CH17 : Espaces probabilisés

En MP2I, nous avions étudié les probabilités sur un univers fini. Nous allons ici généraliser ces notions aux univers quelconques.

I Espace probabilisable

1) Univers

Définition 1 (Univers, éventualités)
L'ensemble des résultats possibles décrivant une expérience aléatoire est appelé **univers***. On le note généralement* Ω*.*
Les éléments $\omega \in \Omega$ *sont les issues observées de l'expérience aléatoire, on les appelle* **éventualités***.*

2) Tribu

En MP2I, nous avons vu que dans le cas d'un univers fini, les événements se représentent par des parties de Ω. L'ensemble des événements peut donc être assimilé à $\mathcal{P}(\Omega)$.
Dans le cas général, il n'en est pas ainsi : toute partie de Ω ne représentera pas nécessairement un événement : on se limitera à certaines parties de Ω, donc à un sous-ensemble de $\mathcal{P}(\Omega)$.

Notation
Etant donné un ensemble Ω, le complémentaire d'une partie $A \subset \Omega$ sera noté :

$$\overline{A} = \{\omega \in \Omega,\ \omega \notin A\}$$

(on trouve aussi la notation A^c).
De même, étant données deux parties $A, B \subset \Omega$, on notera

$$A \setminus B = \{\omega \in \Omega,\ \omega \in A \text{ et } \omega \notin B\} = A \cap \overline{B}.$$

Attention, cela ne suppose pas nécessairement que $B \subset A$!

Définition 2 (Tribu)
On appelle **tribu** *sur un ensemble* Ω *toute partie* $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ *telle que :*

- *(i)* $\Omega \in \mathcal{A}$ *;*
- *(ii)* $\forall A \in \mathcal{A},\ \overline{A} \in \mathcal{A}$ *(stabilité par passage au complémentaire).*
- *(iii)* $\forall (A_n) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}},\ \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathcal{A}$ *(stabilité par réunion dénombrable).*

Propriété 3 (Propriétés d'une tribu)
Si $\mathcal{A}$ *est une tribu sur un ensemble* Ω*, alors*

- *(i)* $\emptyset \in \mathcal{A}$ *;*
- *(ii)* $\forall (A, B) \in \mathcal{A}^2,\ A \cup B \in \mathcal{A},\ A \cap B \in \mathcal{A}$ *et* $A \setminus B \in \mathcal{A}$*.*
- *(iii)* $\forall (A_n) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}},\ \bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathcal{A}$*.*

Définition 4 (Espace probabilisable)
On appelle **espace probabilisable** *tout couple* $(\Omega, \mathcal{A})$ *constitué d'un ensemble* Ω *et d'une tribu* $\mathcal{A}$ *sur* Ω*.*

3) Evénements

Définition 5 (Evénements)
Si $(\Omega, \mathcal{A})$ *est un espace probabilisable, les parties* $A \in \mathcal{A}$ *sont appelées les* **événements** *de l'univers* Ω*.*

Vocabulaire

Rappelons le vocabulaire classique des événéments en probabilités. Etant donné un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$:

- $\emptyset$ est appelé **événement impossible** ;
- Ω est appelé **événement certain** ;
- Les événements singletons $\{\omega\}$ sont appelés **événements élémentaires** ;
- Le complémentaire $\overline{A}$ est appelé **événement contraire de** A ;
- L'événement $A \cap B$ est appelé **intersection** des événements A et B ;
- L'événément $A \cup B$ est appelé **réunion** des événements A et B ;
- On dit que **l'événement $\boldsymbol{A}$ implique l'événement $\boldsymbol{B}$** lorsque $A \subset B$;
- On dit que deux événements A et B sont **incompatibles** (ou **disjoints**) lorsque $A \cap B = \emptyset$, ce qui signifie que A et B ne peuvent pas se réaliser en même temps.

II Probabilités

$(\Omega, \mathcal{A})$ désigne un espace probabilisable.

1) Définition

Définition 6 (Probabilité sur un espace probabilisable)
On appelle **probabilité sur $(\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\mathcal{A}})$** *toute application $\mathbb{P} : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^+$ vérifiant :*

(i) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;

(ii) *pour toute suite $(A_n) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ d'événements deux à deux incompatibles (c'est-à-dire tels que $n \neq m \implies A_n \cap A_m = \emptyset$) :*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

(propriété de σ-additivité)

Vocabulaire
On dit aussi **mesure de probabilité**.

Définition 7 (Espace probabilisé)
On appelle **espace probabilisé** *tout triplet $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, où Ω est un ensemble, $\mathcal{A}$ est une tribu sur Ω et $\mathbb{P} : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^+$ une probabilité.*

2) Propriétés élémentaires

Propriété 8 (Premières propriétés)
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Alors :

(i) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$;

(ii) *Si $A_0, \cdots, A_n$ sont des événements deux à deux incompatibles, alors*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(A_k);$$

(iii) *pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$;*

(iv) *pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\mathbb{P}(A) \in [0, 1]$.*

Propriété 9 (Croissance et probabilité d'une réunion)
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et A, B deux événements. Alors :

(i) $A \subset B \implies \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.

(ii) $\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

(iii) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

Corollaire 10 (Sous-additivité finie)
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Si $A_0, \cdots, A_n$ sont des événements, alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) \leq \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(A_k).$$

3) Continuité monotone

On fixe $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Théorème 11 (Continuité croissante)
Si $(B_n) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ *est une suite croissante d'événements (i.e.* $B_n \subset B_{n+1}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*), alors*

$$\mathbb{P}(B_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} B_k\right).$$

Corollaire 12 (Limite d'une réunion)
Si $(A_n) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ *est une suite quelconque d'événements, alors*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right).$$

Corollaire 13 (Sous σ-additivité)
Si $(A_n) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ *est une suite quelconque d'événements, alors dans* $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$*, on a :*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

Théorème 14 (Continuité décroissante)
Si $(B_n) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ *est une suite décroissante d'événements (i.e.* $B_{n+1} \subset B_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*), alors*

$$\mathbb{P}(B_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} B_k\right).$$

Corollaire 15 (Limite d'une intersection)
Si $(A_n) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ *est une suite quelconque d'événements, alors*

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k\right).$$

4) Evénements négligeables, presque sûrs

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ désigne toujours un espace probabilisé.

Définition 16 (Evénement négligeable, presque sûr)
Un événement $A \in \mathcal{A}$ *est dit* **négligeable** *lorsque* $\mathbb{P}(A) = 0$, **presque sûr** *lorsque* $\mathbb{P}(A) = 1$.

Propriété 17 (Propriétés des événements négligeables et presque sûrs)
A *et* B *désignent deux événements de la tribu* $\mathcal{A}$.

- (i) *Si* $A \subset B$ *et si* B *est négligeable, alors* A *est négligeable.*
- (ii) *Une réunion finie ou dénombrable d'événements négligeables est un événement négligeable.*
- (iii) *Si* $A \subset B$ *et si* A *est presque sûr, alors* B *est presque sûr.*
- (iv) *Une intersection finie ou dénombrable d'événements presque sûrs est un événement presque sûr.*

5) Probabilités sur un univers au plus dénombrable

Dans cette section, Ω est un univers **fini ou dénombrable**. On le munit de la tribu $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.

Définition 18 (Probabilités élémentaires)
Soit $\mathbb{P}$ *une probabilité sur* $(\Omega, \mathcal{A})$*. On appelle* **probabilités élémentaires** *la famille de réels*

$$(p_\omega)_{\omega\in\Omega} = (\mathbb{P}(\{\omega\}))_{\omega\in\Omega}.$$

Propriété 19 (Propriétés des probabilités élémentaires)
La famille $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$ *est une famille de réels positifs, sommable et de somme égale à* 1.

Vocabulaire
On dit alors que $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$ est une **distribution de probabilités discrètes sur** Ω.

Théorème 20 (Détermination d'une probabilité sur un univers au plus dénombrable)
Soit $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$ *une famille de réels positifs, sommable et de somme égale à* 1. *Alors, il existe une unique probabilité* $\mathbb{P}$ *sur* $(\Omega, \mathcal{A})$ *telle que*

$$\forall \omega \in \Omega, \qquad \mathbb{P}(\{\omega\}) = p_\omega.$$

De plus, celle-ci est donnée par :

$$\forall A \in \mathcal{A}, \qquad \mathbb{P}(A) = \sum_{\omega\in A} p_\omega.$$

Vocabulaire
On parle alors d'**espace probabilisé discret** $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$.

III Probabilités conditionnelles

On fixe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, où Ω est un univers quelconque, non nécessairement dénombrable.

1) Définition

Définition 21 (Probabilité conditionnelle de A sachant B)
Soient A et B deux événements.
Si $\mathbb{P}(B) \neq 0$, on définit la **probabilité de A sachant B** *par* $\mathbb{P}_B(A) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$.
On la note aussi $\mathbb{P}(A|B)$.

Propriété 22 (Toute probabilité conditionnelle est une probabilité)
Si on a $\mathbb{P}(B) \neq 0$, alors l'application

$$\mathbb{P}_B : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ A & \longmapsto & \mathbb{P}_B(A) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \end{array} \right.$$

est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

2) Formule des probabilités composées

Théorème 23 (Formule des probabilités composées)
Soient $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ (avec $n \geq 2$) t.q. $\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0$. Alors :

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}_{A_1}(A_2) \times \mathbb{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \dots \times \mathbb{P}_{\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i}(A_n).$$

3) Formule des probabilités totales

Définition 24 (Système complet d'événements, système quasi-complet d'événements)
Soit $(E_i)_{i \in I}$ une famille d'événements (avec I fini ou dénombrable). On dit que :

(i) $(E_i)_{i \in I}$ *est un* **système complet d'événements** *(en abrégé SCE) lorsque les E_i sont deux à deux incompatibles et $\bigcup_{i \in I} E_i = \Omega$.*

(ii) $(E_i)_{i \in I}$ *est un* **système quasi-complet d'événements** *(en abrégé SQCE) lorsque les E_i sont deux à deux incompatibles et $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i \in I} E_i\right) = 1$.*

Théorème 25 (Formule des probabilités totales)
Soit $(E_i)_{i \in I}$ un système complet (ou quasi-complet) d'événements (I fini ou dénombrable).

(i) Pour tout $A \in \mathcal{A}$:
$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A \cap E_i).$$

(ii) Si de plus $\mathbb{P}(E_i) \neq 0$ pour tout $i \in I$, alors pour tout $A \in \mathcal{A}$:
$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}_{E_i}(A) \times \mathbb{P}(E_i).$$

4) Formules de Bayes

Propriété 26 (Première formule de Bayes)
Soit $A, B \in \mathcal{A}$ avec $\mathbb{P}(A) \neq 0$ et $\mathbb{P}(B) \neq 0$. Alors $\mathbb{P}_B(A) = \dfrac{\mathbb{P}_A(B)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$.

Corollaire 27 (Seconde formule de Bayes)
Si $(A_i)_{i\in I}$ est un système quasi-complet d'événements tel que $\forall i \in I$, $\mathbb{P}(A_i) \neq 0$, alors :

$$\forall B \in \mathcal{A},\ \forall j \in I, \quad \mathbb{P}_B(A_j) = \frac{\mathbb{P}_{A_j}(B)\mathbb{P}(A_j)}{\sum\limits_{i\in I} \mathbb{P}_{A_i}(B)\mathbb{P}(A_i)}.$$

IV Indépendance d'événements

On fixe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1) Couples d'événements indépendants

Définition 28 (Indépendance de deux événements)
On dit que deux événements A et B sont **indépendants** *lorsque* $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$.

Propriété 29 (Indépendance et complémentaire)
Soient A et B deux événements. Alors on a équivalence entre :

(*i*) *A et B sont indépendants.*

(*ii*) *A et $\overline{B}$ sont indépendants.*

(*iii*) *$\overline{A}$ et B sont indépendants.*

(*iv*) *$\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.*

2) Familles d'événements indépendants

Définition 30 (Indépendance d'une famille d'événements)
On dit que les événements d'une famille $(A_i)_{i\in I}$ sont **indépendants** *lorsque pour toute partie* **finie** *J de I :*

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right) = \prod_{j\in J} \mathbb{P}(A_j).$$

Vocabulaire
On dit aussi que les événements $(A_i)_{i\in I}$ sont **mutuellement indépendants**.

Propriété 31 (Sous-famille d'une famille d'événements indépendants)
Toute sous-famille d'une famille d'événements indépendants est elle-même constituée d'événements indépendants.

Propriété 32 (Indépendance et complémentaires)
Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'événements. Pour chaque $i \in I$, on pose $B_i = A_i$ ou $\overline{A_i}$.
Si la famille $(A_i)_{i\in I}$ est constituée d'événements indépendants, alors la famille $(B_i)_{i\in I}$ aussi.