Corrigé de l'épreuve Mathématiques, Mines-Ponts I, 2025, filières PC-PSI.
Version provisoire du 23/04/2025

Laurent Bonavero - Lycée Champollion (Grenoble)

Avertissements : *ceci n'est pas LE corrigé mais UN corrigé.*
Il y a dans tous mes corrigés des erreurs potentielles ou des choses qui ne sembleront pas claires...me contacter le cas échéant !

Matrices semblables à leur inverse

Partie I : Polynômes réciproques.

(1) On a

$$\begin{aligned} P(X) = X^p P\left(\frac{1}{X}\right) &\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{p} a_k X^k = X^p \sum_{k=0}^{p} a_k X^{-k} \\ &\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{p} a_k X^k = \sum_{k=0}^{p} a_k X^{p-k} \\ &\underset{j=p-k}{\Leftrightarrow} \sum_{k=0}^{p} a_k X^k = \sum_{j=0}^{p} a_{p-j} X^j. \end{aligned}$$

Deux polynômes étant égaux si et seulement si leurs coefficients le sont, il vient

$$\boxed{P(X) = X^p P\left(\frac{1}{X}\right) \Leftrightarrow \forall k \in [\![0, p]\!],\ a_k = a_{p-k}}.$$

(2) On a de suite

$$\boxed{X^p P\left(\frac{1}{X}\right) = a_p \prod_{i=1}^{d} (1 - \lambda_i X)^{m_i}}.$$

Si P est réciproque, $a_0 = a_p \neq 0$ donc 0 n'est pas racine de P. Ceci signifie que les λ_i sont tous non nuls et que l'on peut écrire

$$\boxed{P(X) = X^p P\left(\frac{1}{X}\right) = a_p \prod_{i=1}^{d} \lambda_i^{m_i} \prod_{i=1}^{d} \left(\frac{1}{\lambda_i} - X\right)^{m_i}}.$$

Cette dernière égalité montre que $\boxed{\dfrac{1}{\lambda_i} \text{ est racine de } P \text{ de multiplicité } m_i}$.

(3) On a $Q(1) = -1^p Q(1/1) = -Q(1)$ donc $\boxed{Q(1) = 0}$.
Comme 1 est racine de Q, il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $d-1$ tel que $Q(X) = (X-1)P(X)$. De là,

$$\begin{aligned} Q(X) = -X^p Q\left(\frac{1}{X}\right) &\Leftrightarrow (X-1)P(X) = -X^p \left(\frac{1}{X} - 1\right) P\left(\frac{1}{X}\right) \\ &\Leftrightarrow (X-1)P(X) = -X^p \left(\frac{1}{X} - 1\right) P\left(\frac{1}{X}\right) \\ &\Leftrightarrow (X-1)P(X) = X^{p-1}(X-1) P\left(\frac{1}{X}\right). \end{aligned}$$

Comme le polynôme $X-1$ n'est pas le polynôme nul, on en déduit que

$$Q(X) = -X^p Q\left(\frac{1}{X}\right) \Leftrightarrow P(X) = X^{p-1} P\left(\frac{1}{X}\right).$$

On en déduit bien que $\boxed{P \text{ est réciproque (et constant si de plus } d = 1)}$.

(4) Soit a une racine de R de multiplicité m. Si $a \neq 1/a$, c'est-à-dire si $a \neq 1$ et $a \neq -1$, alors
$$a^m (1/a)^m = 1.$$
On en déduit que si -1 n'est pas racine de R, alors le produit des racines de R est égal à $\boxed{1}$ et que si -1 est racine de R de multiplicité m, alors le produit des racines de R est égal à $\boxed{(-1)^m}$.

(5) En isolant les éventuelles racines 1 et -1 de R, on peut écrire
$$R(X) = a_p (X-1)^m (X+1)^n \prod_{i=1}^{d/2} (X-\alpha_i)^{m_i} (X - 1/\alpha_i)^{m_i}$$
où d désigne le nombre de racines distinctes de R, différentes de 1 et de -1.
On a alors
$$\begin{aligned}
X^p R(1/X) &= X^p a_p (1/X-1)^m (1/X+1)^n \prod_{i=1}^{d/2} (1/X-\alpha_i)^{m_i} (1/X - 1/\alpha_i)^{m_i} \\
&= a_p (1-X)^m (1+X)^n \prod_{i=1}^{d/2} (1-\alpha_i X)^{m_i} (1 - X/\alpha_i)^{m_i} \\
&= a_p (1-X)^m (1+X)^n \prod_{i=1}^{d/2} \alpha_i^{m_i} (1/\alpha_i - X)^{m_i} (1/\alpha_i)^{m_i} (\alpha_i - X)^{m_i} \\
&= a_p (1-X)^m (1+X)^n \prod_{i=1}^{d/2} (1/\alpha_i - X)^{m_i} (\alpha_i - X)^{m_i} \\
&= a_p (1-X)^m (1+X)^n \prod_{i=1}^{d/2} (X - 1/\alpha_i)^{m_i} (X - \alpha_i)^{m_i} \\
&= (-1)^m a_p (X-1)^m (X+1)^n \prod_{i=1}^{d/2} (X - 1/\alpha_i)^{m_i} (X - \alpha_i)^{m_i} \\
&= (-1)^m R(X).
\end{aligned}$$
On en déduit que :
- $\boxed{R \text{ est réciproque si 1 est racine de multiplicité paire de } R}$ (ceci inclus le cas $m = 0$ où 1 n'est pas racine de R),
- $\boxed{R \text{ est antiréciproque si 1 est racine de multiplicité impaire de } R}$.

Commentaire personnel : l'argument ci-dessus n'utilise pas (4). Un argument plus dans l'esprit du sujet est possible en calculant $R(0)$.

Partie II : Le cas diagonalisable.

(6) On a de suite
$$\boxed{\det(xI_n - A) = \det\big(xA(A^{-1} - (1/x)I_n)\big) = (-1)^n x^n (\det A) \det\big((1/x)I_n - A^{-1}\big)}.$$

(7) Comme A est inversible, $\boxed{0 \text{ n'est pas racine de } \chi_A}$.
De plus, A et A^{-1} étant semblables, elles ont le même polynôme caractéristique et donc les mêmes valeurs propres avec la même multiplicité. Or, d'après (6) (ou en trigonalisant A), les valeurs propres de A^{-1} sont les inverses des valeurs propres de A (avec la multiplicité correspondante).
Tout ceci montre que si $a \neq 0$ est une valeur propre de A de multiplicité m, alors a est une valeur propre de A^{-1} de multiplicité m, et donc $1/a$ est une valeur propre de A de multiplicité m. En d'autre termes, ceci signifie que si a est une racine de χ_A de multiplicité m, alors $1/a$ est une racine de χ_A de multiplicité m.
Comme le déterminant de A est le produit des racines de χ_A, (4) permet d'affirmer que $\boxed{\det A = \pm 1}$ et (5) permet d'affirmer que $\boxed{\chi_A \text{ est réciproque ou antiréciproque}}$.

(8) Notons $\varepsilon = \pm 1$ suivant que χ_B est réciproque ou antiréciproque. On a

$$\chi_B(X) = \varepsilon X^n \chi_B(1/X).$$

Or, d'après (6), pour $x \neq 0$,

$$\chi_B(x) = (-1)^n x^n (\det B)\chi_{B^{-1}}(1/x).$$

On en déduit que pour $x \neq 0$

$$\varepsilon \chi_B(1/x) = (-1)^n (\det B)\chi_{B^{-1}}(1/x).$$

En changeant x en $1/x$, il vient

$$\forall x \neq 0,\ \chi_B(x) = \varepsilon(-1)^n (\det B)\chi_{B^{-1}}(x).$$

Par passage à la limite quand x tend vers 0, l'égalité précédente est vraie pour tout x. De là, χ_B et $\chi_{B^{-1}}$ sont proportionnels et donc égaux puisque tous les deux unitaires. On a donc montré que $\boxed{\chi_B = \chi_{B^{-1}}}$.

Comme B est supposée diagonalisable, B^{-1} l'est aussi et comme $\chi_B = \chi_{B^{-1}}$, B et B^{-1} ont les mêmes valeurs propres avec la même multiplicité. Tout ceci implique que B et B^{-1} sont semblables à la même matrice diagonale et donc que $\boxed{B \text{ et } B^{-1} \text{ sont semblables}}$.

(9) On a de suite

$$\text{Ker}(B - 2I_4) = \text{Vect}(e_1, e_2) \text{ et } \text{Ker}(B^{-1} - 2I_4) = \text{Vect}(e_3).$$

En particulier,

$$\text{rg}(B - 2I_4) = 2 \text{ et } \text{rg}(B^{-1} - 2I_4) = 3.$$

Si par l'absurde B et B^{-1} sont semblables, alors $B - 2I_4$ et $B^{-1} - 2I_4$ sont aussi semblables et ont donc même rang, ce qui n'est pas le cas. Ainsi, $\boxed{B \text{ et } B^{-1} \text{ ne sont pas semblables}}$.

Partie III : Produits de matrices de symétries.

(10) Toute matrice de symétrie est inversible et égale à son inverse. De là, A est inversible comme produit de deux matrices inversibles et

$$A^{-1} = S_2^{-1}S_1^{-1} = S_2S_1 = S_2(S_1S_2)S_2 = S_2AS_2^{-1}$$

donc $\boxed{A \text{ est semblable à son inverse}}$.

(11) La réponse est $\boxed{\text{oui}}$: soient $A = S_1S_2$ le produit de deux matrices de symétrie et

$$B = PAP^{-1} = PS_1S_2P^{-1}$$

une matrice semblable à A. Alors

$$B = (PS_1P^{-1})(PS_2P^{-1})$$

et B est le produit des deux matrices de symétrie PS_1P^{-1} et PS_2P^{-1}.

(12) On a

$$S_1^2 = \begin{pmatrix} 0_n & P \\ Q & 0_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0_n & P \\ Q & 0_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} PQ & 0_n \\ 0_n & QP \end{pmatrix},$$

$$S_2 = \begin{pmatrix} 0_n & P \\ Q & 0_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B & 0_n \\ 0_n & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_n & PC \\ QB & 0_n \end{pmatrix} \text{ et } S_2^2 = \begin{pmatrix} PCQB & 0_n \\ 0_n & QBPC \end{pmatrix}.$$

On en déduit que S_1 et S_2 sont deux matrices de symétrie si et seulement si

$$\boxed{Q = P^{-1} \text{ et } B^{-1} = PCP^{-1}}.$$

(13) Comme C est semblable à B^{-1}, il existe une matrice P inversible telle que $B^{-1} = PCP^{-1}$. En posant

$$\boxed{S_1 = \begin{pmatrix} 0_n & P \\ P^{-1} & 0_n \end{pmatrix} \text{ et } S_2 = S_1A},$$

alors d'après(12),

- les deux matrices S_1 et S_2 sont deux matrices de symétrie,

- $\boxed{A = S_1 S_2 \text{ est un produit de deux matrices de symétrie}}$.

Partie IV : La matrice $J_n(\lambda)$.

(14) *Question ultra-classique.* Soit $x_0 \in E$ tel que $g^{n-1}(x_0) \neq 0$. On montre sans souffrance que la famille
$$\beta = (g^{n-1}(x_0), g^{n-2}(x_0), \dots, g(x_0), x_0)$$
est une base de E et que $\boxed{[g]_\beta = N}$.

(15) On a $\det J_n(\lambda) = \lambda^n \neq 0$ donc $\boxed{J_n(\lambda) \text{ est inversible}}$.
Et toujours classiquement,
$$\boxed{J_n(\lambda)^{-1} = \frac{1}{\lambda}(I_n + (1/\lambda)N)^{-1} = \frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k(1/\lambda)^k N^k = \frac{1}{\lambda}I_n + N' \text{ avec } N' = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^k}{\lambda^{k+1}}N^k}.$$

(16) Ecrivons
$$N' = N \times \frac{-1}{\lambda^2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k-1}}{\lambda^{k-1}}N^{k-1} = N \times \frac{-1}{\lambda^2}\left(I_n - \frac{N}{\lambda} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}N^{n-1}}{\lambda^{n-1}}\right).$$
La matrice $Q = I_n - \dfrac{N}{\lambda} + \cdots + \dfrac{(-1)^{n-1}N^{n-1}}{\lambda^{n-1}}$ est triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale : elle est donc inversible et la matrice $\dfrac{-1}{\lambda^2}\left(I_n - \dfrac{N}{\lambda} + \cdots + \dfrac{(-1)^{n-1}N^{n-1}}{\lambda^{n-1}}\right)$ est donc inversible et commute avec N (comme polynôme en N). On en déduit d'une part que $\boxed{(N')^n = 0_n}$ et comme $N^{n-1} \neq 0_n$, que $\boxed{(N')^{n-1} \neq 0_n}$.
En appliquant le résultat de (14) à l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à N', on en déduit que N' est semblable à N. Il existe donc une matrice P inversible telle que $N' = PNP^{-1}$.
On en déduit alors que
$$\boxed{J_n(\lambda)^{-1} = \frac{1}{\lambda}I_n + PNP^{-1} = P\left(\frac{1}{\lambda}I_n + N\right)P^{-1} = PJ_n(1/\lambda)P^{-1},}$$
ce qui montre bien que $\boxed{J_n(\lambda)^{-1} \text{ est semblable à } J_n(1/\lambda)}$.

(17) On a de suite
$$\boxed{s_1^2 = s_2^2 = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}_{n-1}[X]}}.$$
Puis, pour tout $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$,
$$(s_1 \circ s_2)(P) = s_1\big(P(1-X)\big) = P\big(1-(-X)\big) = P(X+1) = g(P) + P,$$
et donc $\boxed{s_1 \circ s_2 = g + \mathrm{Id}_{\mathbb{C}_{n-1}[X]}}$.

(18) Si
$$P = a_p X^p + \cdots$$
avec $p = \deg(P) \geq 1$ (et donc $a_p \neq 0$), on a
$$g(P) = a_p(X+1)^p + a_{p-1}(X+1)^{p-1} + \cdots - (a_p X^p + \cdots) = a_p\binom{p}{1}X^{p-1} + \cdots$$
donc $\boxed{\deg\big(g(P)\big) = \deg(P) - 1}$.

(19) D'après (18), $g^n = 0$ et $g^{n-1} \neq 0$. D'après (14), il existe une base β de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ tel que $[g]_\beta = N$.
En notant $S_1 = [s_1]_\beta$ et $S_2 = [s_2]_\beta$, les relations obtenues en (17) montrent que
$$S_1^2 = S_2^2 = I_n \text{ et } S_1 S_2 = N + I_n = J_n(1),$$
ce qui montre que $\boxed{J_n(1) \text{ est le produit de deux matrices de symétrie}}$.

Partie V : Une caractérisation des matrices semblables à leur inverse.

(20) Immédiat à l'aide de (16) et du calcul par blocs, on détaille quand même un peu l'argument. On a

$$(A')^{-1} = \mathrm{Diag}\big(J_{n_1}(\lambda_1)^{-1}, \ldots, J_{n_r}(\lambda_r)^{-1}\big).$$

D'après (16), pour chaque i, il existe une matrice P_i inversible de taille n_i telle que

$$J_{n_i}(\lambda_i)^{-1} = P_i J_{n_i}(1/\lambda_i) P_i^{-1}.$$

Si P est la matrice diagonale par blocs définie par

$$P = \mathrm{Diag}\big(P_1, \ldots P_r\big),$$

alors

$$(A')^{-1} = P\,\mathrm{Diag}\big(J_{n_1}(1/\lambda_1), \ldots, J_{n_r}(1/\lambda_r)\big)\,P^{-1}.$$

Ainsi, $(A')^{-1}$ est semblable à $\mathrm{Diag}\big(J_{n_1}(1/\lambda_1), \ldots, J_{n_r}(1/\lambda_r)\big)$, et comme A est semblable à A', $\boxed{A^{-1} \text{ est semblable à } (A')^{-1} \text{ et donc à } \mathrm{Diag}\big(J_{n_1}(1/\lambda_1), \ldots, J_{n_r}(1/\lambda_r)\big)}$.

(21) Par hypothèse, A est semblable à son inverse donc par (20) à $\mathrm{Diag}\big(J_{n_1}(1/\lambda_1), \ldots, J_{n_r}(1/\lambda_r)\big)$. Par unicité de la décomposition de Jordan (admise en préambule de cette partie), comme A est aussi semblable à $\mathrm{Diag}\big(J_{n_1}(\lambda_1), \ldots, J_{n_r}(\lambda_r)\big)$, $\boxed{\text{les } J_{n_i}(1/\lambda_i) \text{ sont les } J_{n_j}(\lambda_j) \text{ à l'ordre des facteurs près}}$.

On peut donc $\boxed{\text{rassembler les blocs de Jordan de } A \text{ par paires } \big(J_{m_i}(\alpha_i), J_{m_i}(1/\alpha_i)\big)}$ avec $\alpha_i \neq 1$ et $\alpha_i \neq -1$ et $\boxed{\text{compléter avec des blocs du type } J_r(1) \text{ et } J_s(-1)}$ (il peut y avoir bien sûr plusieurs blocs de Jordan pour une même valeur propre).

D'après (19) et le résultat admis en fin de Partie IV, les blocs du type $J_r(1)$ et $J_s(-1)$ s'écrivent comme produit de deux matrices de symétrie.

D'après (16) à nouveau, on sait que $J_{m_i}(1/\alpha_i)$ est semblable à la matrice $J_{m_i}(\alpha_i)^{-1}$. En utilisant (13), on en déduit que la matrice diagonale par blocs de taille $2m_i$

$$\mathrm{Diag}\big(J_{m_i}(\alpha_i), J_{m_i}(1/\alpha_i)\big)$$

peut elle aussi s'écrire comme produit de deux matrices de symétrie.

On en déduit (à grands coups de produits de matrices diagonales par blocs) que A est semblable à une matrice pouvant s'écrire comme produit de deux matrices de symétrie, et enfin grâce à (11) que A elle-même peut s'écrire comme produit de deux matrices de symétrie.

On a montré que sur $\mathbb{C}$, une matrice inversible est semblable à son inverse si et seulement si elle peut s'écrire comme produit de deux matrices de symétrie.