CH19 : Calcul différentiel - aspects théoriques

Dans tout ce chapitre, E et F désigneront deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés de dimension finie, avec $\dim(E) \geq 1$, et Ω un ouvert non vide de E.
On notera en général $n = \dim(E)$, $m = \dim(F)$. Lorsqu'on munit E et F de bases, elles seront notées respectivement $\mathcal{B}_E = (e_1, \cdots, e_n)$, $\mathcal{B}_F = (e'_1, \cdots, e'_m)$.
On aura la plupart du temps en contexte une application $f : \Omega \subset E \to F$.

I Applications différentiables

1) Dérivée directionnelle

Si $f : I \to F$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide, alors f est dérivable en a ssi $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe et est finie. Cela revient à dire qu'il existe un unique vecteur de F, noté $f'(a)$, tel que :

$$\forall x \in \Omega, \qquad f(x) = f(a) + (x - a)f'(a) + (x - a)\varepsilon(x), \text{ où } \varepsilon(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0_F.$$

(voir CH.15 sur les fonctions vectorielles).

Si on envisage maintenant le cas d'une fonction **à variable vectorielle**, c'est-à-dire $f : \Omega \to F$ avec $\Omega \subset E$, alors on ne peut reprendre telle quelle ce DL_1 en a pour donner un sens à la "dérivabilité" de f en a, car l'expression $(x - a)f'(a)$ n'a plus de sens (on ne peut pas faire le "produit" de $x - a \in E$ par $f'(a) \in F$).
Pour contrer ce problème, on peut avoir envie d'essayer de se restreindre à des fonctions scalaires, pour se ramener à un cadre bien connu. D'où l'idée :

Définition 1 (Dérivée directionnelle suivant un vecteur)
Soit $f : \Omega \to F$, soit $a \in \Omega$ et $v \in E$.
On dit que f est **dérivable en a selon le vecteur v** *lorsque la fonction d'une variable réelle $t \mapsto f(a + tv)$ est dérivable en 0. On note alors*

$$D_v f(a) = \left[\frac{d}{dt}(t \mapsto f(a + tv))\right]_{t=0} = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\big(f(a + tv) - f(a)\big) \in F,$$

et on dit que $D_v f(a)$ est la **dérivée directionnelle de f en a selon v**.
Lorsqu'elle est bien définie, l'application $D_v f : \left\{ \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & F \\ a & \longmapsto & D_v f(a) \end{array} \right.$ est appelée **dérivée directionnelle de f selon v**.

Ceci est problématique car on souhaite, comme pour les fonctions scalaires, qu'une fonction dérivable soit continue. Ainsi les dérivées directionnelles ne forment pas un bon outil pour définir la dérivabilité d'une fonction à variable vectorielle. C'est pourquoi on va introduire une notion plus complexe, celle de différentielle en un point.

2) Différentiabilité en un point

Revenons au cas des fonctions à variable réelle : si $f : I \to F$ est dérivable en a (avec I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$), alors pour tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $a + h \in I$,

$$f(a + h) = f(a) + hf'(a) + h\varepsilon(h), \text{ où } \varepsilon(h) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0_F,$$

et on remarque que l'application $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & F \\ h & \longmapsto & hf'(a) \end{array} \right.$ est linéaire, donc continue puisqu'on est en dimension finie (ce qui assure $f(a + h) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} f(a)$).

On va donc exploiter ce point de vue :

$$\boxed{\text{lorsque } h \text{ est petit,} \qquad f(a+h) = \text{valeur } f(a) + \text{application linéaire en } h + \text{erreur en } o(h)},$$

c'est la grande idée du calcul différentiel, qui permet de généraliser la notion de dérivée.

Définition 2 (Application différentiable en un point)
Soit $f : \Omega \to F$ et soit $a \in \Omega$.
On dit que f est **différentiable en a** *lorsqu'il existe une application linéaire $L : E \to F$ et une application $\varepsilon : E \to F$ telle que $\varepsilon(h) \underset{h \to 0_E}{\longrightarrow} 0_F$ et pour tout $h \in E$ tel que $a + h \in \Omega$, on a*

$$f(a+h) = f(a) + L(h) + \|h\|\varepsilon(h).$$

Propriété 3 (Différentiable implique continue)
Si f est différentiable en a, alors f est continue en a.

Théorème 4 (Unicité de la différentielle et lien avec les dérivées directionnelles)
Si f est différentiable en a, alors :

- (i) *pour tout $v \in E$, $D_v f(a)$ existe et $L(v) = D_v f(a)$;*
- (ii) *l'application linéaire L est unique. On dit que L est la* **différentielle de f en a** *(ou l'***application linéaire tangente à f en a***). On note $L = df(a)$ (ou df_a), d'où la relation :*

$$\forall v \in E, \qquad df(a)(v) = D_v f(a).$$

Notation
Ainsi, lorsque f est différentiable en a, on peut écrire

$$f(a+h) = f(a) + df(a)(h) + o(h),$$

avec $df(a) \in \mathcal{L}(E, F)$.
Pour tout vecteur $h \in E$, on note en général $df(a) \cdot h$ plutôt que $df(a)(h)$ (comme on travaille en dimension finie, on peut assimiler cela à un produit matriciel). Ainsi, la formule du point (ii) se réécrit :

$$\forall v \in E, \qquad df(a) \cdot v = D_v f(a).$$

Méthode
Par contraposition, on a donc une méthode pour montrer qu'une fonction n'est pas différentiable en un point : trouver au moins un vecteur selon lequel elle n'admet pas de dérivée directionnelle en ce point !

Enfin, le résultat qui suit fait le lien explicite entre les notions de différentiabilité et de dérivabilité pour une fonction de la variable réelle :

Propriété 5 (Différentiabilité d'une fonction d'une variable réelle)
Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, soit $f : I \to F$ et $a \in I$.
Alors f est dérivable en a ssi f est différentiable en a et, lorsque c'est le cas, on a

$$f'(a) = df(a) \cdot 1,$$

et donc,

$$\forall h \in \mathbb{R}, \qquad df(a) \cdot h = hf'(a).$$

3) Différentiabilité sur un ouvert

Définition 6 (Application différentiable sur un ouvert)
On dit que $f : \Omega \to F$ est différentiable sur Ω lorsque f est différentiable en tout point de Ω.

Définition 7 (Application différentielle)
Si f est différentiable sur Ω, alors on peut définir l'application $df : \left\{ \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathcal{L}(E,F) \\ a & \longmapsto & df(a) \end{array} \right.$.
On l'appelle **différentielle de f**.

Définition 8 (Fonctions coordonnées de f dans une base de F)
Etant donnée une base $\mathcal{B}_F = (e'_1, \ldots, e'_m)$ de F et une application $f : \Omega \to F$, on appelle **fonctions coordonnées de f dans $\mathcal{B}_F$** *les applications $f_1 : \Omega \to \mathbb{R}, \cdots, f_m : \Omega \to \mathbb{R}$ définies par :*

$$\forall x \in \Omega, \qquad f(x) = \sum_{j=1}^{m} f_j(x) e'_j.$$

On pourra noter en abrégé $[f]_{\mathcal{B}_F} = (f_1, \cdots, f_m)$.

Vocabulaire
Les fonctions coordonnées $(f_1, \cdots, f_m)$ sont aussi appelées les **composantes** de f dans la base de F choisie.

Comme on l'avait déjà aperçu pour la dérivabilité des fonctions vectorielles, la différentiabilité peut être caractérisée sur les fonctions coordonnées de f.

Propriété 9 (Différentiabilité coordonnée par coordonnée)
Soit $f : \Omega \to F$ avec $m = \dim(F) \geq 1$. On note $(f_1, \ldots, f_m)$ les fonctions coordonnées de f dans une base quelconque $\mathcal{B}_F$.
Alors f est différentiable ssi $f_1, \ldots, f_m$ sont différentiables et dans ce cas :

$$\forall a \in \Omega, \qquad [df(a)]_{\mathcal{B}_F} = (df_1(a), \cdots, df_m(a)).$$

4) Dérivées partielles dans une base

Soit $\mathcal{B}_E = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. On décompose un vecteur h quelconque dans cette base : $h = \sum_{i=1}^{n} h_i e_i$. On obtient alors, si f est différentiable en un certain $a \in \Omega$:

$$df(a) \cdot h = df(a) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} h_i e_i \right) = \sum_{i=1}^{n} h_i df(a) \cdot e_i,$$

par linéarité de $df(a)$. Et donc,

$$df(a) \cdot h = \sum_{i=1}^{n} h_i D_{e_i} f(a),$$

d'après la formule qui relie différentielle en a et dérivées directionnelles en a.

$\boxed{\text{Il suffit donc de connaître les } n \text{ dérivées directionnelles } D_{e_i} f(a) \text{ pour connaître l'application } df(a).}$

Ceci justifie l'introduction de la notion suivante :

Définition 10 (Dérivées partielles en un point par rapport à une base)
Soit $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

(i) *Lorsqu'elles existent, on note $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(a)$ les dérivées directionnelles de f en a selon les vecteurs $e_1, \dots, e_n$. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on appelle $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ la* ***i-ème dérivée partielle*** *de f en a relativement à la base $\mathcal{B}_E$.*
Par définition, on a donc :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \qquad \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = D_{e_i} f(a) = \left[\frac{d}{dt}(t \mapsto f(a + te_i))\right]_{t=0} = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\big(f(a + te_i) - f(a)\big)$$

lorsque cette limite existe.

(ii) *Sous réserve d'existence, l'application $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} =: \begin{cases} \Omega & \longrightarrow & F \\ a & \longmapsto & \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) \end{cases}$ est appelée* ***i-ème fonction dérivée partielle*** *de f (relativement à la base $\mathcal{B}_E$), pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.*

Notation
On note aussi $\partial_i f(a) = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \dfrac{\partial f}{\partial e_i}(a)$ la i^e dérivée partielle de f en a.
La notation $\dfrac{\partial f}{\partial e_i}(a)$ est la plus claire car elle indique le vecteur suivant lequel on dérive f.
Mais la notation la plus utilisée est $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, il faut bien comprendre que le "x_i" est symbolique, il indique juste que l'on dérive par rapport à la i^e coordonnée, et sous-entend que les coordonnées d'un vecteur $x \in E$ dans $\mathcal{B}_E$ seront notées $(x_1, \cdots, x_n)$.

Propriété 11 (Lien entre différentielle et dérivées partielles)
Si f est différentiable en a alors les dérivées partielles de f en a relativement à toute base $\mathcal{B}_E$ existent et vérifient : $\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) = df(a) \cdot e_i$. De plus, on a l'expression :

$$\forall h \in E, \qquad df(a) \cdot h = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a),$$

où $[h]_{\mathcal{B}_E} = (h_1, \cdots, h_n)$.

Corollaire 12 (Formule de Taylor-Young à l'ordre 1)
Si f est différentiable en a, alors on a le $DL_1(a)$:

$$f(a + h) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + o(h),$$

où les $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ désignent les dérivées partielles en a dans une quelconque base de E.

5) Classe $\mathcal{C}^1$

On a la généralisation suivante du concept de classe $\mathcal{C}^1$ déjà vu pour les fonctions à variable réelle :

Définition 13 (Fonction de classe $\mathcal{C}^1$)
Une fonction $f : \Omega \to F$ est dite **de classe $\mathcal{C}^1$** *lorsqu'elle est différentiable et lorsque l'application $df : \Omega \to \mathcal{L}(E, F)$ est continue.*

Théorème 14 (Caractérisation des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$)
Une fonction $f : \Omega \to F$ est de classe $\mathcal{C}^1$ ssi ses dérivées partielles (relativement à une base quelconque de E) existent en tout point de Ω et sont continues sur Ω.

Finissons par une évidence :

Propriété 15 ($\mathcal{C}^1$ implique $\mathcal{C}^0$)
Les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sont continues.

En résumé, pour $f : \Omega \to \mathbb{R}$:

$$f \text{ de classe } \mathcal{C}^1 \implies f \text{ différentiable } \begin{cases} \implies & f \text{ continue} \\ \implies & f \text{ possède des dérivées partielles en tout point de } \Omega \end{cases},$$

(et les implications réciproques sont fausses) et

$$f \text{ de classe } \mathcal{C}^1 \iff f \text{ possède des dérivées partielles } \textbf{continues} \text{ en tout point de } \Omega.$$

6) Matrice jacobienne

En tant qu'application linéaire, la différentielle $df(a) \in \mathcal{L}(E,F)$ peut se représenter par sa matrice A dans un couple de bases. En notant $(e_1, \cdots, e_n)$ une base de E et $(e'_1, \cdots, e'_m)$ une base de F, les colonnes de cette matrice A vont être définies par

$$\forall j \in [\![1,n]\!], \qquad C_j(A) = [df(a)\cdot e_j]_{\mathcal{B}_F} = \left[\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\right]_{\mathcal{B}_F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(a) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_j}(a) \end{pmatrix}^\top$$

(en notant $(f_1, \cdots, f_m)$ les coordonnées de f dans la base $\mathcal{B}_F$ et en dérivant "coordonnée par coordonnée").

Définition 16 (Matrice jacobienne dans un couple de bases)
Soit $\mathcal{B}_E = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{B}_F = (e'_1, \cdots, e'_m)$ une base de F.
Soit $f : \Omega \to F$ une application différentiable en $a \in \Omega$.
On appelle **matrice jacobienne de f dans les bases $(\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)$** *la matrice de l'application linéaire $df(a) \in \mathcal{L}(E,F)$ dans les bases $(\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)$. On la note :*

$$Jac\, f(a) = Mat_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}\big(df(a)\big) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)_{i,j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}),$$

où $(f_1, \cdots, f_m)$ sont les coordonnées de f dans la base $\mathcal{B}_F$ et $(\frac{\partial f_i}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f_i}{\partial x_n})$ désignent les dérivées partielles des $f_i : \Omega \to \mathbb{R}$ relativement à la base $\mathcal{B}_E$.

Notation
On pourra noter plus simplement $J_f(a)$ la matrice jacobienne de f en a.

7) Gradient d'une fonction numérique

Dans ce paragraphe, les fonctions sont à valeurs dans $\mathbb{R}$ (d'où le terme "fonction numérique"), et définies sur un ouvert Ω de E, où E est un **espace euclidien** ($\mathbb{R}$-e.v. de dimension finie muni d'un produit scalaire $(\cdot|\cdot)$).

Théorème 17 (Gradient en un point)
Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ différentiable en $a \in \Omega$. Il existe un unique vecteur de E, noté $\nabla f(a)$, tel que

$$\forall h \in E, \qquad df(a)\cdot h = (\nabla f(a)|h).$$

Ce vecteur $\nabla f(a)$ est appelé **gradient de f en a**.

Propriété 18 (Expression du gradient en base orthonormée)
Soit $\mathcal{B}_E = (e_1, \cdots, e_n)$ une base orthonormée de E, et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ différentiable en $a \in \Omega$. Alors

$$[\nabla f(a)]_{\mathcal{B}_E} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right).$$

Corollaire 19 (Fonction gradient d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$)
Si $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, alors la fonction gradient $\nabla f : \left\{ \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & E \\ a & \longmapsto & \nabla f(a) \end{array} \right.$ *est continue.*

Vocabulaire
On dit que le gradient ∇f est un **champ de vecteurs** de E (nom donné aux applications $\Omega \subset E \to E$).

II Opérations sur les applications différentiables

On revient au cadre général des applications $f : \Omega \subset E \to F$, où E et F sont des $\mathbb{R}$-evn de dimension finie et Ω est un ouvert de E.

1) Combinaisons linéaires

Théorème 20 (Différentielle d'une combinaison linéaire en un point)
Soient $f : \Omega \to F$, $g : \Omega \to F$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
Si f et g sont différentiables en $a \in \Omega$, alors $\lambda f + \mu g$ aussi et

$$d(\lambda f + \mu g)(a) = \lambda df(a) + \mu dg(a).$$

Corollaire 21 (Différentielle d'une combinaison linéaire)
Si f et g sont différentiables sur Ω alors, pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda f + \mu g$ est différentiable sur Ω, avec

$$d(\lambda f + \mu g) = \lambda df + \mu dg.$$

Il s'ensuit que l'ensemble des fonctions différentiables de Ω vers F est un sous-espace vectoriel de F^Ω (les fonctions de Ω dans F).

2) Composition

G désigne ici un autre $\mathbb{R}$-evn de dimension finie.

Théorème 22 (Différentielle d'une composée en un point)
Soient Ω un ouvert de E et Ω' un ouvert de F. Soit $f : \Omega \to F$ et $g : \Omega' \to G$ telles que $f(\Omega) \subset \Omega'$.
Si f est différentiable en $a \in \Omega$ et si g est différentiable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est différentiable en a et

$$d(g \circ f)(a) = \big[dg\big(f(a)\big)\big] \circ df(a).$$

Corollaire 23 (Composition extérieure avec une fonction réelle)
Soient I un intervalle réel, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ et $\varphi : I \to \mathbb{R}$ telles que $f(\Omega) \subset I$.
Si f est différentiable en $a \in \Omega$ et si φ est dérivable en $f(a)$, alors $\varphi \circ f$ est différentiable en a et :

$$d(\varphi \circ f)(a) = \varphi'(f(a)) \times df(a)$$

(produit du nombre réel $\varphi'(f(a))$ par l'application linéaire $df(a)$).

Corollaire 24 (Dérivée le long d'un arc)
Soient I un intervalle réel, $\gamma : I \to E$ et $f : \Omega \to F$ telles que $\gamma(I) \subset \Omega$.
Si γ est dérivable en $t_0 \in I$ et si f est différentiable en $\gamma(t_0)$, alors $f \circ \gamma$ est dérivable en t_0 et

$$(f \circ \gamma)'(t_0) = df\big(\gamma(t_0)\big) \cdot \gamma'(t_0).$$

Corollaire 25 (Dérivée le long d'un arc tracé dans $\mathbb{R}^n$)
On suppose que $E = \mathbb{R}^n$. Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$, soit $f : \Omega \to F$, soient $x_1 : I \to \mathbb{R}, \cdots, x_n : I \to \mathbb{R}$, où I est un intervalle réel.
On suppose que $\big(x_1(t), \dots, x_n(t)\big) \in \Omega$ pour tout $t \in I$.
Soit $g : I \to F$ définie par

$$g(t) = f\big(x_1(t), \dots, x_n(t)\big).$$

Si les x_i sont dérivables en $t_0 \in I$ et si f est différentiable en $\big(x_1(t_0), \dots, x_n(t_0)\big)$, alors g est dérivable en t_0 et

$$\begin{aligned} g'(t_0) &= x_1'(t_0)\frac{\partial f}{\partial x_1}\big(x_1(t_0), \dots, x_n(t_0)\big) + \cdots + x_n'(t_0)\frac{\partial f}{\partial x_n}\big(x_1(t_0), \dots, x_n(t_0)\big) \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i'(t_0)\frac{\partial f}{\partial x_i}\big(x_1(t_0), \dots, x_n(t_0)\big), \end{aligned}$$

où les $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ désignent les dérivées partielles de f relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

3) Composition bilinéaire, multilinéaire, produit

On a déjà vu que toute application linéaire $L : E \to F$ est différentiable et

$$\forall a \in E, \qquad dL(a) = L.$$

Pour les applications bilinéaires, la situation est un peu plus compliquée :

Théorème 26 (Différentielle d'une application bilinéaire)
Soient F, G, H trois $\mathbb{R}$-evn de dimension finie, et $B : F \times G \to H$ une application bilinéaire. Alors B est différentiable et

$$\forall (a,b) \in F \times G, \qquad dB(a,b) : \left\{ \begin{array}{ccc} F \times G & \longrightarrow & H \\ (u,v) & \longmapsto & B(u,b) + B(a,v) \end{array} \right. .$$

Symboliquement, on peut écrire

$$\forall (a,b) \in F \times G, \qquad dB(a,b) = B(\cdot, b) + B(a, \cdot).$$

On peut généraliser :

Théorème 27 (Différentielle d'une application multilinéaire)
Soient $F_1, \cdots, F_p, G$ des $\mathbb{R}$-evn de dimension finie, et $M : F_1 \times \cdots \times F_p \to G$ une application multilinéaire. Alors M est différentiable et pour tout $(a_1, \cdots, a_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p$:

$$dM(a_1, \cdots, a_p) : \left\{ \begin{array}{ccc} F_1 \times \cdots \times F_p & \longrightarrow & G \\ (u_1, \cdots, u_p) & \longmapsto & M(u_1, a_2, \cdots, a_p) + \cdots + M(a_1, \cdots, a_{p-1}, u_p) \end{array} \right. .$$

Corollaire 28 (Différentielle d'une composition multilinéaire)
Soient $f_1 : \Omega \to F_1, \cdots, f_p : \Omega \to F_p$ des applications différentiables en $a \in \Omega$ (ouvert de E).
Soit $M : F_1 \times \cdots \times F_p \to G$ une application multilinéaire.
Alors, l'application

$$M(f_1, \cdots, f_p) : \left\{ \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & M(f_1(x), \cdots, f_p(x)) \end{array} \right. ,$$

est différentiable en a, et

$$d(M(f_1, \cdots, f_p))(a) : h \mapsto M(df_1(a) \cdot h, f_2(a), \cdots, f_p(a)) + \cdots + M(f_1(a), \cdots, f_{p-1}(a), df_p(a) \cdot h).$$

Corollaire 29 (Différentielle d'un produit)
Soient $f, g : \Omega \to F$. Si F est une $\mathbb{R}$-algèbre de dimension finie et si f et g sont différentiables en $a \in \Omega$, alors $f \times g : \Omega \to F$ est différentiable en a et

$$d(fg)(a) : h \mapsto (df(a) \cdot h) \times g(a) + f(a) \times (dg(a) \cdot h),$$

qu'on peut abréger en

$$d(fg)(a) = df(a) \times g(a) + f(a) \times dg(a).$$

Ainsi le produit de deux fonctions différentiables est différentiables, et l'ensemble des fonctions différentiables de Ω vers F est une sous-algèbre de F^Ω.

4) Opérations sur les dérivées partielles

Vu qu'une dérivée partielle est une dérivée "classique" (i.e. une dérivée de fonction d'une variable réelle), on dispose directement de formules pour les dérivées partielles d'une somme, d'un produit, etc. (en reprenant les formules de dérivation du CH.15 sur les fonctions vectorielles), et ce même si les fonctions en jeu ne sont pas différentiables.

Théorème 30 (Dérivées partielles d'une combinaison linéaire)
Soient $f, g : \Omega \to F$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
Si f et g admettent des dérivées partielles en $a \in \Omega$, alors $\lambda f + \mu g$ aussi et

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \qquad \partial_i(\lambda f + \mu g)(a) = \lambda \partial_i f(a) + \mu \partial_i g(a).$$

Théorème 31 (Dérivées partielles d'une composition bilinéaire)
Soient F, G et H trois $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie, $f : \Omega \to F$, $g : \Omega \to G$ et $B : F \times G \to H$ une application bilinéaire.
Si f et g admettent des dérivées partielles en $a \in \Omega$, alors $B(f, g)$ aussi et

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \qquad \partial_i\big(B(f, g)\big)(a) = B\big(\partial_i f(a), g(a)\big) + B\big(f(a), \partial_i g(a)\big).$$

Corollaire 32 (Dérivées partielles d'un produit)
Soient $f, g : \Omega \to F$. Si F est une $\mathbb{R}$-algèbre et si f et g admettent des dérivées partielles en a, alors $f \times g$ aussi et

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \qquad \partial_i(fg)(a) = \big(\partial_i f(a)\big) \times g(a) + f(a) \times \big(\partial_i g(a)\big).$$

Lorsqu'on compose deux applications différentiables, on peut exprimer simplement les dérivées partielles de $g \circ f$ en fonction de celles de g et de f. C'est l'objet du résultat suivant :

Théorème 33 (Règle de la chaîne)
Soient Ω un ouvert de E et Ω' un ouvert de F. Soit $f : \Omega \to F$ et $g : \Omega' \to G$ telles que $f(\Omega) \subset \Omega'$.
On munit E d'une base $\mathcal{B}_E = (e_1, \cdots, e_n)$ et F d'une base $\mathcal{B}_F = (e'_1, \cdots, e'_m)$.
Si f est différentiable en $a \in \Omega$ et si g est différentiable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est différentiable en a, donc admet des dérivées partielles en a (relativement à la base $\mathcal{B}_E$), et :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \qquad \partial_i(g \circ f)(a) = \sum_{k=1}^{m} \partial_i f_k(a) \times \partial_k g\big(f(a)\big),$$

c'est-à-dire

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \qquad \frac{\partial(g \circ f)}{\partial e_i}(a) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f_k}{\partial e_i}(a) \times \frac{\partial g}{\partial e'_k}(f(a)),$$

où $(f_1, \cdots, f_m)$ désignent les fonctions coordonnées de f dans la base $\mathcal{B}_F$.

Corollaire 34 (Règle de la chaîne pour une composée $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$)
Soient $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $g : \Omega' \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ avec $f(\Omega) \subset \Omega'$.
Notons $(f_1, \cdots, f_m)$ les composantes de f.
Si f est différentiable en $a \in \Omega$, si g est différentiable en $f(a)$, alors les dérivées partielles de

$$g \circ f : \left\{ \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, \cdots, x_n) & \longmapsto & g\left(\underbrace{f_1(x_1, \cdots, x_n)}_{=y_1}, \cdots, \underbrace{f_m(x_1, \cdots, x_n)}_{=y_m}\right) \end{array} \right.$$

en $a = (a_1, \cdots, a_n)$ valent :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \qquad \frac{\partial (g \circ f)}{\partial x_i}(a) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(a) \times \frac{\partial g}{\partial y_k}(f(a)).$$

5) Formule d'intégration

Théorème 35 (Intégration le long d'un arc)
Soit $f : \Omega \to F$ *de classe* $\mathcal{C}^1$ *et* $\gamma : [0,1] \to \Omega$ *un arc paramétré ("chemin") de classe* $\mathcal{C}^1$*, d'extrémités* $\gamma(0) = a$ *et* $\gamma(1) = b$*. Alors* $f(b) - f(a) = \displaystyle\int_0^1 df\big(\gamma(t)\big) \cdot \gamma'(t)dt$.

Corollaire 36 (Caractérisation des fonctions constantes)
Si Ω *est un ouvert connexe par arcs et si* $f : \Omega \to F$ *est de classe* $\mathcal{C}^1$*, alors* f *est constante si et seulement si* $df : \Omega \to \mathcal{L}(E, F)$ *est identiquement nulle.*

III Classe d'une fonction

1) Dérivées partielles successives

Définition 37 (Dérivées partielles d'ordre k)
Soit $f : \Omega \to F$ et $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.
Par convention, on dit que f est la dérivée partielle d'ordre 0 de f.
Pour $k \in \mathbb{N}$, lorsqu'elles existent, on appelle ***dérivées partielles d'ordre*** *$k+1$ de f relativement à la base $\mathcal{B}_E$ les dérivées partielles des dérivées partielles d'ordre k de f.*

Notation
Si on note $x_1, \cdots, x_n$ les coordonnées dans la base $\mathcal{B}_E$ de la variable $x \in \Omega$, on note :

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}} = \partial_{i_1}(\cdots(\partial_{i_k} f)\cdots).$$

2) Classe $\mathcal{C}^k$

Définition 38 (Fonction de classe $\mathcal{C}^k$)
Soit $k \in \mathbb{N}$. On dit que $f : \Omega \to F$ est **de classe $\mathcal{C}^k$** *lorsque ses dérivées partielles d'ordre k relativement à une base quelconque de E existent et sont continues.*
On dit que f est **de classe $\mathcal{C}^\infty$** *lorsqu'elle est de classe $\mathcal{C}^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.*

Propriété 39 ($\mathcal{C}^{k+1} \subset \mathcal{C}^k$)
Toute fonction de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ est de classe $\mathcal{C}^k$.

3) Opérations sur les applications de classe $\mathcal{C}^k$

Dans tout ce paragraphe, $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

Théorème 40 (Structure d'espace vectoriel de $\mathcal{C}^k$.)
Soient $f, g : \Omega \to F$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^k$, alors $\lambda f + \mu g$ aussi.
Donc, l'ensemble $\mathcal{C}^k(\Omega, F)$ des applications de classe $\mathcal{C}^k$ de Ω vers F est un sous-espace vectoriel de F^Ω.

Théorème 41 (Composition bilinéaire de fonctions $\mathcal{C}^k$)
Soient $f : \Omega \to F$, $g : \Omega \to G$ et $B : F \times G \to H$ bilinéaire.
Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^k$, alors $B(f, g)$ aussi.

Corollaire 42 (Structure de $\mathbb{R}$-algèbre des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$)
Si F est une $\mathbb{R}$-algèbre, alors l'ensemble $\mathcal{C}^k(\Omega, F)$ est une sous-algèbre de F^Ω.

Théorème 43 (Composée de fonctions $\mathcal{C}^k$)
Soient $f : \Omega \to F$, $g : \Omega' \to G$, où Ω' est un ouvert de F tel que $f(\Omega) \subset \Omega'$.
Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^k$, alors $g \circ f$ aussi.

Et on a enfin le critère classique et bien utile :

Théorème 44 (Classe $\mathcal{C}^k$ par composantes)
Soit $f : \Omega \to F$. Alors f est de classe $\mathcal{C}^k$ ssi les fonctions coordonnées de f dans une base quelconque de F sont de classe $\mathcal{C}^k$.

4) Théorème de Schwarz

Théorème 45 (Théorème de Schwarz)
Si $f : \Omega \to F$ est de classe $\mathcal{C}^2$, alors les dérivées partielles secondes relativement à une quelconque base de E vérifient :

$$\forall (i,j) \in \{1, \dots, n\}^2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.$$