Mines - Ponts - PSI - II - 2022

Matrices de Hurwitz

I. Matrices semi-simples

Dans ce corrigé, on appellera *matrices de similitude (plane directe)* les matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ de la forme $M(a,b)$. Pour $(\lambda_1,\ldots,\lambda_p)\in\mathbf{K}^p$, on notera $\operatorname{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_p)$ la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les λ_i pris dans cet ordre et, pour des matrices carrées $A_1,\ldots,A_q$, on notera $\operatorname{Diag}(A_1,\ldots,A_q)$ la matrice diagonale par blocs dont les blocs diagonaux sont les A_j pris dans cet ordre.

1. Soit $A=\begin{pmatrix}1&1\\-1&3\end{pmatrix}$. On calcule

$$\chi_A(x)=\begin{vmatrix}x-1&-1\\1&x-3\end{vmatrix}=(x-1)(x-3)+1=(x-2)^2.$$

La matrice A admet ainsi une unique valeur propre et n'est pas diagonale. Elle n'est donc pas diagonalisable (sur quelque corps que ce soit, en particulier sur $\mathbf{C}$). On peut alternativement dire que $\operatorname{rg}\big(2I_2-A\big)=\operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&-1\\1&-1\end{pmatrix}=1$, donc que $\dim E_2(A)$, qui vaut 1, est strictement inférieure à l'ordre de multiplicité de la valeur propre, qui vaut 2, ce qui entraîne que A n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, donc n'est pas semi-simple.

2. Soit $B=\begin{pmatrix}3&2\\-5&1\end{pmatrix}$. On calcule $\chi_B=X^2-4X+13$, trinôme du second degré de discriminant -36 et de racines $2\pm3\mathrm{i}$. La matrice $B\in\mathcal{M}_2(\mathbf{C})$ admet deux valeurs propres distinctes ; elle est donc diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ et, ainsi, semi-simple. Cherchons l'espace propre associé à $2+3\mathrm{i}$:

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in E_{2+3\mathrm{i}}(B)\iff\begin{pmatrix}1-3\mathrm{i}&2\\-5&-1-3\mathrm{i}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\overset{(1)}{\iff}(1-3\mathrm{i})x+2y=0\qquad\therefore$$

$$E_{2+3\mathrm{i}}(B)=\operatorname{Vect}\begin{pmatrix}2\\-1+3\mathrm{i}\end{pmatrix}=\operatorname{Vect}(W_1+\mathrm{i}\,W_2)\text{ avec }W_1=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}\text{ et }W_2=\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix},$$

l'équivalence (1) se justifiant par le fait qu'on sait déjà que l'espace propre est de dimension 1. On calcule facilement

$$BW_1=\begin{pmatrix}3&2\\-5&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-11\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}=2W_1-3W_2\qquad\&\qquad BW_2=\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}=3W_1+2W_2,$$

ce dont on déduit, par la formule $C_j(AB)=AC_j(B)$, que

$$\begin{pmatrix}3&2\\-5&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\-1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\-1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3\\-3&2\end{pmatrix}\qquad\therefore\qquad\begin{pmatrix}3&2\\-5&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\-1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3\\-3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\-1&3\end{pmatrix}^{-1}.$$

3. Le calcul précédent est général et l'on peut le présenter plus efficacement. Soient $M\in\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$, une matrice dont le polynôme caractéristique admet un discriminant strictement négatif, $\mu=a+\mathrm{i}\,b$ et $\overline{\mu}=a-\mathrm{i}\,b$ ses deux valeurs propres, qui sont bien distinctes car $b\neq0$ par hypothèse. Les deux espaces propres complexes de M sont donc des droites vectorielles, M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbf{C})$, donc M est semi-simple.

Soit V un vecteur propre de M associé à la valeur propre μ. En suivant les notations de la question précédente, on peut écrire $V=W_1+\mathrm{i}\,W_2$ avec $(W_1,W_2)\in\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^2$. Alors, par unicité de la représentation algébrique des complexes,

$$MV=\mu V\iff M(W_1+\mathrm{i}\,W_2)=(a+\mathrm{i}\,b)(W_1+\mathrm{i}\,W_2)=(aW_1-bW_2)+\mathrm{i}\,(bW_1+aW_2)\iff\begin{cases}MW_1=aW_1-bW_2\\MW_2=bW_1+aW_2.\end{cases}$$

En conjuguant, les règles de calcul des conjugués sur $\mathbf{C}$ relativement à l'addition et la multiplication donnent immédiatement $\overline{MV}=\overline{\mu V}\iff M\overline{V}=\overline{\mu}\overline{V}$. Ainsi, $\big(V,\overline{V}\big)$ est une base de vecteurs propres de M. Corrélativement, $(W_1,W_2)=\left(\dfrac{V+\overline{V}}{2},\dfrac{V-\overline{V}}{2\mathrm{i}}\right)=\big(\operatorname{Re}(V),\operatorname{Im}(V)\big)$ est une famille libre, donc une base de $\mathbf{C}^2$, la matrice de passage de $\big(V,\overline{V}\big)$ à (W_1,W_2) étant $\dfrac12\begin{pmatrix}1&-\mathrm{i}\\1&\mathrm{i}\end{pmatrix}$, matrice de déterminant $\dfrac{\mathrm{i}}{2}\neq0$, donc inversible. Or, les expressions de MW_1

et MW_2 ci-dessus montrent que, si ϕ_M est l'endomorphisme de $\mathbf{C}^2$ associé à M, alors $\mathrm{mat}_{(W_1,W_2)}(\phi_M) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$. Ainsi M est-elle semblable (dans $\mathbf{R}$) à cette matrice.

4. Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$. Notons Δ le discriminant de χ_M.

— Si $\Delta < 0$, alors la condition **ii)** est vérifiée et la question 3 montre que M est semi-simple.

— Si $\Delta > 0$, alors M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$, donc dans $\mathcal{M}_2(\mathbf{C})$, puisque la matrice de passage contenant les vecteurs propres appartient à $\mathrm{GL}_2(\mathbf{R}) \subset \mathrm{GL}_2(\mathbf{C})$; M est donc à nouveau semi-simple.

— Si $\Delta = 0$, M est à derechef diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ si, et seulement si, elle l'est dans $\mathcal{M}_2(\mathbf{C})$ si, et seulement si, M est une matrice d'homothétie.

On a bien montré l'équivalence demandée.

5. Soit N une matrice semblable à une matrice presque diagonale $M = \mathrm{Diag}\big(D, M(a_1,b_1), \dots, M(a_q,b_q)\big)$, avec les notations de la définition 2 de l'énoncé. D'après la question 3,

$$\forall j \in [\![1,q]\!],\ \exists D_j = \mathrm{diag}\left(\mu_j, \overline{\mu_j}\right),\ \exists P_j \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{C})\colon M(a_j,b_j) = P_j D_j P_j^{-1}.$$

Alors, en posant $P = \mathrm{Diag}(I_p, P_1, \dots, P_q)$, les règles du calcul par blocs donnent $P^{-1} = \mathrm{Diag}\left(I_p, P_1^{-1}, \dots, P_q^{-1}\right)$ et, avec $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$,

$$PMP^{-1} = \mathrm{Diag}(D, D_1, \dots, D_q) = \mathrm{diag}\left(\lambda_1, \dots, \lambda_p, \mu_1, \overline{\mu_1}, \dots, \mu_q, \overline{\mu_q}\right).$$

6. Si $N \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, χ_N est un polynôme unitaire réel de degré n et il se factorise sur $\mathbf{C}$ de la manière suivante :

$$\chi_N = \prod_{i=1}^{p}(X-\lambda_i) \times \prod_{j=1}^{q}(X-\mu_j)\big(X-\overline{\mu_j}\big),$$

où $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ sont les racines réelles de χ_N et $\left(\mu_j, \overline{\mu_j}\right)$ les couples de racines complexes non réelles conjuguées. Avec cette écriture sans exposant, les racines réelles comme complexes sont susceptibles de se répéter.

Supposons que N est semi-simple. Montrons dans un premier temps qu'il existe une base de $\mathbf{C}^n$ de la forme $\left(U_1, \dots, U_p, V_1, \overline{V_1}, \dots, V_q, \overline{V_q}\right)$ avec

i) $U_i \in \mathbf{R}^n$ et $NU_i = \lambda_i U_i$ pour $i \in [\![1,p]\!]$;

ii) $NV_j = \mu_j V_j$ et $N\overline{V_j} = \overline{\mu_j}\,\overline{V_j}$ pour $j \in [\![1,q]\!]$.

Pour *i)*, notons $U_1, \dots, U_p$ des vecteurs propres linéairement indépendants tels que $NU_i = \lambda_i U_i$ pour $i \in [\![1,p]\!]$. Ces vecteurs appartiennent à $\mathbf{R}^n$ comme solutions de systèmes linéaires à coefficients réels.

Pour *ii)*, soit μ une valeur propre non réelle de N. Pour $V \in \mathbf{C}^n$, le calcul de conjugaison déjà fait à la question 3 montre alors que $NV = \mu V \iff N\overline{V} = \overline{\mu}\,\overline{V}$, donc $E_{\overline{\mu}}(N) = \left\{\overline{V}\,;\ V \in E_\mu(N)\right\} = \overline{E_\mu(N)}$. On obtient ainsi une base de $E_{\overline{\mu}}$ en conjuguant une base de E_μ, ce qui permet de construire par permutation une base de $\mathbf{C}$ conforme aux assertions ci-dessus. Soit $\left(U_1, \dots, U_p, V_1, \overline{V_1}, \dots, V_q, \overline{V_q}\right)$ une telle base.

Le calcul fait à la question 3 montre alors qu'en posant $W_{j,1} = \mathrm{Re}(V_j)$ et $W_{j,2} = \mathrm{Im}(V_j)$ pour $j \in [\![1,q]\!]$, on a $E_j = \mathrm{Vect}_{\mathbf{C}}\left(W_{j,1}, W_{j,2}\right) = \mathrm{Vect}_{\mathbf{C}}\left(V_j, \overline{V_j}\right)$ et que $\mathrm{mat}_{\left(W_{j,1},W_{j,2}\right)}\left(\phi_N\right) = \begin{pmatrix} a_j & b_j \\ -b_j & a_j \end{pmatrix}$, où $\mu_j = a_j + \mathrm{i}\, b_j$. D'où $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}\left(\phi_N\right) = \mathrm{Diag}\left(\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p), M(a_1,b_1), \dots, M(a_q,b_q)\right)$, matrice presque diagonale.

On pouvait alternativement étendre la notion de semi-simplicité aux endomorphismes d'un espace vectoriel réel de dimension finie, le caractère diagonalisable étant un invariant de similitude. Avec les notations du paragraphe ci-dessus, si N, donc ϕ_N, est semi-simple, les plans E_j sont stables par ϕ_N et, la restriction à un sous-espace stable d'un endomorphisme diagonalisable étant diagonalisable, ces restrictions sont semi-simples. On peut alors leur appliquer le cas $n = 2$ (question 3). Dans une base adaptée à la décomposition $\left[\bigoplus_{i=1}^{p} \mathrm{Vect}(U_i)\right] \oplus \left[\bigoplus_{j=1}^{q} E_j\right]$, on obtient alors une matrice diagonale par blocs avec une partie diagonale et des matrices de similitude, donc une matrice presque diagonale.

II. Une caractérisation des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$

Soient E un $\mathbf{C}$-e.v. de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme diagonalisable. Soient $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ une base de E formée de vecteurs propres de u et F un sous-espace vectoriel non trivial de E.

7. Si $v_k \in F$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, alors F contient $\mathcal{B}$, donc $F \supset E$, soit $F = E$, ce qui est exclu par hypothèse. Si $v_k \notin F$, $F \cap \mathrm{Vect}(v_k)$ est un s.e.v. de la droite $\mathrm{Vect}(v_k)$ ne contenant pas v_k, donc un s.e.v. strict de $\mathrm{Vect}(v_k)$, donc $\{0_E\}$. Autrement dit, $F + \mathrm{Vect}(v_k) = F \oplus \mathrm{Vect}(v_k)$.

On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des s.e.v. de E stables par u et en somme directe avec F et $\mathcal{L}$ l'ensemble des dimensions des éléments de $\mathcal{A}$ distincts de $\{0_E\}$.

8. Soit $H = \mathrm{Vect}(v_k)$ avec v_k choisi comme à la question 7. Alors, H est une droite propre, donc une droite stable et elle est par hypothèse en somme directe avec F. Cela montre que $H \in \mathcal{A}$, donc que $1 \in \mathcal{L}$. En particulier, $\mathcal{L}$ est non vide. Par ailleurs, $\mathcal{L} \subset [\![1, n]\!]$, puisque la dimension des s.e.v. de E est majorée par $\dim E = n$. Ainsi, $\mathcal{L}$ est une partie non vide et majorée de $\mathbf{N}$. Elle admet donc un plus grand élément, disons r et l'on a $r \geqslant 1$.

9. Soit $G \in \mathcal{A}$ avec $\dim G = r$ (un tel s.e.v. de E existe par construction). Si G n'était pas un supplémentaire de F, alors $F \oplus G$ serait un s.e.v strict de E, auquel on pourrait appliquer la question 7. Montrons que $G \oplus \mathrm{Vect}(e_k) \in \mathcal{A}$:

— $G \oplus \mathrm{Vect}(e_k)$ est stable (par u) comme somme de deux s.e.v. stables ;

— si $f = g + \lambda e_k \in F \cap \big(G \oplus \mathrm{Vect}(e_k)\big)$, alors $\lambda e_k \in F + G$, d'où $\lambda = 0$ car $e_k \notin F + G$ par hypothèse. Alors, $f = g \in F \cap G = \{0_E\}$; ainsi, $F \cap \big(G \oplus \mathrm{Vect}(e_k)\big) = \{0_E\}$.

Corrélativement, $\dim G \oplus \mathrm{Vect}(e_k) = r + 1 \in \mathcal{L}$, ce qui contredit la maximalité de r et conclut la démonstration par l'absurde : $F \oplus G = E$. Ainsi, F admet un supplémentaire stable par u.

Remarque. La démonstration proposée aux questions 7 à 9 est assez lourde et l'on peut aller plus vite : rappelons que le théorème de la base incomplète assure qu'il est possible de compléter toute famille libre d'un espace vectoriel de dimension finie en une base en prenant les vecteurs dans une famille génératrice donnée. On peut ainsi compléter une base de F avec des vecteurs propres, lesquels engendrent une somme (directe) de droites stables par u, donc un sous-espace stable par u.

10. Étudions la réciproque et supposons que tout s.e.v. de E admette un supplémentaire stable par u. Posons $H = \displaystyle\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u)$. Par hypothèse, H admet un supplémentaire G stable par u. Raisonnons par l'absurde et supposons que u n'est pas diagonalisable. Ainsi, $G \neq \{0_E\}$ et u induit un endomorphisme de G par restriction, qui possède au moins un vecteur propre, disons x, puisque G est un $\mathbf{C}$-e.v. de dimension finie. Alors, x est un vecteur propre de u n'appartenant pas à H, ce qui est contradictoire avec la définition de H. Ainsi, $G = \{0\}$, donc $H = E$ et u est diagonalisable. On peut noter que la somme des espaces propres par un endomorphisme est toujours stable par celui-ci, ce qui donne le théorème ci-dessous.

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbf{C}$-e.v E. Alors, les propositions suivantes sont équivalentes :

i) u est diagonalisable ;

ii) tout sous-espace vectoriel de E admet un supplémentaire stable par u ;

iii) tout sous-espace vectoriel de E stable par u admet un supplémentaire stable par u.

On peut noter que la discussion de cette partie est vide si $\dim E \leqslant 1$, mais le résultat, quoique sans intérêt, reste valide en ce cas. En termes matriciels (même si l'on n'a raisonné que sur les endomorphismes), une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ est diagonalisable si, et seulement si, tout sous-espace vectoriel de $\mathbf{C}^n$ admet un supplémentaire stable par ϕ_M.

Remarque. ll semble probable que l'énoncé ait plutôt souhaité se placer sur un $\mathbf{R}$-e.v. (cela justifierait la mention de l'hyperplan dans l'indication). Le seul endroit où l'on utilise que E est un espace vectoriel complexe est cette question 10, pour affirmer l'existence d'un vecteur propre. Supposons que E soit un espace vectoriel réel. On considère le même sous-espace H que dans le cas complexe. Soient $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ une base de H et $\mathcal{B}$ une base de E. On peut compléter $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ en une base de E avec des vecteurs de $\mathcal{B}$. Si $p < n$, donc si u n'est pas diagonalisable, on peut alors enlever le dernier vecteur de cette base et l'on obtient un hyperplan H' de E contenant H. Par hypothèse, H' admet un supplémentaire stable, qui est une droite, donc une droite propre, et l'on obtient ainsi aussi une contradiction. Notons pour terminer que, sur un e.v. réel, on n'a plus équivalence avec la dernière proposition. Un contrexemple est donné par les matrices de similitude $M(a,b)$, qui n'admettent pas de sous-espaces stables non triviaux (et vérifient donc *iii)*, mais ne sont pas diagonalisables.

III. Polynômes de Hurwitz

11. Soit $\mathbf{R}[X] \ni P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ un polynôme non constant à coefficients strictement positifs. Soit $\alpha \geqslant 0$. Alors

$$P(\alpha) = \sum_{k=1}^{d} \underbrace{a_k}_{>0} \underbrace{\alpha^k}_{\geqslant 0} + a_0 \geqslant a_0 > 0.$$

Par contraposée, si α est une racine réelle de P, alors $\alpha < 0$.

12. Si $(P, Q) \in \mathbf{R}[X]^2$ avec $P \mid Q$ et si $Q = PR$ est un polynôme de Hurwitz, alors, pour α une racine de P, on a $Q(\alpha) = P(\alpha)R(\alpha) = 0$, d'où $\mathrm{Re}(\alpha) < 0$ par hypothèse sur Q, donc P est un polynôme de Hurwitz.

13. Soit P un polynôme de Hurwitz irréductible à coefficient dominant positif. Étant irréductible, il est de degré un ou deux. S'il est de degré un, il s'écrit $a(X - \alpha)$ avec $a > 0$ et $\alpha < 0$ et est donc à coefficients strictement positifs. S'il est de degré deux, il s'écrit

$$P = a(X - \mu)\big(X - \overline{\mu}\big) = a\big(X^2 - 2\,\mathrm{Re}(\mu)X + |\mu|^2\big)$$

avec $a > 0$. Étant un polynôme de Hurwitz, $\mathrm{Re}(\mu) < 0$, donc son coefficient de degré 1 est $-2a\,\mathrm{Re}(\mu) > 0$. Enfin, son coefficient constant est $a|\mu|^2 > 0$, donc P est bien à coefficients strictement positifs. Il est clair qu'il s'agit dans les deux cas d'une équivalence (mais on ne s'en servira pas dans la suite).

Soient $n \in \mathbf{N}^*$, $(z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathbf{C}^n$ et les polynômes $P = \prod_{k=1}^{n} (X - z_k)$ et $Q = \prod_{1 \leqslant k, \ell \leqslant n} (X - z_k - z_\ell)$.

14. On suppose $n = 2$ et que $P = (X - z_1)(X - z_2)$ est à coefficients réels. Alors, en développant et en ne calculant que les coefficients nécessaires,

$$Q = (X - 2z_1)(X - 2z_2)(X - z_1 - z_2)^2 = X^4 - 4(z_1 + z_2)X^3 + uX^2 + vX + 4z_1z_2(z_1 + z_2)^2$$

On suppose que Q est à coefficients strictement positifs.

- Si $(z_1, z_2) \in \mathbf{R}^2$, alors le signe des coefficients de Q de degré 0 et 3 donne $z_1 + z_2 < 0$ et $z_1 z_2 > 0$, d'où $z_1 < 0$ et $z_2 < 0$, z_1 et z_2 étant de même signe et de somme négative.
- Sinon, $z_2 = \overline{z_1}$, d'où $-8\,\mathrm{Re}(z_1) > 0$ (c'est le coefficient de X^3) , soit $\mathrm{Re}(z_1) < 0$.

Dans les deux cas, P est un polynôme de Hurwitz.

15. Si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{m} b_k X^k$ sont à coefficients strictement positifs, le produit donne $PQ = \sum_{k=0}^{n+m} c_k X^k$ avec $c_k = \sum_{\substack{0 \leqslant i \leqslant n \\ 0 \leqslant j \leqslant m \\ i+j=k}} a_i b_j$. S'il est évident que $c_k \geqslant 0$ pour tout k, il faut vérifier que la somme est non vide pour obtenir $c_k > 0$, donc que l'application définie sur $[\![0, n]\!] \times [\![0, m]\!]$ par $\mathfrak{a} \colon (i, j) \longmapsto i + j$ définit une surjection sur $[\![0, n+m]\!]$. De fait, si $k \in [\![0, n]\!]$, on peut écrire $k = \mathfrak{a}(k, 0)$ et, si $k \in [\![n+1, n+m]\!]$, on peut écrire $k = \mathfrak{a}(n, k-n)$ avec $k - n \in [\![1, m]\!]$.

16. Soit P un polynôme de Hurwitz. Alors, ses diviseurs irréductibles sont également des polynômes de Hurwitz (Q 12), donc à coefficients strictement positifs (Q 13), ce qui entraîne que P lui-même est à coefficients strictement positifs (Q 15). Comme P est un polynôme de Hurwitz, c'est aussi le cas de Q, dont les racines sont des sommes de racines de P, donc ont bien une partie réelle strictement négative et Q est donc également à coefficients strictement positifs.

Réciproquement, supposons que P et Q sont à coefficients strictement positifs. Alors, les racines réelles de P sont strictement négatives (Q 11). Si z est une racine complexe de P, alors $\overline{z}$ est également racine de P, puisque P est à coefficients réels, donc $z+\overline{z} = 2\operatorname{Re}(z)$ est une racine réelle de Q et est donc strictement négatif (Q 11). Ainsi, P est bien un polynôme de Hurwitz.

IV. Système différentiel de matrice associée semi-simple

17. C'est une question de cours. Les matrices M et T étant semblables, il existe une matrice inversible P telle que $M = PTP^{-1}$. Alors, par linéarité de la dérivation,

$$X' = MX \iff X' = PTP^{-1}X \iff P^{-1}X' = TP^{-1}X \iff \big(P^{-1}X\big)' = T\big(P^{-1}X\big) \iff \begin{cases} X = PY \\ Y' = TY. \end{cases}$$

Ainsi, pour $X = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix}^\top$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \end{pmatrix}^\top$, $P = \big(p_{i,j}\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $i \in [\![1,n]\!]$, il vient $x_i = \displaystyle\sum_{j=1}^n p_{i,j}y_j$.

18. Pour $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ et $z = x + \mathrm{i}\,y$, le système différentiel s'écrit

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x' = ax + by \\ y' = -bx + ay \end{cases} \quad \therefore$$

$$z' = x' + \mathrm{i}\,y' = (ax+by)' + \mathrm{i}\,(-bx+ay)' = (a-\mathrm{i}\,b)x + (b+\mathrm{i}\,a)y = (a-\mathrm{i}\,b)z.$$

L'équation en z s'intègre en $z(t) = \kappa\,\mathrm{e}^{(a-\mathrm{i}\,b)t} = \kappa\,\mathrm{e}^{at}\big(\cos(bt) - \mathrm{i}\,\sin(bt)\big)$, $\kappa \in \mathbf{C}$, soit, pour $\kappa = \lambda + \mathrm{i}\,\mu$,

$$\begin{cases} x(t) = \mathrm{e}^{at}\big(\lambda\cos(bt) + \mu\sin(bt)\big) \\ y(t) = \mathrm{e}^{at}\big(\mu\cos(bt) - \lambda\sin(bt)\big) \end{cases} \iff X(t) = \lambda\mathrm{e}^{at}\begin{pmatrix} \cos(bt) \\ -\sin(bt) \end{pmatrix} + \mu\mathrm{e}^{at}\begin{pmatrix} \sin(bt) \\ \cos(bt) \end{pmatrix},$$

la première forme étant donnée par ses coordonnées dans l'esprit de la question 17 et la deuxième, vectoriellement.

En reprenant le calcul fait à la question 2 de la matrice de passage $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ et les formules de la question 17, il vient, en donnant à nouveau les deux formes,

$$\begin{cases} x(t) = 2\mathrm{e}^{at}\big[\lambda\cos(bt) + \mu\sin(bt)\big] \\ y(t) = \mathrm{e}^{at}\big[(3\mu-\lambda)\cos(bt) - (\mu+3\lambda)\sin(bt)\big] \end{cases} \iff$$

$$X(t) = \mathrm{e}^{at}\big(\lambda\cos(bt) + \mu\sin(bt)\big)\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \mathrm{e}^{at}\big(\mu\cos(bt) - \lambda\sin(bt)\big)\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

19. Les coordonnées x et y tendent vers 0 si, et seulement si le complexe $z = x + \mathrm{i}\,y$ tend vers 0. Or,

$$\forall \kappa \in \mathbf{C}\colon\ \lim_{t\to+\infty} \kappa\,\mathrm{e}^{(a-\mathrm{i}\,b)t} = 0 \iff \lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{(a-\mathrm{i}\,b)t} = 0 \iff a < 0.$$

20. Par hypothèse, Φ est solution de $\mathcal{S}^*$, soit $\Phi'(t) = T\Phi(t)$ pour tout t. Conformément à l'indication, posons $\Lambda(t) = \mathrm{e}^{2\beta t}\|\Phi(t)\|^2$. On rappelle que si B est bilinéaire sur $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$ et $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$ et $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^m$ dérivables, alors $B(f,g)$ est dérivable et $B(f,g)' = B(f',g) + B(f,g')$. Corrélativement, on peut dériver et il vient

$$\Lambda'(t) = \mathrm{e}^{2\beta t}\big(2\beta\|\Phi(t)\|^2 + 2\langle\Phi'(t),\Phi(t)\rangle\big) = 2\mathrm{e}^{2\beta t}\big(\beta\|\Phi(t)\|^2 + \langle T\Phi(t),\Phi(t)\rangle\big) \overset{(C)}{\leqslant} 2\mathrm{e}^{2\beta t}\big(\beta\|\Phi(t)\|^2 - \beta\|\Phi(t)\|^2\big) = 0.$$

Il s'ensuit que la fonction Λ est décroissante. En particulier, pour tout $t \geqslant 0$,

$$\Lambda(t) \leqslant \Lambda(0) \iff \mathrm{e}^{2\beta t}\|\Phi(t)\|^2 \leqslant \|\Phi(0)\|^2 \iff \|\Phi(t)\| \leqslant \mathrm{e}^{-\beta t}\|\Phi(0)\|.$$

L'assertion $\mathbf{A}_3$ est donc bien vérifiée avec $\alpha = \beta$ et $k = 1$.

21. On suppose dans cette dernière question que M est semi-simple, donc semblable à une matrice presque diagonale. La relation de similitude étant symétrique, le résultat de la question 17 peut s'inverser et, si deux matrices sont semblables, les solutions de l'un des systèmes est combinaison linéaire des solutions de l'autre. Corrélativement, l'assertion $\mathbf{A}_2$ est un invariant de similitude et l'on peut donc supposer que M est presque diagonale.

$\mathbf{A}_3 \Rightarrow \mathbf{A}_2$. Cette implication est immédiate car $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t} = 0$ et que, par continuité de la norme, $\lim\limits_{t\to+\infty} \|\Phi(t)\| = 0$ est équivalent au fait que toutes les coordonnées de $\Phi(t)$ tendent vers 0 quand t tend vers $+\infty$.

$\mathbf{A}_1 \Leftrightarrow \mathbf{A}_2$. Cette équivalence est vraie en dimension 2 d'après la question 19 et elle est immédiate en dimension 1, les solutions de $y' = ay$ étant $y(t) = \kappa \mathrm{e}^{at}$ de limite nulle en $+\infty$ si, et seulement si, $a < 0$. L'écriture $X' = MX$ avec M diagonale par blocs permet de se ramener à ces cas, les blocs étant découplés : plus précisément, pour $M = \mathrm{Diag}\left(\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p), M(a_1, b_1), \dots, M(a_q, b_q)\right)$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix}^\top$, on a

$$X' = MX \iff \left[\forall i \in [\![1,p]\!] \colon x_i' = \lambda_i x_i \quad \& \quad \forall j \in [\![1,q]\!] \colon \begin{pmatrix} x'_{p+2j-1} \\ x'_{p+2j} \end{pmatrix} = M(a_q, b_q) \begin{pmatrix} x_{p+2j-1} \\ x_{p+2j} \end{pmatrix}\right].$$

$\mathbf{A}_1 \& \mathbf{A}_2 \Rightarrow \mathbf{A}_3$. On passe par l'expression découplée des solutions. Notons $\alpha = -\max\left\{ \mathrm{Re}(\lambda)\,;\ \lambda \in \mathrm{Sp}(M)\right\} < 0$ et remarquons que, pour une solution $\Phi(t)$ de coordonnées $\big(x_1(t), \dots, x_n(t)\big)$, pour tout $t \geqslant 0$ et pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on a $|x_i(t)| \leqslant \|\Phi(t)\|_\infty \leqslant \|\Phi(t)\|$. Avec les notations ci-dessus (qui reprennent la définition des matrices presque diagonales), on a

$$\forall i \in [\![1,p]\!],\ \forall t \geqslant 0 \colon |x_i(t)| = |x_i(0)|\mathrm{e}^{\lambda_i t} \leqslant \|\Phi(0)\|\mathrm{e}^{-\alpha t}.$$

Pour $j \in [\![1,q]\!]$ notons $z_j = x_{p+2j-1} + \mathrm{i}\, x_{p+2j}$ et μ_j l'une des deux valeurs propres conjuguées de $M(a_j, b_j)$. Alors,

$$\forall j \in [\![1,q]\!],\ \forall t \geqslant 0 \colon |z_j(t)| = |z_j(0)|\mathrm{e}^{-\mathrm{Re}(\mu_j)t} \leqslant \|\Phi(0)\|\mathrm{e}^{-\alpha t}.$$

Finalement,

$$\forall t \geqslant 0 \colon \|\Phi(t)\|^2 = \sum_{i=1}^{p} x_i(t)^2 + \sum_{j=1}^{q} |z_j(t)|^2 \leqslant (p+q)\mathrm{e}^{-2\alpha t}\|\Phi(0)\|^2 \qquad \therefore \qquad \forall t \geqslant 0 \colon \|\Phi(t)\| \leqslant \sqrt{p+q}\,\mathrm{e}^{-\alpha t}\|\Phi(0)\|.$$

On pourrait aussi passer directement sur $\mathbf{C}$ pour diagonaliser M.