CH20 : Calcul différentiel - aspects appliqués

Dans ce dernier chapitre, les fonctions considérées sont définies sur un ouvert Ω de E (un $\mathbb{R}$-evn de dimension finie) et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

I Vecteurs tangents à une partie

Définition 1 (Vecteur tangent à une partie)
Soient X une partie de E et $x \in X$.
On dit qu'un vecteur $v \in E$ est **tangent à X en x** *lorsqu'il existe $\varepsilon > 0$ et une application $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to X$ dérivable en 0 tels que $\gamma(0) = x$ et $\gamma'(0) = v$.*

Vocabulaire
En général, une application $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to E$ est appelée un **arc** (ou **arc paramétré**).
Un vecteur $v \in E$ est donc tangent à X en x lorsqu'il existe un arc tracé dans X qui passe par x, avec un vecteur vitesse égal à v.

Notation
On notera $T_x X$ l'ensemble des vecteurs tangents à X en x.

Théorème 2 (Structure d'hyperplan tangent)
Soit $g : \Omega \subset E \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On considère "l'hypersurface" de E :

$$X = g^{-1}(\{0\}) = \{x \in \Omega,\ g(x) = 0\}.$$

Alors, pour tout $x \in X$ tel que $dg(x) \neq 0_{\mathcal{L}(E,\mathbb{R})}$, on a

$$T_x X = Ker(dg(x)).$$

Ainsi, l'ensemble des vecteurs tangents à X en x est un hyperplan de E.
De plus, si E est euclidien, alors

$$T_x X = \{\nabla g(x)\}^{\perp}.$$

Vocabulaire
Dans ce cas, on appelle en général **(hyper)plan tangent** à X en x l'hyperplan **affine**

$$\mathcal{T}_x X = x + T_x X = x + Ker(dg(x)) = x + \{\nabla f(x)\}^{\perp}.$$

Pour tout $m \in E$, on a

$$m \in \mathcal{T}_x X \iff m - x \in T_x X \iff (m - x | \nabla f(x)) = 0.$$

II Problèmes d'optimisation

E désigne toujours un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie (notée $n \in \mathbb{N}^*$), et Ω un ouvert de E.

1) Condition nécessaire d'extremum local

Définition 3 (Minimum, maximum local)
Soit $A \subset E$ (pas nécessairement un ouvert), soit $f : A \to \mathbb{R}$ et $a \in A$.
On dit que f possède un **minimum local** *(resp.* **maximum local***) en a lorsqu'il existe $r > 0$ tel que $\forall x \in B(a, r) \cap A,\ f(x) \geq f(a)$ (resp. $f(x) \leq f(a)$).*

Vocabulaire
Ces deux termes sont regroupés sous la dénomination plus générale d'**extremum local**.
Le minimum (resp. maximum) est dit **global** lorsque l'inégalité $f(x) \geq f(a)$ (resp. $f(x) \leq f(a)$) est vraie pour tout $x \in A$.
Bien sûr, tout extremum global est en particulier un extremum local.

Ce résultat se généralise aux fonctions de plusieurs variables :

Définition 4 (Point critique d'une application différentiable)
Soit Ω un ouvert de E, et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable.
On appelle **point critique** *de f tout point $a \in \Omega$ tel que $df(a) = 0_{\mathcal{L}(E,\mathbb{R})}$.*

Théorème 5 (Condition nécessaire d'extremum local)
Soit Ω un **ouvert** *de E, et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable.*
Si f admet un extremum local en $a \in \Omega$, alors a est un point critique de f.

Méthode
Dans la recherche des extrema locaux d'une fonction différentiable **sur un ouvert** *et à valeurs réelles, on commence donc par chercher les points critiques, puis on discute au cas par cas pour déterminer si ce sont réellement des extrema.*

2) Conditions d'ordre 2

On va maintenant donner des outils plus précis pour connaître la nature d'un point critique de f, c'est-à-dire s'il s'agit d'un minimum local, d'un maximum local, ou d'un point col. Pour cela, on va établir un développement limité à l'ordre 2 de f au voisinage du point critique.

Théorème 6 (Formule de Taylor-Young à l'ordre 2)
Soit Ω un ouvert de E et $f \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$. Pour tout $a \in \Omega$, on a dans toute base $\mathcal{B}_E$ de E :

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i,j \leq n} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) + \underset{h \to 0_E}{o}(\|h\|^2),$$

où $(h_1, \cdots, h_n) = [h]_{\mathcal{B}_E}$.

Dans la suite, on se limite au cas de $E = \mathbb{R}^n$, muni de sa structure euclidienne canonique.

Définition 7 (Matrice hessienne)
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On appelle **matrice hessienne** *de f au point $a \in \Omega$ la matrice*

$$H_f(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right)_{(i,j) \in [1,n]^2} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}).$$

Corollaire 8 (Formule de Taylor-Young à l'ordre 2 dans $\mathbb{R}^n$)
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$. Pour tout $a \in \Omega$, on a :

$$f(a+h) = f(a) + (\nabla f(a)|h) + \frac{1}{2}(H_f(a)h|h) + \underset{h \to 0_E}{o}(\|h\|^2),$$

ou encore

$$f(a+h) = f(a) + \nabla f(a)^\top h + \frac{1}{2}h^\top H_f(a)h + \underset{h \to 0_E}{o}(\|h\|^2).$$

Théorème 9 (Conditions d'ordre 2)
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, soit $f \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$ et soit $a \in \Omega$.

- (i) *Si f admet un minimum local en a, alors a est un point critique de f et $H_f(a) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.*
- (ii) *Si a est un point critique de f et si $H_f(a) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors f admet un minimum local en a.*

De même pour les maximum locaux en remplaçant $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ par $\mathcal{S}_n^-(\mathbb{R})$ (i.e. $-H_f(a) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$) et $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ par $\mathcal{S}_n^{--}(\mathbb{R})$ (i.e. $-H_f(a) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$).

Corollaire 10 (Conditions d'ordre 2 avec le signe des valeurs propres)
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, soit $f \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$ et soit $a \in \Omega$ un point critique de f.

- (i) *Si $Sp(H_f(a)) \subset \mathbb{R}_+^*$, alors f admet un minimum local en a.*
- (ii) *Si $Sp(H_f(a)) \subset \mathbb{R}_-^*$, alors f admet un maximum local en a.*
- (iii) *Si $H_f(a)$ possède deux valeurs propres non nulles de signes opposés, alors a est un point col (c'est-à-dire que f n'admet pas d'extremum local en a).*
- (iv) *Sinon, on ne peut pas conclure.*

Corollaire 11 (Conditions d'ordre 2 en dimension 2)
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, soit $f \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$ et soit $a \in \Omega$ un point critique de f.

- (i) *Si $\det(H_f(a)) > 0$, alors f admet un extremum local en a. Il s'agit d'un minimum lorsque $tr(H_f(a)) > 0$, d'un maximum sinon.*
- (ii) *Si $\det(H_f(a)) < 0$, alors f admet un point col en a.*
- (iii) *Si $\det(H_f(a)) = 0$, alors on ne peut pas conclure.*

3) Optimisation sous contrainte

On revient ici au cas général où E est un $\mathbb{R}$-evn de dimension finie. On va maintenant chercher les extrema de f non pas sur un ouvert de E, mais sur une "hypersurface" de E (partie définie comme les zéros d'une fonction).

Théorème 12 (Optimisation sous contrainte)
Soit Ω un ouvert de E, et soient $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$. On considère "l'hypersurface" :

$$X = g^{-1}(\{0\}) = \{x \in \Omega, \ g(x) = 0\}.$$

Si la restriction $f|_X$ admet un extremum local en $a \in X$ et si $dg(a) \neq 0_{\mathcal{L}(E,\mathbb{R})}$, alors

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}, \qquad df(a) = \lambda dg(a).$$

Vocabulaire
Le scalaire λ est appelé **multiplicateur de Lagrange**.

III Exemples d'équations aux dérivées partielles (EDP)

Il s'agit juste ici de donner quelques exemples et quelques méthodes de résolution.

1) Ordre 1

Vocabulaire
Résoudre sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ une **équation aux dérivées partielles** (abrégé en "EDP") d'ordre 1 en l'inconnue f, c'est déterminer toutes les fonctions $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ vérifiant une relation donnée entre f et ses dérivées partielles.

Propriété 13 (Fonctions à une dérivée nulle)
Soient I et J deux intervalles ouverts non vides de $\mathbb{R}$ et $\Omega = I \times J$ (c'est un ouvert de $\mathbb{R}^2$).

(i) Les solutions sur Ω de l'équation $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$ sont les fonctions de la forme

$$f : (x,y) \mapsto A(y) \text{ où } A \in \mathcal{C}^1(J, \mathbb{R}).$$

(ii) De même, les solutions sur Ω de $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$ sont les fonctions de la forme

$$f : (x,y) \mapsto B(x) \text{ où } B \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}).$$

2) Ordre 2

Vocabulaire
Résoudre sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ une EDP d'ordre 2, c'est déterminer toutes les fonctions $f \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$ vérifiant une relation donnée entre f et ses dérivées partielles premières et deuxièmes.

Propriété 14 (Fonctions à une dérivée seconde nulle)
Soient I et J deux intervalles ouverts non vides de $\mathbb{R}$ et $\Omega = I \times J$.
Les solutions sur Ω des équations $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 0$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0$ sont respectivement les fonctions $(x,y) \mapsto xA(y) + B(y)$, $(x,y) \mapsto yA(x) + B(x)$ et $(x,y) \mapsto A(x) + B(y)$, où A et B sont de classe $\mathcal{C}^2$.