x} \right]_0^A = \frac{1}{x}.$$

- (b) De même, l'application h_λ est continue et bornée donc appartient à E et pour tout $x > 0$,

$$\mathcal{L}(h_\lambda)(x) = \int_0^{+\infty} e^{-(x+\lambda)t} dt = \frac{1}{x + \lambda}$$

d'après le calcul du (a).

4. – Comme $x > 0$, on a, par croissances comparées, $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^n e^{-xt/2} = 0$. En particulier, il existe $A > 0$ tel que $\forall t \geq A, t^n e^{-xt/2} \leq 1$, ce qui conduit à l'inégalité demandée.

– On a donc $|g_n(t)e^{-xt}| \leq |f(t)|e^{-xt/2}$ pour tout $t \geq A$ et comme l'application $t \mapsto |f(t)|e^{-xt/2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ puisque $f \in E$ et $\frac{x}{2} > 0$, il en résulte que $t \mapsto g_n(t)e^{-xt}$ l'est également, si bien que g_n appartient à E .

5. Par une intégration par parties,

$$\int_0^A f'(t)e^{-xt} dt = \left[f(t)e^{-xt} \right]_0^A + x \int_0^A f(t)e^{-xt} dt.$$

Comme f appartient à E , on a $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A f(t)e^{-xt} dt = \mathcal{L}(f)(x)$ et par ailleurs $\lim_{A \rightarrow +\infty} f(A)e^{-xA} = 0$ vu que f est bornée.

L'intégrale $\int_0^A f'(t)e^{-xt} dt$ possède donc une limite finie lorsque $A \rightarrow +\infty$, ce qui équivaut à l'intégrabilité de $t \mapsto f'(t)e^{-xt}$ étant donné que cette fonction est continue et positive (cf l'implication (ii) $\implies$ (i) dans la question préliminaire 1.(a)).

Il en résulte que $f' \in E$ et, par passage à la limite dans le calcul précédent, on aboutit à $\mathcal{L}(f')(x) = x\mathcal{L}(f)(x) - f(0)$.

6. (a) Soit h l'application définie par $h(x, t) = f(t)e^{-xt}$ sur $\mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}^+$ et soit a un réel strictement positif donné. Vérifions les hypothèses du théorème de Leibniz sur $[a, +\infty[$.

Pour tout $x > 0$, l'application $t \mapsto h(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

L'application $\frac{\partial h}{\partial x} : (x, t) \mapsto -tf(t)e^{-xt}$ vérifie ensuite les propriétés suivantes :

- pour tout $x \geq a$, l'application partielle $t \mapsto \frac{\partial h}{\partial x}(x, t)$, alias $-g_1$, est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}^+$;
- pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, l'application partielle $x \mapsto \frac{\partial h}{\partial x}(x, t)$ est continue;
- (hypothèse de domination) $\forall x \geq a, \forall t \in \mathbb{R}^+, \left| \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) \right| \leq t|f(t)|e^{-at}$ avec $t \mapsto t|f(t)|e^{-at}$ intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

On en déduit que $\mathcal{L}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$, donc sur $\mathbb{R}_*^+$ vu le rôle arbitraire de a , et que de plus, $(\mathcal{L}(f))' = -\mathcal{L}(g_1)$.

- (b) D'après le (a), $(\mathcal{L}(f))'$ est la transformée de Laplace de la fonction $t \mapsto -tf(t)$. Ainsi, pour dériver $\mathcal{L}(f)$, il suffit finalement de remplacer $f(t)$ par $-tf(t)$ dans les calculs.

Par une récurrence immédiate, il en ressort que $\mathcal{L}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ et que, pour tout $x > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{L}(f)^{(n)}(x) = (-1)^n \int_0^{+\infty} t^n f(t) e^{-xt} dt = (-1)^n \mathcal{L}(g_n)(x).$$

Partie II : Comportements asymptotiques de la transformée de Laplace

7. (a) Si f est dans F , il existe $M \geq 0$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}^+, |f(t)| \leq M$.

Alors $\forall x > 0, |\mathcal{L}(f)(x)| \leq \int_0^{+\infty} M e^{-xt} dt$, soit $|\mathcal{L}(f)(x)| \leq \frac{M}{x}$, d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} \mathcal{L}(f)(x) = 0$.

- (b) D'après la question 5., on a, pour tout $x > 0$,

$$\mathcal{L}(f')(x) = x\mathcal{L}(f)(x) - f(0).$$

Comme f' appartient à F , le 7.(a) donne $\lim_{x \rightarrow +\infty} \mathcal{L}(f')(x) = 0$, d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} x\mathcal{L}(f)(x) = f(0)$.

8. (a) Par définition de la limite, il existe $A \geq 0$ tel que $\forall t \geq A, |f(t)| \leq |\ell| + 1$.

Par ailleurs, f est continue sur $[0, A]$, donc bornée par un certain réel M sur ce segment d'après le théorème des bornes.

Au final, $\forall t \in \mathbb{R}^+, |f(t)| \leq \max(|\ell| + 1, M)$ donc f appartient à F .

- (b) À l'aide du changement de variable affine défini par $x = a_n t$,

$$a_n \mathcal{L}(f)(a_n) = \int_0^{+\infty} e^{-a_n t} f(t) a_n dt = \int_0^{+\infty} e^{-x} f\left(\frac{x}{a_n}\right) dx = \int_0^{+\infty} h_n(x) dx.$$

- (c) Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$, la suite de fonctions (continues par morceaux) $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction continue par morceaux et intégrable $h : x \mapsto \ell e^{-x}$.

De plus, comme f est bornée, on a $\forall x > 0, |h_n(x)| \leq \|f\|_\infty e^{-x}$. L'application $x \mapsto \|f\|_\infty e^{-x}$ étant intégrable, le théorème de convergence dominée s'applique, d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} h_n(x) dx = \int_0^{+\infty} h(x) dx$, c'est-à-dire $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \mathcal{L}(f)(a_n) = \ell$.

- (d) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant une suite arbitraire de réels strictement positifs tendant vers 0, la caractérisation séquentielle de la limite permet d'écrire que $\lim_{x \rightarrow 0} x\mathcal{L}(f)(x) = \ell$.

Si on suppose de plus $\ell \neq 0$, la limite précédente montre que $\mathcal{L}(f)(x) \sim \frac{\ell}{x}$ au $\mathcal{V}(0)$.

9. (a) R se présente comme l'intégrale fonction de la borne inférieure d'une application continue : elle est donc de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$\forall x > 0, \quad R'(x) = -f(x).$$

R' appartient donc à E , d'où

$$\forall x > 0, \quad \mathcal{L}(f)(x) = -\mathcal{L}(R')(x) = R(0) - x\mathcal{L}(R)(x).$$

- (b) – L'intégrabilité de f sur $\mathbb{R}^+$ implique que $\lim_{x \rightarrow +\infty} R(x) = 0$ donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A \geq 0$ tel que $\forall t \geq A, |R(t)| \leq \varepsilon$.

– En utilisant la relation de Chasles et la positivité de l'intégrale,

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}(f)(x) - R(0)| &= |x\mathcal{L}(R)(x)| \leq x \left(\int_0^A |R(t)| e^{-xt} dt + \int_A^{+\infty} |R(t)| e^{-xt} dt \right) \\ &\leq x \int_0^A |R(t)| dt + x \int_0^{+\infty} \varepsilon e^{-xt} dt \leq x \int_0^A |R(t)| dt + \varepsilon. \end{aligned}$$

- (c) ε étant fixé, A l'est aussi donc $\int_0^A |R(t)| dt$ représente une constante.

Par conséquent, $\lim_{x \rightarrow 0} x \int_0^A |R(t)| dt = 0$, si bien qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in]0, \alpha[, \quad x \int_0^A |R(t)| dt \leq \varepsilon.$$

Récapitulons : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in]0, \alpha[, |\mathcal{L}(f)(x) - R(0)| \leq 2\varepsilon$, ce qui montre que $\lim_{x \rightarrow 0} \mathcal{L}(f)(x) = R(0)$, c'est-à-dire que $\mathcal{L}(f)$ se prolonge par continuité en 0 par

$$R(0) = \int_0^{+\infty} f(t) dt.$$

Remarque : l'intégrabilité de f n'a été utilisée que pour prouver que $\lim_{x \rightarrow +\infty} R(x) = 0$. La propriété $\lim_{x \rightarrow 0} \mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(t) dt$ reste donc valable lorsque l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ est seulement improprement convergente (cette observation sera utilisée à la fin du problème).

Partie III : Application

10. (a) Procédons par intégration par parties en nous plaçant sur l'intervalle $[1, x]$ afin d'éviter tout problème artificiel en 0.

$$\int_1^x f(t) dt = \left[-\frac{\cos t}{t} \right]_1^x - \int_1^x \frac{\cos t}{t^2} dt.$$

L'application $t \mapsto \frac{\cos t}{t^2}$ étant intégrable sur $[1, +\infty[$ (car dominée par $\frac{1}{t^2}$), l'intégrale $\int_1^x \frac{\cos t}{t^2} dt$ possède une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$. Par ailleurs, $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{\cos x}{x} = 0$, si bien que

$$F(x) = \int_0^1 f(t) dt + \int_1^x f(t) dt \text{ possède une limite réelle } \ell \text{ en } +\infty.$$

- (b) Par une minoration évidente,

$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt \geq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{(n+1)\pi} dt,$$

$$\text{soit } u_n \geq \frac{2}{(n+1)\pi}.$$

La série harmonique étant divergente, cette minoration montre que $\sum u_n$ diverge. L'application f n'est pas intégrable car sinon $\int_0^{(n+1)\pi} |f(t)| dt = \sum_{k=0}^n u_k$ posséderait une limite finie lorsque n tend vers $+\infty$.

- (c) – La méthode la plus naturelle pour calculer $\int_0^X (\sin t)e^{-xt} dt$ consiste à observer que cette intégrale est la partie imaginaire de $\int_0^X e^{(i-x)t} dt$, soit $\int_0^X (\sin t)e^{-xt} dt = \operatorname{Im}\left(\left[\frac{e^{(i-x)t}}{i-x}\right]_0^X\right)$, ce qui donne $\int_0^X (\sin t)e^{-xt} dt = -\frac{1}{1+x^2}(e^{-xX}(x \sin X + \cos X) - 1)$ en multipliant par la quantité conjuguée du dénominateur.

Remarque : une autre méthode consiste à fixer x et à considérer les deux membres de l'égalité à établir comme des fonctions de X . On vérifie par un calcul simple que leurs dérivées par rapport à X sont égales, donc ils diffèrent d'une constante. Enfin, leurs valeurs en $X = 0$ sont les mêmes, ce qui prouve l'égalité pour tout $X \geq 0$.

– La fonction $t \mapsto (\sin t)e^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ car dominée par la fonction intégrable $t \mapsto e^{-xt}$.

– La quantité $\int_0^X (\sin t)e^{-xt} dt$ possède donc une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$ et, en employant l'égalité qui vient d'être établie, on trouve immédiatement

$$\int_0^{+\infty} (\sin t)e^{-xt} dt = \frac{1}{1+x^2}.$$

- (d) En prenant pour f l'application définie par $f(0) = 1$ et $\forall t > 0, f(t) = \frac{\sin t}{t}$, l'intégrale $\mathcal{L}(f)(x)$ s'écrit $\int_0^{+\infty} g(x, t) dt$ avec $g(x, 0) = 1$ et $g(x, t) = \frac{\sin t}{t}e^{-xt}$ pour $t > 0$.

Vérifions les hypothèses du théorème de Leibniz pour cette intégrale à paramètre sur $[a, +\infty[$, où a est un réel strictement positif donné.

- Pour tout $x \geq a$, l'application $t \mapsto g(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
- Pour tout $x \geq a$, l'application $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
- Pour tout $t \geq 0$, l'application $x \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t)$ est continue.
- (hypothèse de domination) $\forall x \geq a, \forall t > 0, \left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| \leq e^{-at}$ avec $t \mapsto e^{-at}$ intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Il résulte du théorème de Leibniz que $\mathcal{L}(f)$ est dérivable sur $[a, +\infty[$, donc sur $]0, +\infty[$ (vu le choix arbitraire de a) et que

$$\forall x > 0, \quad \mathcal{L}(f)'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) dt = - \int_0^{+\infty} (\sin t)e^{-xt} dt = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Par primitivation, il existe donc une constante C telle que $\forall x > 0, \mathcal{L}(f)(x) = C - \arctan x$.

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \mathcal{L}(f)(x) = 0$ d'après la question 7., il vient $C = \frac{\pi}{2}$.

D'après le 10.(a), l'intégrale $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ possède une limite finie ℓ lorsque x tend vers $+\infty$. En appliquant la généralisation de la question 9., on a donc $\lim_{x \rightarrow 0} \mathcal{L}(f)(x) = \ell$, d'où $\ell = \frac{\pi}{2}$.

Conclusion : $\forall x > 0, \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-xt} dt = \frac{\pi}{2} - \arctan x$ et, en tant qu'intégrale improprement convergente, $\ell = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$.