CH17 : Espaces probabilisés

Table des matières

En MP2I, nous avions étudié les probabilités sur un univers fini. Nous allons ici généraliser ces notions aux univers quelconques.

I Espace probabilisable

1) Univers

Définition 1 (Univers, éventualités)
L'ensemble des résultats possibles décrivant une expérience aléatoire est appelé **univers**. *On le note généralement* Ω.
Les éléments $\omega \in \Omega$ *sont les issues observées de l'expérience aléatoire, on les appelle* **éventualités**.

Remarque
Avec ce formalisme, réaliser l'expérience aléatoire revient à choisir un ω *dans* Ω.

Exemple (Jeu de pile ou face)
Si l'on s'intéresse au résultat obtenu lors du lancer d'une pièce, on a un univers fini à deux éléments : $\Omega = \{P, F\}$.

Exemple (Lancer de deux dés)
Si l'on s'intéresse au résultat obtenu lors du lancer simultané de deux dés (un rouge et un bleu), alors l'univers Ω est l'ensemble des couples (a, b), où a (le résultat du dé rouge) et b (celui du bleu) varient entre 1 et 6 :

$$\Omega = [\![1, 6]\!]^2 = \{(1,1),(1,2),\cdots,(1,6),(2,1),\cdots,(6,6)\}$$

(ici, Ω est fini à $6^2 = 36$ éléments).

Exemple (Tirage de deux boules dans une urne)
Soit une urne contenant 1 boule blanche et 4 boules rouges

- On tire successivement deux boules **avec remise** et on note les couleurs obtenues.
  Un univers bien adapté est l'ensemble
  $$\Omega_1 = \{(B,B),(B,R),(R,B),(R,R)\}$$
  formé de 4 issues (ici, l'ordre d'apparition des couleurs compte).
- On tire successivement deux boules **sans remise** et on note les couleurs obtenues.
  Cette fois, l'univers
  $$\Omega_2 = \{(B,R),(R,B),(R,R)\}$$
  est mieux adapté, car l'issue (B,B) est impossible.
- On tire **simultanément** deux boules et on note les couleurs obtenues.
  Cette fois, on peut se contenter d'un univers encore plus petit :
  $$\Omega_3 = \{\{B,R\},\{R,R\}\}$$
  (puisque l'ordre d'apparition des boules ne compte plus, il n'y a plus besoin de considérer des couples, des parties suffisent).

Bien entendu, l'univers Ω_1 est "le plus fin", il peut convenir aux trois situations, mais il n'est pas optimal pour les deux dernières (il y aura des situations redondantes).

Remarque
Le choix de l'univers Ω *dépend de la modélisation choisie pour l'expérience aléatoire. Il ne doit pas être trop petit pour pouvoir étudier toutes les issues souhaitées, et pas trop grand pour ne pas prendre en compte des phénomènes inutiles.*

Exemple (Lancer d'un dé jusqu'à obtenir le premier "6")
Si l'on s'intéresse à la suite des résultats obtenus lorsqu'on lance un dé jusqu'à obtenir un "6", alors l'univers Ω est l'ensemble des suites finies $(a_1, \cdots, a_n)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = 6$ et $a_1, \cdots, a_{n-1} \in \{1, \cdots, 5\}$. Cet univers est infini mais dénombrable, puisque $\Omega = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}^*} \Omega_n$, avec

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \Omega_n = [\![1,5]\!]^{n-1} \times \{6\},$$

et chaque Ω_n est fini de cardinal 5^{n-1}, donc Ω est dénombrable en tant que réunion dénombrable d'ensembles finis.

Exemple (Pile ou Face infini)
Si on s'intéresse à la suite des résutats obtenus lors d'une infinité de lancers de la même pièce, on considère l'univers $\Omega = \{P, F\}^{\mathbb{N}^*}$ (suites binaires), qui au passage est infini et non dénombrable (voir la section du CH.1 sur la dénombrabilité).

ATTENTION !
Nous n'avons pas encore parlé de probabilité ! Par exemple, dans le cas du tirage des deux boules dans l'urne, on se doute bien qu'en fonction de la composition de l'urne, les différentes éventualités n'ont pas toutes la même "chance" de se produire.

2) Tribu

En MP2I, nous avons vu que dans le cas d'un univers fini, les événements se représentent par des parties de Ω. L'ensemble des événements peut donc être assimilé à $\mathcal{P}(\Omega)$.
Dans le cas général, il n'en est pas ainsi : toute partie de Ω ne représentera pas nécessairement un événement : on se limitera à certaines parties de Ω, donc à un sous-ensemble de $\mathcal{P}(\Omega)$.

Notation
Etant donné un ensemble Ω, le complémentaire d'une partie $A \subset \Omega$ sera noté :

$$\overline{A} = \{\omega \in \Omega,\ \omega \notin A\}$$

(on trouve aussi la notation A^c).
De même, étant données deux parties $A, B \subset \Omega$, on notera

$$A \setminus B = \{\omega \in \Omega,\ \omega \in A \text{ et } \omega \notin B\} = A \cap \overline{B}.$$

Attention, cela ne suppose pas nécessairement que $B \subset A$!

Définition 2 (Tribu)
On appelle **tribu** *sur un ensemble Ω toute partie $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ telle que :*

(i) $\Omega \in \mathcal{A}$;

(ii) $\forall A \in \mathcal{A}$, $\overline{A} \in \mathcal{A}$ *(stabilité par passage au complémentaire).*

(iii) $\forall (A_n) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$, $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathcal{A}$ *(stabilité par réunion dénombrable).*

Exemple
- $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu sur Ω (la plus grande possible).
- $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega\}$ est une tribu sur Ω (la plus petite possible).
- Pour toute partie $A \subset \Omega$, $\mathcal{A} = \{\emptyset, A, \overline{A}, \Omega\}$ est une tribu sur Ω.

Propriété 3 (Propriétés d'une tribu)
Si $\mathcal{A}$ est une tribu sur un ensemble Ω, alors

(i) $\emptyset \in \mathcal{A}$;

(ii) $\forall (A, B) \in \mathcal{A}^2$, $A \cup B \in \mathcal{A}$, $A \cap B \in \mathcal{A}$ *et* $A \setminus B \in \mathcal{A}$.

(iii) $\forall (A_n) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$, $\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Remarque
Une tribu est donc stable par passage au complémentaire, par réunion et intersection finie ou dénombrable.

Preuve

(i) $\Omega \in \mathcal{A}$ donc $\emptyset = \overline{\Omega} \in \mathcal{A}$.

(ii) Posons $A_0 = A$, $A_n = B$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Tous les A_n sont dans $\mathcal{A}$, donc

$$A \cup B = \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathcal{A}.$$

De plus, $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont dans $\mathcal{A}$, donc par le point précédent $\overline{A} \cup \overline{B} \in \mathcal{A}$, c'est-à-dire $\overline{A \cap B} \in \mathcal{A}$, ce qui implique (en repassant au complémentaire) que $A \cap B \in \mathcal{A}$.
Enfin, il s'ensuit également que $A \setminus B = A \cap \overline{B}$ est dans $\mathcal{A}$ (en tant qu'intersection de deux événements de $\mathcal{A}$).

(iii) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\overline{A_n} \in \mathcal{A}$, donc

$$\overline{\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n} = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \overline{A_n} \in \mathcal{A},$$

et en repassant au complémentaire, $\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Définition 4 (Espace probabilisable)
On appelle **espace probabilisable** *tout couple* $(\Omega, \mathcal{A})$ *constitué d'un ensemble* Ω *et d'une tribu* $\mathcal{A}$ *sur* Ω.

Exemple
Pour tout ensemble Ω, $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ est un espace probabilisable.

3) Evénements

Définition 5 (Evénements)
Si $(\Omega, \mathcal{A})$ *est un espace probabilisable, les parties* $A \in \mathcal{A}$ *sont appelées les* **événements** *de l'univers* Ω.

Exemple
Lancer d'un dé :

$$\Omega = \{1, \cdots, 6\}, \qquad \mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega).$$

L'événement $A = \{2, 4, 6\}$ traduit "on tire un nombre pair".

Remarque
Lorsque Ω *est fini ou dénombrable, la tribu choisie sera en général* $\mathcal{P}(\Omega)$, *donc toutes les parties de* Ω *seront considérées comme des événements.*
Lorsque Ω *est infini indénombrable, ce ne sera plus le cas.*

Vocabulaire
Rappelons le vocabulaire classique des événements en probabilités. Etant donné un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$:

- $\emptyset$ est appelé **événement impossible** ;
- Ω est appelé **événement certain** ;
- Les événements singletons $\{\omega\}$ sont appelés **événements élémentaires** ;
- Le complémentaire $\overline{A}$ est appelé **événement contraire de** A ;
- L'événement $A \cap B$ est appelé **intersection** des événements A et B ;

- L'événément $A \cup B$ est appelé **réunion** des événements A et B ;
- On dit que **l'événement A implique l'événement B** lorsque $A \subset B$;
- On dit que deux événements A et B sont **incompatibles** (ou **disjoints**) lorsque $A \cap B = \emptyset$, ce qui signifie que A et B ne peuvent pas se réaliser en même temps.

Exemple (Réunion et intersection dénombrable d'événements)
Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ une suite d'événements d'un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$.

- L'événement $\bigcap\limits_{n=0}^{+\infty} A_n$ correspond à la réalisation de tous les A_n en même temps :
$$\omega \in \bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n \iff \forall n \in \mathbb{N},\ \omega \in A_n.$$
- L'événement $\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n$ correspond à la réalisation d'au moins un des A_n :
$$\omega \in \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \iff \exists n \in \mathbb{N},\ \omega \in A_n.$$

Exemple (Limite inf, limite sup d'événéments)

- L'événement $\bigcup\limits_{N=0}^{+\infty} \bigcap\limits_{n=N}^{+\infty} A_n$ (parfois noté $\liminf\limits_{N\to\infty} A_N$) est réalisé si et seulement si tous les A_n **à partir d'un certain rang** sont réalisés :
$$\omega \in \bigcup_{N=0}^{+\infty} \bigcap_{n=N}^{+\infty} A_n \iff \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ \omega \in A_n.$$
Attention, bien comprendre que le "certain rang" N dépend de la réalisation aléatoire ω.
- L'événement $\bigcap\limits_{N=0}^{+\infty} \bigcup\limits_{n=N}^{+\infty} A_n$ (parfois noté $\limsup\limits_{N\to+\infty} A_N$) est réalisé si et seulement si **une infinité** de A_n sont réalisés :
$$\omega \in \bigcap_{N=0}^{+\infty} \bigcup_{n=N}^{+\infty} A_n \iff \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \geq N,\ \omega \in A_n.$$
Là aussi, l'infinité de A_n réalisée dépend de ω.

Notons que ces deux événements sont bien dans la tribu $\mathcal{A}$ car tous les A_n le sont. De plus, on a l'inclusion
$$\bigcup_{N=0}^{+\infty} \bigcap_{n=N}^{+\infty} A_n \subset \bigcap_{N=0}^{+\infty} \bigcup_{n=N}^{+\infty} A_n$$
car "à partir d'un certain rang" est une condition plus forte que "une infinité de fois".

II Probabilités

$(\Omega, \mathcal{A})$ désigne un espace probabilisable.

1) Définition

Définition 6 (Probabilité sur un espace probabilisable)
On appelle **probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$** *toute application* $\mathbb{P} : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^+$ *vérifiant :*

(*i*) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ *;*

(*ii*) *pour toute suite* $(A_n) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ *d'événements deux à deux incompatibles (c'est-à-dire tels que* $n \neq m \implies A_n \cap A_m = \emptyset$*) :*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

(propriété de σ-additivité)

Vocabulaire
On dit aussi **mesure de probabilité**.

Remarque
La définition sous-entend la **convergence** *de la série* $\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(A_n)$ *pour toute suite* $(A_n) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ *d'événements deux à deux incompatibles, puisque* $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$ *est un réel positif par définition de* $\mathbb{P}$.
En d'autres termes, la famille de réels positifs $(\mathbb{P}(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *est* **sommable** *dès que les* (A_n) *sont deux à deux incompatibles.*

Exemple (Probabilité uniforme)
Probabilité uniforme (appelée aussi "équiprobabilité") sur un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$:

$$\mathbb{P} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ A & \longmapsto & \dfrac{Card(A)}{Card(\Omega)} \end{array} \right. .$$

Vérifier qu'il s'agit bien d'une probabilité.

Exemple (Masse de Dirac)
Masse de Dirac en un point $\omega \in \Omega$ sur un espace probabilisé quelconque $(\Omega, \mathcal{A})$:

$$\delta_\omega : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ A & \longmapsto & \delta_\omega(A) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{si } \omega \notin A \end{array} \right. \end{array} \right. .$$

Vérifier qu'il s'agit bien d'une probabilité.

Définition 7 (Espace probabilisé)
On appelle **espace probabilisé** *tout triplet* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$*, où* Ω *est un ensemble,* $\mathcal{A}$ *est une tribu sur* Ω *et* $\mathbb{P} : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^+$ *une probabilité.*

2) Propriétés élémentaires

Propriété 8 (Premières propriétés)
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Alors :

(i) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$;

(ii) *Si $A_0, \cdots, A_n$ sont des événements deux à deux incompatibles, alors*
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(A_k);$$

(iii) *pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$;*

(iv) *pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\mathbb{P}(A) \in [0, 1]$.*

Preuve

(i) Posons $A_0 = \Omega$ et $A_n = \emptyset$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Les (A_n) sont deux à deux incompatibles et $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n = \Omega$, donc par σ-additivité :
$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(\Omega) + \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\emptyset),$$
donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\emptyset) = 0$, ce qui implique $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ (puisque la série est à termes positifs).

(ii) On pose $A_k = \emptyset$ pour $k \geq n+1$. Dès lors, les $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont deux à deux incompatibles (puisque $A_0, \cdots, A_n$ le sont déjà), ce qui entraîne :
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(A_k),$$
puisque $\mathbb{P}(A_k) = 0$ pour $k > n$ (d'après (i)).

(iii) On a $\Omega = A \cup \overline{A}$ (réunion disjointe) donc d'après (ii) :
$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\overline{A}).$$

(iv) Par positivité de $\mathbb{P}$ et par le point (iii), on a $\mathbb{P}(\overline{A}) \geq 0$, c'est-à-dire $1 - \mathbb{P}(A) \geq 0$, ce qui donne finalement $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$.

Remarque

- *Ainsi, on a $\mathbb{P} : \mathcal{A} \to [0, 1]$ d'après (iv).*
- *Il résulte de la propriété (ii) et de la σ-additivité que pour toute famille $(A_i)_{i\in I}$* **finie ou dénombrable** *d'événements deux à deux incompatibles, on a $(\mathbb{P}(A_i))_{i\in I}$ sommable et*
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A_i).$$
En effet, il existe une réindexation des A_i par $[\![1, n]\!]$ ou $\mathbb{N}$ (selon que I soit fini ou dénombrable) qui donne une somme finie, donc la sommabilité de $(\mathbb{P}(A_i))_{i\in I}$ est acquise par positivité des $\mathbb{P}(A_i)$ (cf. chapitre 1 sur les séries et la sommabilité).

Propriété 9 (Croissance et probabilité d'une réunion)
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et A, B deux événements. Alors :

(i) $A \subset B \implies \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.

(ii) $\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

(iii) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

Preuve

(i) Puisque $A \subset B$, on a $B = A \cup (B \setminus A)$ (réunion disjointe), donc par additivité finie de $\mathbb{P}$:

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A) \geq \mathbb{P}(A),$$

puisque $\mathbb{P}(B \setminus A) \geq 0$ par positivité de $\mathbb{P}$.

(ii) Idem en utilisant la décomposition disjointe :

$$A = (A \cap B) \cup (A \setminus B)$$

(iii) Enfin, on a la réunion disjointe

$$A \cup B = (A \setminus B) \cup B,$$

donc $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A \setminus B) + \mathbb{P}(B)$, et on conclut avec le point (ii).

ATTENTION !
La formule $\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B)$ est fausse en général ! Elle est vraie si $B \subset A$.

Corollaire 10 (Sous-additivité finie)
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Si $A_0, \cdots, A_n$ sont des événements, alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) \leq \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(A_k).$$

Preuve
Récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. L'inégalité est évidente pour $n = 0$, c'est une égalité.
Pour $n = 1$, l'inégalité est vraie par le point (iii) de la prop. précédente.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons l'inégalité vraie pour une famille de $n + 1$ événements, et montrons qu'elle reste vraie pour $n + 2$ évéments, notés $A_0, \cdots, A_n, A_{n+1}$. On a

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n+1} A_k\right) = \mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) \cup A_{n+1}\right) \leq \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) + \mathbb{P}(A_{n+1})$$

(par le cas $n = 1$), puis avec l'hypothèse de récurrence :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n+1} A_k\right) \leq \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(A_k) + \mathbb{P}(A_{n+1}) = \sum_{k=0}^{n+1} \mathbb{P}(A_k).$$

Remarque (Formule du crible (HP))
On a en fait une formule qui exprime la probabilité d'une réunion quelconque d'événements :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k})$$

(formule du crible).
Pour trois événements, cette formule s'écrit :

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) - \mathbb{P}(A_2 \cap A_3) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3).$$

3) Continuité monotone

On fixe $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Théorème 11 (Continuité croissante)
Si $(B_n) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'événements (i.e. $B_n \subset B_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$), alors

$$\mathbb{P}(B_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} B_k\right).$$

Preuve
La croissance de la suite (B_n) permet de réécrire la réunion croissante $\bigcup\limits_{k=0}^{+\infty} B_k$ comme une réunion disjointe :

$$\bigcup_{k=0}^{+\infty} B_k = \bigcup_{k=0}^{+\infty} C_k,$$

avec

$$C_0 = B_0, \qquad \forall k \in \mathbb{N}^*,\ C_k = B_k \setminus B_{k-1}$$

(faire un dessin). Les (C_k) sont deux à deux incompatibles, donc

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} B_k\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} C_k\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(C_k).$$

En outre, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons, toujours par croissance de (B_k) :

$$B_n = \bigcup_{k=0}^{n} B_k = \bigcup_{k=0}^{n} C_k,$$

donc par disjonction des (C_k) :

$$\mathbb{P}(B_n) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(C_k) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(C_k) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} B_k\right).$$

Corollaire 12 (Limite d'une réunion)
Si $(A_n) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ est une suite quelconque d'événements, alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right).$$

Preuve
Il suffit d'utiliser le théorème précédent avec la suite des réunions partielles (B_n), définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad B_n = \bigcup_{k=0}^{n} A_k.$$

Cette suite (B_n) est bien croissante au sens de l'inclusion, donc d'après le théorème de continuité croissante :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) = \mathbb{P}(B_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} B_k\right).$$

Mais $\bigcup\limits_{k=0}^{+\infty} B_k = \bigcup\limits_{k=0}^{+\infty}\left(\bigcup\limits_{l=0}^{k} A_l\right) = \bigcup\limits_{k=0}^{+\infty} A_k$, d'où la conclusion.

Corollaire 13 (Sous σ-additivité)
Si $(A_n) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ est une suite quelconque d'événements, alors dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

Remarque

- *Cette inégalité n'est évidemment utile que si $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) < 1$, puisqu'on a déjà $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leq 1$.*

- *En combinant ce résultat avec la sous-additivité finie (cf. corollaire 10), on obtient que pour toute famille d'événéments* $(A_i)_{i\in I}$ **finie ou dénombrable**, *on a dans* $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ *:*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \leq \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A_i).$$

Preuve
On suppose $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) < +\infty$ (sinon, l'inégalité est triviale).
Par sous-additivité finie (cf. prop. 10), on a déjà

$$\forall N \in \mathbb{N}, \qquad \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{N} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{N} \mathbb{P}(A_n) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n),$$

qui est un majorant indépendant de N (car les termes de la série sont positifs). Par le corollaire précédent, on peut passer à la limite lorsque $N \to +\infty$ dans cette inégalité, pour obtenir :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{N} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

Théorème 14 (Continuité décroissante)
Si $(B_n) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ *est une suite décroissante d'événements (i.e.* $B_{n+1} \subset B_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*), alors*

$$\mathbb{P}(B_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} B_k\right).$$

Preuve
Appliquer le théorème de continuité croissante à la suite $(B'_n) = (\overline{B_n})$:

$$\mathbb{P}(B'_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} B'_k\right),$$

donc

$$\mathbb{P}(B_n) = 1 - \mathbb{P}(B'_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} B'_k\right) = \mathbb{P}\left(\overline{\bigcup_{k=0}^{+\infty} B'_k}\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} B_k\right)$$

Corollaire 15 (Limite d'une intersection)
Si $(A_n) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ *est une suite quelconque d'événements, alors*

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k\right).$$

Preuve
Il suffit d'utiliser le théorème précédent avec la suite des intersections partielles (B_n), définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad B_n = \bigcap_{k=0}^{n} A_k.$$

Cette suite (B_n) est bien décroissante au sens de l'inclusion, donc d'après le théorème de continuité décroissante :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right) = \mathbb{P}(B_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} B_k\right).$$

Mais $\displaystyle\bigcap_{k=0}^{+\infty} B_k = \bigcap_{k=0}^{+\infty}\left(\bigcap_{l=0}^{k} A_l\right) = \bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k$, d'où la conclusion.

4) Evénements négligeables, presque sûrs

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ désigne toujours un espace probabilisé.

Définition 16 (Evénement négligeable, presque sûr)
Un événement $A \in \mathcal{A}$ est dit **négligeable** *lorsque* $\mathbb{P}(A) = 0$, **presque sûr** *lorsque* $\mathbb{P}(A) = 1$.

Exemple
L'événement impossible $\emptyset$ est négligeable, mais ce n'est pas toujours le seul (par exemple, si on lance indéfiniment un dé équilibré, alors on peut montrer que l'événement "ne jamais obtenir six" est négligeable, voir les exemples de la section suivante pour les détails).

Remarque
A est presque sûr si et seulement si $\overline{A}$ est négligeable.

ATTENTION !
A proprement parler, "négligeable" ne signifie donc pas "impossible" ! (et "presque sûr" ne signifie pas "certain").

Propriété 17 (Propriétés des événements négligeables et presque sûrs)
A et B désignent deux événements de la tribu $\mathcal{A}$.

(*i*) *Si $A \subset B$ et si B est négligeable, alors A est négligeable.*

(*ii*) *Une réunion finie ou dénombrable d'événements négligeables est un événement négligeable.*

(*iii*) *Si $A \subset B$ et si A est presque sûr, alors B est presque sûr.*

(*iv*) *Une intersection finie ou dénombrable d'événements presque sûrs est un événement presque sûr.*

Preuve

(*i*) $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$, donc $\mathbb{P}(B) = 0$ implique $\mathbb{P}(A) = 0$.

(*ii*) Si $(A_i)_{i \in I}$ est une famille finie ou dénombrable d'événements négligeables, alors par sous-σ-additivité :
$$0 \leq \mathbb{P}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \leq \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i) = \sum_{i \in I} 0 = 0,$$
donc $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = 0$.

(*iii*) $1 \geq \mathbb{P}(B) \geq \mathbb{P}(A)$, donc $\mathbb{P}(A) = 1$ implique $\mathbb{P}(B) = 1$.

(*iv*) Si $(A_i)_{i \in I}$ est une famille finie ou dénombrable d'événements presque sûrs, alors puisque les $(\overline{A_i})$ sont négligeables, on obtient :
$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{i \in I} \overline{A_i}\right) = 1 - 0 = 1.$$

5) Probabilités sur un univers au plus dénombrable

Dans cette section, Ω est un univers **fini ou dénombrable**. On le munit de la tribu $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.

Définition 18 (Probabilités élémentaires)
Soit $\mathbb{P}$ une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$. On appelle **probabilités élémentaires** *la famille de réels*
$$(p_\omega)_{\omega \in \Omega} = (\mathbb{P}(\{\omega\}))_{\omega \in \Omega}.$$

Propriété 19 (Propriétés des probabilités élémentaires)
La famille $(p_\omega)_{\omega \in \Omega}$ est une famille de réels positifs, sommable et de somme égale à 1.

Preuve
Evident par σ-additivité de $\mathbb{P}$ en considérant la réunion disjointe $\Omega = \bigcup\limits_{\omega \in \Omega} \{\omega\}$.

Vocabulaire
On dit alors que $(p_\omega)_{\omega \in \Omega}$ est une **distribution de probabilités discrètes sur** Ω.

Théorème 20 (Détermination d'une probabilité sur un univers au plus dénombrable)
Soit $(p_\omega)_{\omega \in \Omega}$ une famille de réels positifs, sommable et de somme égale à 1. Alors, il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{A})$ telle que

$$\forall \omega \in \Omega, \qquad \mathbb{P}(\{\omega\}) = p_\omega.$$

De plus, celle-ci est donnée par :

$$\forall A \in \mathcal{A}, \qquad \mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} p_\omega.$$

Vocabulaire
On parle alors d'**espace probabilisé discret** $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$.

Preuve
Si $\mathbb{P}$ existe, alors pour tout événement $A \in \mathcal{A}$, on a $A = \bigcup\limits_{\omega \in A} \{\omega\}$ (réunion disjointe finie ou dénombrable, puisque Ω est fini ou dénombrable), donc par σ-additivité :

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\{\omega\}) = \sum_{\omega \in A} p_\omega,$$

ce qui montre l'unicité de $\mathbb{P}$.
Il reste à montrer que l'application $\mathbb{P} : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^+$ définie par $\forall A \in \mathcal{A},\ \mathbb{P}(A) = \sum\limits_{\omega \in A} p_\omega$ est bien une probabilité. On a $\mathbb{P}(\Omega) = \sum\limits_{\omega \in \Omega} p_\omega = 1$ (par hypothèse), et pour toute famille $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'événéments deux à deux disjoints, on a par sommation par paquets :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{\omega \in \bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n} p_\omega = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{\omega \in A_n} p_\omega\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n),$$

d'où le résultat voulu.

Remarque

- *Ainsi, à l'aide des distributions de probabilités discrètes $(p_\omega)_{\omega \in \Omega}$, on décrit* **toutes** *les probabilités possibles sur un univers Ω au plus dénombrable.*
- *Lorsque Ω est un univers infini non dénombrable (comme $\mathbb{R}$ par exemple), alors on peut encore construire des probabilités sur $\mathcal{P}(\Omega)$ par ce procédé, mais dans ce cas, la sommabilité de la famille $(p_\omega)_{\omega \in \Omega}$ va imposer que l'ensemble $\{\omega \in \Omega,\ p_\omega \neq 0\}$, appelé* **support** *de la distribution de probabilités discrète, est* **au plus dénombrable** *(voir chapitre 1).*
  Mais cela ne décrit pas toutes les probabilités sur Ω, il en existe bien d'autres, notamment les probabilités "à densité" (comme la "loi exponentielle", ou la "loi normale"). Ces types de probabilités, hors programme en CPGE scientifiques (mais au programme de la filière ECG), sont définies par des intégrales.

Exemple (Loi uniforme)
La probabilité uniforme sur un univers fini Ω est la probabilité donnée par :

$$\forall k \in \Omega, \qquad p_k = \frac{1}{Card(\Omega)}.$$

Exemple (Loi binomiale)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $p \in [0,1]$.
La **loi binomiale de paramètres (n,p)** sur $\Omega = \{0, \cdots, n\}$ est la probabilité donnée par :

$$\forall k \in \{0, \cdots, n\}, \qquad p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Pour $n = 1$, on retrouve la **loi de Bernoulli de paramètre p** sur $\Omega = \{0, 1\}$:

$$p_0 = 1 - p, \qquad p_1 = p.$$

Exemple (Loi géométrique)
Etant donné $p \in]0,1[$, la **loi géométrique de paramètre p** est la probabilité sur $\Omega = \mathbb{N}^*$ donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad p_k = (1-p)^{k-1} p.$$

Exemple (Loi de Poisson)
Etant donné $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, la **loi de Poisson de paramètre λ** est la probabilité sur $\Omega = \mathbb{N}$ donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad p_k = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Remarque

- *Dans chacun de ces 4 exemples, bien vérifier que les (p_k) sont positifs et de somme égale à 1 !*
- *Ces lois apparaissent naturellement dans certains types d'expériences aléatoires (voir le chapitre suivant sur les variables aléatoires discrètes, où on les décrira plus en détail).*

III Probabilités conditionnelles

On fixe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, où Ω est un univers quelconque, non nécessairement dénombrable.

1) Définition

Définition 21 (Probabilité conditionnelle de A sachant B)
Soient A et B deux événements.
Si $\mathbb{P}(B) \neq 0$, on définit la **probabilité de A sachant B** *par* $\mathbb{P}_B(A) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$.
On la note aussi $\mathbb{P}(A|B)$.

Remarque
Concrètement, $\mathbb{P}_B(A)$ est la probabilité que A se produise sachant que B s'est produit.

ATTENTION !
La notation $\mathbb{P}(A|B)$ est déconseillée car elle pourrait laisser entendre (à tort) que "$A|B$" est un événement, alors qu'il n'en est rien.
Au contraire, la notation $\mathbb{P}_B(A)$ suggère que c'est l'événement A que l'on mesure, pour une "autre" probabilité $\mathbb{P}_B$, et c'est bien le cas, comme on va le voir ci-après.

Exemple (Deux lancers consécutifs d'une pièce)
On lance deux fois consécutivement une pièce équilibrée.

1. *Quelle est la probabilité que les deux lancers donnent Face sachant que le premier est Face ?*
2. *Et sachant qu'au moins l'un des deux est Face ?*

On pose $\Omega = \{(P,P), (P,F), (F,P), (F,F)\}$, muni de l'équiprobabilité.
On considère les événements :

- A : "les deux lancers donnent *Face*". On a $A = \{(F,F)\}$.
- B : "le premier lancer donne *Face*". On a $B = \{(F,F), (F,P)\}$.
- C : "au moins un des deux lancers donne *Face*". On a $C = \{(F,F), (F,P), (P,F)\}$.

1. On obtient :
$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{1/4}{2/4} = \frac{1}{2}.$$
2. On obtient :
$$\mathbb{P}_C(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap C)}{\mathbb{P}(C)} = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(C)} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}.$$

Ces résultats sont intuitifs.

Propriété 22 (Toute probabilité conditionnelle est une probabilité)
Si on a $\mathbb{P}(B) \neq 0$, alors l'application
$$\mathbb{P}_B : \begin{cases} \mathcal{A} & \longrightarrow \quad \mathbb{R}^+ \\ A & \longmapsto \quad \mathbb{P}_B(A) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \end{cases}$$
est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

Preuve

- $\mathbb{P}_B$ est bien définie et à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.
- On a $\mathbb{P}_B(\Omega) = \dfrac{\mathbb{P}(\Omega \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \dfrac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = 1$, vu que $B \subset \Omega$, ce qui implique $\Omega \cap B = B$.

- Soient $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements deux à deux incompatibles. Alors $(A_n\cap B)_{n\in\mathbb{N}}$ est également une suite d'événements deux à deux incompatibles. On en déduit :

$$\mathbb{P}_B\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right)=\frac{\mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right)\cap B\right)}{\mathbb{P}(B)}=\frac{\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty}(A_n\cap B)\right)}{\mathbb{P}(B)}=\frac{\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(A_n\cap B)}{\mathbb{P}(B)}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\mathbb{P}(A_n\cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$
$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}_B(A_n).$$

Remarque

- *Pour une probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_B$, tout événement A tel que $B\subset A$ est de probabilité 1, puisque dans ce cas, $A\cap B=B$, donc $\mathbb{P}_B(A)=\frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)}=1$. C'est normal, la réalisation de B rend dans ce cas l'événement A certain.*
- *De même, tout événement A incompatible avec B est bien sûr de probabilité 0 pour $\mathbb{P}_B$.*
- *On a $\mathbb{P}_\Omega=\mathbb{P}$.*

2) Formule des probabilités composées

Théorème 23 (Formule des probabilités composées)
Soient $A_1,\dots,A_n\in\mathcal{A}$ (avec $n\geq 2$) t.q. $\mathbb{P}(A_1\cap\cdots\cap A_{n-1})\neq 0$. Alors :

$$\mathbb{P}(A_1\cap\cdots\cap A_n)=\mathbb{P}(A_1)\times\mathbb{P}_{A_1}(A_2)\times\mathbb{P}_{A_1\cap A_2}(A_3)\times\cdots\times\mathbb{P}_{\bigcap_{i=1}^{n-1}A_i}(A_n).$$

Preuve

- Déjà, notons que toutes les probabilités conditionnelles intervenant dans cette formule sont bien définies car on a
$$(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_{n-1})\subset(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_i)$$
pour tout $i\in\{1,\dots,n-1\}$, et donc
$$\mathbb{P}(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_i)\geq\mathbb{P}(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_{n-1})>0,$$
ce qui assure que $\mathbb{P}(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_i)\neq 0$ pour tout $1\leq i\leq n-1$.
- Montrons la formule par récurrence sur n :
  * Elle est évidente pour $n=2$ d'après la définition d'une probabilité conditionnelle :
  $$\mathbb{P}_{A_1}(A_2)=\frac{\mathbb{P}(A_2\cap A_1)}{\mathbb{P}(A_1)}=\frac{\mathbb{P}(A_1\cap A_2)}{\mathbb{P}(A_1)},$$
  (si $\mathbb{P}(A_1)\neq 0$) donc
  $$\mathbb{P}(A_1\cap A_2)=\mathbb{P}(A_1)\times\mathbb{P}_{A_1}(A_2).$$
  * Soit $n\geq 2$. Supposons la formule vraie pour n événements $A_1,\cdots,A_n$ tels que $\mathbb{P}(A_1\cap\cdots\cap A_{n-1})\neq 0$ et montrons-la pour $n+1$ événements $A_1,\cdots,A_{n+1}$ tels que $\mathbb{P}(A_1\cap\cdots\cap A_n)\neq 0$. Par associativité de l'intersection, on a, en posant $B=A_1\cap\cdots\cap A_n$:
  $$P(A_1\cap\cdots\cap A_{n+1})=\mathbb{P}(B\cap A_{n+1})=\mathbb{P}(B)\times\mathbb{P}_B(A_{n+1}).$$
  On peut alors appliquer l'hypothèse de récurrence : puisque $B\subset(A_1\cap\cdots\cap A_{n-1})$, on a $\mathbb{P}(A_1\cap\cdots\cap A_{n-1})\neq 0$, donc
  $$\mathbb{P}(B)=\mathbb{P}(A_1)\times\prod_{k=2}^{n}\mathbb{P}_{\bigcap_{i=1}^{k-1}A_i}(A_k),$$
  ce qui entraîne
  $$\mathbb{P}(A_1\cap\cdots\cap A_{n+1})=\mathbb{P}(A_1)\times\left(\prod_{k=2}^{n}\mathbb{P}_{\bigcap_{i=1}^{k-1}A_i}(A_k)\right)\times\mathbb{P}_{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}(A_{n+1})=\mathbb{P}(A_1)\times\prod_{k=2}^{n+1}\mathbb{P}_{\bigcap_{i=1}^{k-1}A_i}(A_k),$$
  ce qui montre l'hérédité.

Remarque (Interprétation sur un arbre)
La formule des probabilités composées dit que la probabilité d'un chemin dans un arbre est le produit des probabilités des branches.

Exemple (Tirage de 4 cartes sans remise)
On considère les tirages de 4 cartes sans remise dans un jeu de 52 cartes.
Calculer la probabilité de tirer les 4 as.

1. **Première méthode** : Puisque les 4 tirages se font sans remise, on peut prendre pour univers Ω l'ensemble des listes de 4 cartes distinctes que l'on peut former à partir de l'ensemble des 52 cartes (cela revient aux applications injectives $\{1,2,3,4\} \to \{1,\cdots,52\}$). On a $Card(\Omega) = 52 \times 51 \times 50 \times 49$.
   On munit cet univers de l'équiprobabilité $\mathbb{P}$.
   L'événement A : "tirer les 4 as" correspond alors aux 4! listes obtenues par permutation des 4 as, donc
   $$\mathbb{P}(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)} = \frac{4!}{52 \times 51 \times 50 \times 49}.$$
2. **Deuxième méthode** : On peut supposer que les 4 cartes sont tirées simultanément (ce qui revient à ne plus tenir compte de l'ordre des tirages), et cela ne change rien, car les tirages se faisaient sans remise. Dans ce cas, l'univers Ω est l'ensemble des parties à 4 éléments d'un ensemble à 52 éléments (des "mains" de 4 cartes). On a donc $Card(\Omega) = \binom{52}{4}$.
   On munit cet univers de l'équiprobabilité $\mathbb{P}$.
   L'événement A : "tirer les 4 as" correspond alors à une seule main, donc
   $$\mathbb{P}(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)} = \frac{1}{\binom{52}{4}} = \frac{4!}{52 \times 51 \times 50 \times 49}.$$
3. **Troisième méthode** : Sans préciser l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ sur lequel on travaille, on peut utiliser la formule des probabilités composées : si on note A_i l'événement "la i-ième carte tirée est un as", alors ce que l'on cherche est
   $$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(A_2)\mathbb{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3)\mathbb{P}_{A_1 \cap A_2 \cap A_3}(A_4) = \frac{4}{52} \times \frac{3}{51} \times \frac{2}{50} \times \frac{1}{49}.$$

Exemple (Tirage sans remise de n boules)
Une urne contient n boules blanches et n boules noires, toutes indiscernables.
On tire successivement et sans remise n boules dans cette urne.
Calculer la probabilité de l'événement E : "on tire au moins une boule blanche".

1. **Première méthode** : On assimile l'expérience à des tirages simultanés et on compte les "combinaisons" de n boules parmi $2n$ (c'est-à-dire que l'on ne tient pas compte de l'ordre). L'univers Ω est donc l'ensemble des parties à n éléments d'un ensemble à $2n$ éléments, et
   $$Card(\Omega) = \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$
   L'événement contraire $\overline{E}$ ("on tire n boules noires") est alors un événement élémentaire : c'est la partie composée des n boules noires. D'où par équiprobabilité $\mathbb{P}(\overline{E}) = \frac{1}{\binom{2n}{n}}$, et donc
   $$\mathbb{P}(E) = 1 - \frac{1}{\binom{2n}{n}} = 1 - \frac{(n!)^2}{(2n)!}.$$
2. **Seconde méthode** : On tient compte de l'ordre des tirages.
   On note alors A_k l'événement : "la k^e boule tirée est noire". On a
   $$\overline{E} = \bigcap_{k=1}^{n} A_k.$$

Or $\mathbb{P}(A_1) = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}_{A_1\cap\cdots\cap A_{k-1}}(A_k) = \frac{n-(k-1)}{2n-(k-1)}$ d'où, par la formule des probabilités composées,

$$\mathbb{P}(\overline{E}) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = \frac{n}{2n} \times \frac{n-1}{2n-1} \times \cdots \times \frac{1}{n+1} = \frac{(n!)^2}{(2n)!},$$

et on retrouve bien

$$\mathbb{P}(E) = 1 - \frac{(n!)^2}{(2n)!}.$$

Exemple (Tirages successifs avec modification de l'urne)
Une urne contient une boule blanche et une boule rouge. On tire successivement des boules dans cette urne. A chaque boule tirée, on note la couleur de celle-ci et on la remet dans l'urne accompagnée d'une boule de même couleur. Montrons qu'il est presque sûr que la boule rouge initiale sera tirée.

On note A_n l'événement "la boule tirée au n^e tirage est blanche". Par probabilités composées :

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(A_2)\cdots\mathbb{P}_{A_1\cap\cdots\cap A_{n-1}}(A_n) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \cdots \times \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$

Par continuité décroissante :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = 0,$$

donc l'événement $\bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k$: "tirer indéfiniment des boules blanches" est négligeable, ce qui montre que son complémentaire "tirer la boule rouge initiale" est presque sûr.

3) Formule des probabilités totales

Définition 24 (Système complet d'événements, système quasi-complet d'événements)
Soit $(E_i)_{i\in I}$ une famille d'événements (avec I fini ou dénombrable). On dit que :

- (i) *$(E_i)_{i\in I}$ est un* **système complet d'événements** *(en abrégé SCE) lorsque les E_i sont deux à deux incompatibles et $\bigcup_{i\in I} E_i = \Omega$.*
- (ii) *$(E_i)_{i\in I}$ est un* **système quasi-complet d'événements** *(en abrégé SQCE) lorsque les E_i sont deux à deux incompatibles et $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i\in I} E_i\right) = 1$.*

ATTENTION !
Eviter d'employer le terme "partition" pour un SCE car dans une partition, on suppose de plus que tous les ensembles E_i sont non vides, ce qui n'est pas le cas ici.

Remarque
Tout SCE est un SQCE, puisque $\mathbb{P}(\Omega) = 1$. Mais la réciproque est fausse lorsqu'il existe des événements A presque sûrs mais non certains (i.e. $\mathbb{P}(A) = 1$ avec $A \subsetneq \Omega$).

Exemple (Les événements élémentaires forment un système complet)
Si $\Omega = \{\omega_i,\ i \in I\}$ est fini ou dénombrable, alors les singletons $(\{\omega_i\})_{i\in I}$ forment un système complet d'événements (tout ensemble Ω est réunion de ses singletons, et ceux-ci sont deux à deux disjoints).

ATTENTION !
Si $(E_i)_{i\in I}$ est un système quasi-complet d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, alors on a $\sum_{i\in I} \mathbb{P}(E_i) = 1$ mais **la réciproque est fausse** ! En effet, l'égalité $\sum_{i\in I} \mathbb{P}(E_i) = 1$ n'implique pas l'incompatibilité deux à deux des E_i.

Théorème 25 (Formule des probabilités totales)
Soit $(E_i)_{i\in I}$ un système complet (ou quasi-complet) d'événements (I fini ou dénombrable).

(i) Pour tout $A \in \mathcal{A}$:

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A \cap E_i).$$

(ii) Si de plus $\mathbb{P}(E_i) \neq 0$ pour tout $i \in I$, alors pour tout $A \in \mathcal{A}$:

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}_{E_i}(A) \times \mathbb{P}(E_i).$$

Preuve
Supposons que $(E_i)_{i\in I}$ est un système quasi-complet d'événements (le cas le plus général).
On a alors, en notant $N = \overline{\bigcup_{i\in I} E_i}$, l'égalité $\mathbb{P}(N) = 0$. Ainsi $A = A \cap \Omega = (A \cap N) \cup (\bigcup_{i\in I} (A \cap E_i))$ (et cette réunion est disjointe), d'où par additivité :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap N) + \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A \cap E_i) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A \cap E_i),$$

(puisque $(A \cap N) \subset N$, donc $\mathbb{P}(A \cap N) = 0$).
Si de plus les $\mathbb{P}(E_i)$ sont non nulles, ceci se réécrit :

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i\in I} \frac{\mathbb{P}(A \cap E_i)}{\mathbb{P}(E_i)} \times \mathbb{P}(E_i) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}_{E_i}(A) \times \mathbb{P}(E_i).$$

Remarque (Interprétation sur un arbre)
Ce théorème correspond simplement au fait de calculer une probabilité par une disjonction de cas pertinente !
De manière équivalente, il dit dans le cas fini que la probabilité d'un événement A dans un arbre est la somme des probabilités des chemins qui mènent à A.

Exemple (Un dé et une urne)
Une urne contient une boule rouge. Un joueur lance un dé équilibré. S'il obtient un six, alors il pioche dans l'urne et s'arrête. Sinon, il rajoute une boule blanche dans l'urne et relance le dé, etc.

1. *Montrer qu'il est presque sûr que le joueur piochera une boule.*
2. *Quelle est la probabilité que cette boule piochée soit rouge ?*

Solution :

1. Soit S_n l'événement "le joueur obtient six au n^e lancer". L'événement "le joueur pioche" est $\bigcup_{n=1}^{+\infty} S_n$, donc par continuité décroissante :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} S_n\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} \overline{S_n}\right) = 1 - \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(\overline{S_1} \cap \cdots \cap \overline{S_n}).$$

Par la formule des probabilités composées :

$$\mathbb{P}(\overline{S_1} \cap \cdots \cap \overline{S_n}) = \mathbb{P}(\overline{S_1})\mathbb{P}_{\overline{S_1}}(\overline{S_2}) \cdots \mathbb{P}_{\overline{S_1}\cap\cdots\cap\overline{S_{n-1}}}(\overline{S_n}) = (5/6)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

ce qui montre bien que l'événement $\bigcup_{n=1}^{+\infty} S_n$: "obtenir au moins un six" est de probabilité 1.

Remarque
Ici, on observe que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\mathbb{P}(\overline{S_1} \cap \cdots \cap \overline{S_n}) = \mathbb{P}(\overline{S_1}) \times \cdots \times \mathbb{P}(\overline{S_n}) = (5/6)^n$.
Cela vient du fait que les lancers successifs d'un même dé sont indépendants. La notion d'indépendance d'événements fait l'objet de la dernière section.

2. Notons R "la boule piochée est rouge" et A_n "le joueur fait sa (seule) pioche au n^e tirage". On a les $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui forment un système quasi-complet d'événements (ils sont clairement deux à deux incompatibles, et leur réunion est presque sûre d'après la première question) de probabilités non nulles, donc d'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(R) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}_{A_n}(R) \times \mathbb{P}(A_n).$$

Vu que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(\overline{S_1} \cap \cdots \cap \overline{S_{n-1}} \cap S_n) = (5/6)^{n-1} * (1/6), \qquad \mathbb{P}_{A_n}(R) = \frac{1}{n},$$

on en déduit :

$$\mathbb{P}(R) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}(5/6)^{n-1} * (1/6) = \frac{\ln(6)}{5}$$

(en utilisant les DSE connus).

4) Formules de Bayes

Propriété 26 (Première formule de Bayes)
Soit $A, B \in \mathcal{A}$ avec $\mathbb{P}(A) \neq 0$ et $\mathbb{P}(B) \neq 0$. Alors $\mathbb{P}_B(A) = \dfrac{\mathbb{P}_A(B)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$.

Preuve
$\mathbb{P}_B(A) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \dfrac{\mathbb{P}_A(B)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$.

Corollaire 27 (Seconde formule de Bayes)
Si $(A_i)_{i\in I}$ est un système quasi-complet d'événements tel que $\forall i \in I$, $\mathbb{P}(A_i) \neq 0$, alors :

$$\forall B \in \mathcal{A},\ \forall j \in I, \quad \mathbb{P}_B(A_j) = \frac{\mathbb{P}_{A_j}(B)\mathbb{P}(A_j)}{\sum\limits_{i\in I} \mathbb{P}_{A_i}(B)\mathbb{P}(A_i)}.$$

Preuve
S'obtient à partir de la relation précédente en réécrivant le dénominateur :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}_{A_i}(B)\mathbb{P}(A_i)$$

à l'aide de la formule des probabilités totales.

Remarque
Les formules de Bayes sont utiles pour les raisonnements "rétroactifs", où l'on cherche la probabilité d'une cause sachant une conséquence donnée.

Exemple
Une urne contient deux dés, un équilibré, et l'autre qui donne systématiquement six.
On choisit au hasard un dé dans l'urne et on le lance. On suppose que l'on obtient six.
Quelle est la probabilité que ce six vienne du dé équilibré ?

Solution : on obtient 1/7.

IV Indépendance d'événements

On fixe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1) Couples d'événements indépendants

Définition 28 (Indépendance de deux événements)
On dit que deux événements A et B sont **indépendants** *lorsque* $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$.

Remarque

- *Lorsque $\mathbb{P}(B) \neq 0$, A et B sont indépendants ssi $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_B(A)$, c'est-à-dire que $\mathbb{P}(A)$ ne dépend pas de la réalisation ou non de l'événement B.*
- *Un événement négligeable est indépendant de tout événement, car si $\mathbb{P}(A) = 0$, alors pour tout $B \in \mathcal{A}$, $\mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(A) = 0$, donc $\mathbb{P}(A \cap B) = 0 = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.*
- *Un événement A est indépendant de lui-même si et seulement si il est négligeable ou presque sûr (en effet : $\mathbb{P}(A \cap A) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(A) \iff \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A)^2 \iff \mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$).*

ATTENTION !
L'indépendance n'a rien à voir avec l'incompatibilité !
Par exemple, si A et B sont incompatibles et de probabilité non nulle, alors ils ne sont pas indépendants.
L'incompatibilité est une notion purement ensembliste (intersection vide), alors que la notion d'indépendance est reliée à une probabilité $\mathbb{P}$.

Exemple (Tirages avec/sans remise)
On tire successivement et AVEC remise deux boules dans une urne contenant 5 boules blanches et 2 boules rouges. Les événements B_1 : "la première boule tirée est blanche" et B_2 : "la seconde boule tirée est blanche" sont indépendants. En revanche, si les tirages se font SANS remise, alors ces deux événements ne sont plus indépendants. En effet :

- s'il y a remise entre les deux tirages, on a
$$\mathbb{P}_{B_1}(B_2) = \mathbb{P}(B_2) = \mathbb{P}(B_1) = \frac{5}{7},$$
donc B_1 et B_2 sont indépendants.
- s'il n'y a pas remise entre les deux tirages, on a
$$\mathbb{P}_{B_1}(B_2) = \frac{4}{6},$$
alors que
$$\mathbb{P}(B_2) = \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}_{B_1}(B_2) + \mathbb{P}(\overline{B_1})\mathbb{P}_{\overline{B_1}}(B_2) = \frac{5}{7} \times \frac{4}{6} + \frac{2}{7} \times \frac{5}{6} = \frac{30}{42} = \frac{5}{7} \neq \mathbb{P}_{B_1}(B_2),$$
donc B_1 et B_2 ne sont pas indépendants.

Exemple (Lancer consécutif de deux dés non pipés)
On lance deux dés équilibrés numérotés D_1 et D_2. On considère les événements :

- *A_2 : "le résultat de D_1 est 2" ;*
- *D : "le résultat de D_1 divise celui de D_2" ;*
- *S_6 : "la somme des résultats de D_1 et de D_2 vaut 6" ;*
- *S_7 : "la somme des résultats de D_1 et de D_2 vaut 7".*

1. *Les événements A_2 et D sont-ils indépendants ?*
2. *Les événements A_2 et S_6 sont-ils indépendants ?*
3. *Les événements A_2 et S_7 sont-ils indépendants ?*

Solution : On modélise la situation par l'univers $\Omega = [\![1,6]\!]^2$ à $6^2 = 36$ couples équiprobables.

1. Non, A_2 et D ne sont pas indépendants car
$$\mathbb{P}(A_2 \cap D) = \mathbb{P}(\{(2,2),(2,4),(2,6)\}) = \frac{3}{36},$$
alors que
$$\mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(\{(2,b),\ 1 \leq b \leq 6\}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6},$$
$$\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(\{(1,1),\cdots,(1,6),(2,2),(2,4),(2,6),(3,3),(3,6),(4,4),(5,5),(6,6)\}) = \frac{14}{36} = \frac{7}{18},$$
donc $\mathbb{P}(A_2 \cap D) \neq \mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(D)$.
2. Non, A_2 et S_6 ne sont pas indépendants car
$$\mathbb{P}(A_2 \cap S_6) = \mathbb{P}(\{(2,4)\}) = \frac{1}{36},$$
alors que
$$\mathbb{P}(A_2) = \frac{1}{6}, \qquad \mathbb{P}(S_6) = \mathbb{P}(\{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}) = \frac{5}{36},$$
donc $\mathbb{P}(A_2 \cap S_6) \neq \mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(S_6)$.
C'est intuitif, car on sent bien que le résultat de D_1 influe sur réalisation de S_6. Par exemple, si D_1 donne 6, alors S_6 ne peut plus se réaliser.
3. Oui, A_2 et S_7 sont indépendants car
$$\mathbb{P}(A_2 \cap S_7) = \mathbb{P}(\{(2,5)\}) = \frac{1}{36},$$
$$\mathbb{P}(A_2) = \frac{1}{6}, \qquad \mathbb{P}(S_7) = \mathbb{P}(\{(1,6),(2,5),\cdots,(6,1)\}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6},$$
donc $\mathbb{P}(A_2 \cap S_7) = \mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(S_7)$.
Là aussi on aurait pu l'intuiter, car le résultat de D_1 ne change pas la probabilité d'obtenir une somme égale à 7 ensuite (c'est la seule valeur de la somme pour laquelle ça fonctionne d'ailleurs).

Propriété 29 (Indépendance et complémentaire)
Soient A et B deux événements. Alors on a équivalence entre :
- (i) *A et B sont indépendants.*
- (ii) *A et $\overline{B}$ sont indépendants.*
- (iii) *$\overline{A}$ et B sont indépendants.*
- (iv) *$\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.*

Preuve
On voit l'idée sur $(i) \implies (ii)$: on a $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$ par hypothèse.
Or $\Omega = A \cup \overline{A}$ donc $\mathbb{P}(\overline{A} \cap B) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \big(1 - \mathbb{P}(A)\big)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(\overline{A})\mathbb{P}(B)$.

2) Familles d'événements indépendants

Définition 30 (Indépendance d'une famille d'événements)
On dit que les événements d'une famille $(A_i)_{i\in I}$ sont **indépendants** *lorsque pour toute partie* **finie** *J de I :*
$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right) = \prod_{j\in J} \mathbb{P}(A_j).$$

Vocabulaire
On dit aussi que les événements $(A_i)_{i\in I}$ sont **mutuellement indépendants**.

Exemple

- Pour une famille de deux événements, on retrouve bien sûr la définition précédente.
- Les éléments A, B et C d'une famille de trois événements (A, B, C) sont indépendants lorsque

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B), \quad \mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C), \quad \mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C),$$
$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C).$$

ATTENTION !
Si les $(A_i)_{i\in I}$ sont indépendants, **alors** il sont indépendants deux à deux. Mais la réciproque est fausse !

Exemple (Trois lancers successifs d'une pièce)
On effectue trois lancers successifs d'une pièce équilibrée. On considère les événements :

- A *: "le premier lancer donne Face".*
- B *: "le deuxième lancer donne Face".*
- C *: "les trois lancers donnent tous Face ou tous Pile".*

Montrer que ces événements sont deux à deux indépendants, mais pas indépendants.

ATTENTION !
Si $(A_1, \cdots, A_n)$ est une famille finie d'événements, alors :

- c'est **l'incompatibilité deux à deux des** A_i qui permet d'écrire :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k).$$

- c'est **l'indépendance des** A_i qui permet d'écrire :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k).$$

Ne pas confondre !

Propriété 31 (Sous-famille d'une famille d'événements indépendants)
Toute sous-famille d'une famille d'événements indépendants est elle-même constituée d'événements indépendants.

Preuve
Evident d'après la définition de l'indépendance.

Propriété 32 (Indépendance et complémentaires)
Soit $(A_i)_{i\in I}$ *une famille d'événements. Pour chaque* $i \in I$*, on pose* $B_i = A_i$ *ou* $\overline{A_i}$*.*
Si la famille $(A_i)_{i\in I}$ *est constituée d'événements indépendants, alors la famille* $(B_i)_{i\in I}$ *aussi.*

Preuve
La définition de l'indépendance permet de se ramener à des familles finies, et donc d'envisager un raisonnement par récurrence sur le cardinal de la famille finie considérée.
Montrons par récurrence sur $n \geq 1$ la propriété :

$$(\mathcal{P}_n) : \qquad (A_1, \cdots, A_n, A_{n+1}) \text{ indépendants } \implies (A_1, \cdots, A_n, \overline{A_{n+1}}) \text{ indépendants.}$$

- On a déjà traité l'initialisation $n = 1$ dans la prop. 29.
- Hérédité : supposons la propriété vraie pour un entier $n - 1$ (avec $n \geq 2$), et montrons-la pour n. Supposons donc $(A_1, \cdots, A_n, A_{n+1})$ indépendants, et notons $C_1 = A_1, \cdots, C_n = A_n$, et $C_{n+1} = \overline{A_{n+1}}$. Etant donné une partie $J \subset [\![1, n+1]\!]$:

* Si $Card(J) \leq n$, alors l'indépendance des $(A_i)_{i\in J}$ entraîne celle des $(C_i)_{i\in J}$ par hypothèse de récurrence.
* Si $Card(J) = n+1$, alors $J = [\![1, n+1]\!]$, donc

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in J} C_i\right) = \mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n \cap \overline{A_{n+1}}) = \mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) - \mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n \cap A_{n+1}),$$

donc par indépendance des $(A_i)_{1\leq i\leq n+1}$:

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in J} C_i\right) = \mathbb{P}(A_1)\cdots\mathbb{P}(A_n) \times (1 - \mathbb{P}(A_{n+1})) = \mathbb{P}(C_1)\cdots\mathbb{P}(C_n)\mathbb{P}(C_{n+1}) = \prod_{i\in J}\mathbb{P}(C_i).$$

Donc $(A_1, \cdots, A_n, \overline{A_{n+1}})$ sont bien indépendants, ce qui prouve que la propriété $(\mathcal{P}_n)$ est vraie pour tout $n \geq 1$.

Enfin, en appliquant de manière répétée la propriété $(\mathcal{P}_n)$ aux permutations de la famille $(A_1, \cdots, A_n)$ (qui préservent bien entendu l'indépendance), on obtient avec les notations de l'énoncé que

$$\forall n \geq 2, \qquad (A_1, \cdots, A_n) \text{ indépendants } \implies (B_1, \cdots, B_n) \text{ indépendants},$$

ce qui est équivalent à la propriété voulue.

Exemple
Si (A, B, C) sont indépendants, alors $(A, \overline{B}, C)$, $(\overline{A}, \overline{B}, C)$, le sont aussi.