

CH16 : Equations différentielles linéaires

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

I désigne un intervalle de \mathbb{R} d'intérieur non vide et E un \mathbb{K} -espace vectoriel normé de dimension finie. On rappelle que l'ensemble $\mathcal{L}(E)$ (formé des endomorphismes de E) est également un espace normé de dimension finie, mais également une algèbre normée pour les lois $(+, \cdot, \circ)$: en effet, étant donnée une norme $\| \cdot \|$ sur E , la norme "triple" $||| \cdot |||$ définie par

$$\forall u \in \mathcal{L}(E), \quad |||u||| = \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|}$$

est une norme sur $\mathcal{L}(E)$ vérifiant :

$$|||Id_E||| = 1, \quad \forall (u, v) \in \mathcal{L}(E)^2, \quad |||u \circ v||| \leq |||u||| |||v|||.$$

De même, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une algèbre normée, pour la norme $||| \cdot |||$ définie par :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad |||A||| = \sup_{V \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}} \frac{\|AV\|}{\|V\|},$$

où $\| \cdot \|$ est n'importe quelle norme sur \mathbb{K}^n . On a

$$|||I_n||| = 1, \quad \forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2, \quad |||AB||| \leq |||A||| |||B|||.$$

I Généralités

1) Définitions

Définition 1 (Equation différentielle d'ordre 1)

(i) On appelle **équation différentielle linéaire d'ordre 1** une équation de la forme :

$$\alpha(t)(x'(t)) = \beta(t)(x(t)) + \gamma(t),$$

où $\alpha : I \rightarrow \mathcal{L}(E)$, $\beta : I \rightarrow \mathcal{L}(E)$ et $\gamma : I \rightarrow E$ sont des applications continues données, et l'inconnue $x : I \rightarrow E$ est une fonction dérivable.

(ii) L'équation est dite **résoluble en x'** lorsque $\forall t \in I$, $\alpha(t) \in GL(E)$. Dans ce cas, l'équation est équivalente à l'**équation résolue en x'** :

$$x'(t) = a(t)(x(t)) + b(t),$$

où $\forall t \in I$, $a(t) = \alpha(t)^{-1} \circ \beta(t)$ et $b(t) = \alpha(t)^{-1}(\gamma(t))$.

Notation

On pourra abréger "équation différentielle linéaire" par "EDL".

Lemme 2 (Continuité des coefficients de la forme résolue)

Avec les notations précédentes, on a encore $a : I \rightarrow \mathcal{L}(E)$ continue et $b : I \rightarrow E$ continue.

Notation

Dans la suite, on considèrera essentiellement des équations différentielles sous forme résolue en x' :

$$(E) : \quad x'(t) = a(t)(x(t)) + b(t),$$

avec $a : I \rightarrow \mathcal{L}(E)$ et $b : I \rightarrow E$ continus. On emploiera fréquemment la notation abrégée suivante :

$$(E) : \quad x' = a(t)(x) + b(t),$$

où l'on ne rappelle pas que l'inconnue x dépend de la variable réelle t , ou, de manière encore plus abrégée :

$$(E) : \quad x' = a(x) + b.$$

Définition 3 (Solution d'une équation différentielle)

Soit une équation différentielle linéaire $(E) : x' = a(t)x + b(t)$, avec $a \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{L}(E))$ et $b \in \mathcal{C}^0(I, E)$. Une **solution** de (E) sur I est une fonction $x : I \rightarrow E$ dérivable telle que

$$\forall t \in I, \quad x'(t) = a(t)x(t) + b(t).$$

Propriété 4 (Régularité d'une solution)

Toute solution de (E) sur I est automatiquement de classe \mathcal{C}^1 .

Vocabulaire

La fonction $t \mapsto b(t)$ est appelée **second membre** de l'équation $(E) : x' = a(t)x + b(t)$.

L'équation (E) est dite à **coefficients constants** lorsque $t \mapsto a(t)$ est une fonction constante.

L'équation $(H) : x' = a(t)x$ est appelée **équation homogène associée** à (E) .

2) Structure de l'ensemble des solutions**Notation**

On notera $\mathcal{S}_I(E)$ l'ensemble des solutions de $(E) : x' = a(t)x + b(t)$ sur l'intervalle I .

De même, on notera $\mathcal{S}_I(H)$ l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée $(H) : x' = a(t)x$ sur l'intervalle I .

Propriété 5 (Structure des ensembles de solutions)

(i) L'ensemble $\mathcal{S}_I(H)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(I, E)$.

(ii) Si on connaît une solution $f_0 \in \mathcal{S}_I(E)$, alors on a

$$\mathcal{S}_I(E) = \{h + f_0, h \in \mathcal{S}_I(H)\}$$

("sol. générale de (E) " = "sol. générale de (H) " + "sol. particulière de (E) ").

Propriété 6 (Principe de superposition)

Si f_1 est solution de $x' = a(t)x + b_1(t)$ sur I et si f_2 est solution de $x' = a(t)x + b_2(t)$ sur I , alors $f_1 + f_2$ est solution de $x' = a(t)x + b_1(t) + b_2(t)$ sur I (où b_1 et b_2 sont dans $\mathcal{C}^0(I, E)$).

3) Problème de Cauchy**Définition 7 (Problème de Cauchy linéaire d'ordre 1)**

Un **problème de Cauchy linéaire d'ordre 1** est la donnée d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 et d'une condition initiale :

$$(PC) : \begin{cases} x'(t) = a(t)x(t) + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases},$$

avec $a \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{L}(E))$, $b \in \mathcal{C}^0(I, E)$, $t_0 \in I$, $x_0 \in E$.

Propriété 8 (Ecriture sous forme intégrale d'un problème de Cauchy)

Soit $a \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{L}(E))$ et $b \in \mathcal{C}^0(I, E)$. Alors, pour toute fonction $x \in \mathcal{C}^0(I, E)$, x est solution du problème de Cauchy (PC) si et seulement si

$$\forall t \in I, \quad x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t (a(s)x(s) + b(s)) ds.$$

4) Equation différentielle scalaire d'ordre n **Définition 9 (Equation différentielle scalaire d'ordre n)**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle **équation différentielle linéaire scalaire d'ordre n résolue sur I** une équation de la forme :

$$x^{(n)}(t) = a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) + b(t),$$

où les fonctions $a_i : I \rightarrow \mathbb{K}$ et $b : I \rightarrow \mathbb{K}$ sont continues.

Une **solution sur I** d'une telle équation est une fonction $x : I \rightarrow \mathbb{K}$ n -fois dérivable telle que

$$\forall t \in I, \quad x^{(n)}(t) = a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) + b(t).$$

Vocabulaire

Là aussi, on parle de **second membre** pour la fonction b , et on appelle **équation homogène** associée à

$$(E) : \quad x^{(n)}(t) = a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) + b(t)$$

l'équation sans second membre

$$(H) : \quad x^{(n)}(t) = a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t).$$

On emploiera également les notations $\mathcal{S}_I(E)$ et $\mathcal{S}_I(H)$ pour les ensembles de solutions.

Théorème 10 (Equivalence entre système et équation scalaire)

Soit

$$(E) : \quad x^{(n)}(t) = a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) + b(t)$$

une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre $n \geq 1$, avec $a_0, \dots, a_{n-1}, b \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$.

Soit $x \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$. On pose $X : t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K}^n)$.

Alors, x est solution de (E) sur I si et seulement si la fonction vectorielle X est solution du système différentiel :

$$(\Sigma) : \quad X'(t) = A(t)X(t) + B(t),$$

$$\text{où } A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ a_0(t) & a_1(t) & \dots & \dots & \dots & a_{n-1}(t) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \text{ et } B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n.$$

Définition 11 (Problème de Cauchy linéaire scalaire d'ordre n)

Un **problème de Cauchy linéaire scalaire d'ordre n** est une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre n sous forme résolue, avec une condition initiale sur $(x, x', \dots, x^{(n-1)})$:

$$(PC) : \quad \begin{cases} x^{(n)}(t) = a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \\ x'(t_0) = x'_0 \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)} \end{cases},$$

avec $a_0, \dots, a_{n-1}, b \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$, $t_0 \in I$ et $(x_0, x'_0, \dots, x_0^{(n-1)}) \in \mathbb{K}^n$.

II Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire

1) Le théorème

Théorème 12 (Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire)

Soit $a \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{L}(E))$, $b \in \mathcal{C}^0(I, E)$, soit $(t_0, x_0) \in I \times E$. Alors le problème de Cauchy

$$(PC) : \begin{cases} x'(t) = a(t)x(t) + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

possède une unique solution $x \in \mathcal{C}^1(I, E)$.

Corollaire 13 (Théorème de Cauchy-Lipschitz pour les équations scalaires d'ordre n)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit a_0, a_1, \dots, a_{n-1} et b des fonctions continues $I \rightarrow \mathbb{K}$. Soit $t_0 \in I$ et $(x_0, x'_0, \dots, x_0^{(n-1)}) \in \mathbb{K}^n$. Alors le problème de Cauchy linéaire scalaire d'ordre n

$$(PC) : \begin{cases} x^{(n)}(t) = a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \\ x'(t_0) = x'_0 \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)} \end{cases},$$

possède une unique solution $x \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$.

2) Dimension des espaces de solutions

Théorème 14 (Dimension des espaces de solutions)

Soit $a \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{L}(E))$, $b \in \mathcal{C}^0(I, E)$. On considère les équations différentielles :

$$(E) : x' = a(t)x + b(t), \quad (H) : x' = a(t)x.$$

(i) Pour tout $t_0 \in I$, l'application $\varphi_{t_0} : \begin{cases} \mathcal{S}_I(H) & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x(t_0) \end{cases}$ est un isomorphisme linéaire, donc $\dim(\mathcal{S}_I(H)) = \dim(E)$.

(ii) $\mathcal{S}_I(E)$ est non vide, c'est un sous-espace affine de $\mathcal{C}^1(I, E)$ de dimension $\dim(E)$, parallèle à $\mathcal{S}_I(H)$ (c'est-à-dire que $\mathcal{S}_I(E)$ s'obtient en translatant $\mathcal{S}_I(H)$ par n'importe quelle solution particulière de E).

Corollaire 15 (Dimension des espaces de solutions pour les équations d'ordre n)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit a_0, a_1, \dots, a_{n-1} et b des fonctions continues $I \rightarrow \mathbb{K}$.

On note :

$$(E) : x^{(n)}(t) = a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) + b(t),$$

$$(H) : x^{(n)}(t) = a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t).$$

(i) Pour tout $t_0 \in I$, l'application

$$\varphi_{t_0} : \begin{cases} \mathcal{S}_I(H) & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ x & \longmapsto & (x(t_0), x'(t_0), \dots, x^{(n-1)}(t_0)) \end{cases}$$

est un isomorphisme, et donc $\mathcal{S}_I(H)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n .

(ii) $\mathcal{S}_I(E)$ est non vide, c'est un sous-espace affine de $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$ de dimension n , parallèle à $\mathcal{S}_I(H)$.

3) Exemples d'équations différentielles non résolubles

Il s'agit d'équations scalaires d'ordre n sous la forme :

$$\alpha_n(t)x^{(n)}(t) = \alpha_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \dots + \alpha_1(t)x'(t) + \alpha_0(t)x(t) + \beta(t),$$

où les α_i et β sont continues $I \rightarrow \mathbb{K}$ et la fonction $t \mapsto \alpha_n(t)$ s'annule sur I .

Méthode

Pour résoudre de telles équations sur I , on les résout d'abord sur les sous-intervalles $J \subset I$ sur lesquels α_n ne s'annule pas (en se ramenant à une forme résolue en $x^{(n)}$, sur laquelle on peut appliquer les résultats précédents). Puis on essaye de "recoller" les solutions obtenues pour former des solutions valables sur tout I , c'est-à-dire des fonctions n -fois dérivables sur tout I .

III Equations différentielles à coefficients constants

Il s'agit des équations de la forme

$$x'(t) = a(x(t)) + b(t),$$

où $a \in \mathcal{L}(E)$ ne dépend pas de t , et $b \in \mathcal{C}^0(I, E)$.

Si $E = \mathbb{K}^n$, cela revient à considérer des systèmes différentiels de la forme :

$$X'(t) = AX(t) + B(t),$$

où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K}^n)$.

En exploitant l'équivalence entre systèmes différentiels et équations scalaires, les résultats de cette partie vont aussi permettre la résolution des équations différentielles linéaires scalaires d'ordre n à coefficients constants :

$$x^{(n)}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^{(i)}(t) + b(t),$$

où $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$ et $b \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$.

1) Propriétés de l'exponentielle de matrice / d'endomorphisme

Théorème 16 (Propriétés de l'exponentielle de matrice)

- (i) $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est bien définie et continue.
- (ii) Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, l'application $S : t \mapsto \exp(tA)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad S'(t) = A \exp(tA) = \exp(tA)A.$$

- (iii) Si $AB = BA$, alors $\exp(A + B) = \exp(A) \exp(B) = \exp(B) \exp(A)$.
- (iv) Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\exp(A) \in GL_n(\mathbb{K})$ et $\exp(A)^{-1} = \exp(-A)$.

2) Résultat général

Théorème 17 (Solution d'un système différentiel à coefficients constants)

On considère le système différentiel à coefficients constants

$$(H) : X'(t) = AX(t),$$

avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et le problème de Cauchy

$$(PC) : \begin{cases} X'(t) = AX(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases},$$

avec $t_0 \in \mathbb{R}$ et $X_0 \in \mathbb{K}^n$.

- (i) Les solutions de (H) sont les $X : t \mapsto e^{tA}V$ avec $V \in \mathbb{K}^n$.
- (ii) L'unique solution de (PC) est $X : t \mapsto e^{(t-t_0)A}X_0$.

3) Exemples de résolutions explicites

IV Méthode de variation des constantes

1) Rappel : MVC pour les équations scalaires d'ordre 1

On considère l'équation différentielle (E) : $x'(t) = a(t)x(t) + b(t)$, où $a, b \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$, et son équation homogène associée (H) : $x'(t) = a(t)x(t)$.

Les solutions de (H) sur I sont les fonctions

$$x : t \mapsto \alpha e^{A(t)}, \quad \alpha \in \mathbb{K}$$

avec A une primitive de a sur I .

En effet, on vérifie facilement que la fonction $t \mapsto e^{A(t)}$ est une solution non nulle de (H). Par ailleurs $\mathcal{S}_I(H)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension 1, donc $\mathcal{S}_I(H) = \text{Vect}(t \mapsto e^{A(t)})$

Méthode (Méthode de variation de la constante)

Une fois que l'on connaît les solutions de (H), on peut chercher toutes les solutions de (E) sous la forme

$$x(t) = \lambda(t)e^{A(t)},$$

où $\lambda : I \rightarrow \mathbb{K}$ est une fonction dérivable.

En effet, toute fonction dérivable $x : I \rightarrow \mathbb{K}$ peut s'écrire sous cette forme, en posant $\lambda : t \mapsto x(t)e^{-A(t)}$ (ce qui est possible car $t \mapsto e^{A(t)}$ ne s'annule jamais sur I). Avec ces notations, x est solution de (E) si et seulement si

$$\forall t \in I, \quad \lambda'(t)e^{A(t)} + \lambda(t)A'(t)e^{A(t)} = a(t)\lambda(t)e^{A(t)} + b(t),$$

c'est-à-dire

$$\lambda'(t) = b(t)e^{-A(t)}$$

(les " $\lambda(t)$ " se sont simplifiés car $A'(t) = a(t)$).

Si on parvient à calculer une primitive de $t \mapsto b(t)e^{-A(t)}$, on obtient alors toutes les solutions de (E) :

$$x(t) = \left(\int_{t_0}^t b(s)e^{-A(s)} ds + \alpha \right) e^{A(t)}, \quad \alpha \in \mathbb{K}$$

(où $t_0 \in I$ quelconque).

2) Méthode de variation des constantes pour les équations vectorielles

On va maintenant généraliser la méthode de variation de la constante aux équations différentielles d'ordre 1 vectorielles (à valeurs dans un evn E de dimension finie), le but étant de déterminer les solutions de (E) : $x'(t) = a(t)x(t) + b(t)$ à partir de la forme des solutions de (H) : $x'(t) = a(t)x(t)$.

Définition 18 (Système fondamental de solutions)

Soit l'équation différentielle linéaire homogène

$$(H) : x'(t) = a(t)x(t),$$

avec $a \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{L}(E))$.

On appelle **système fondamental de solutions de (H)** toute base (x_1, \dots, x_n) de l'espace vectoriel $\mathcal{S}_I(H)$.

Définition 19 (Wronskien d'une famille de solutions)

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, soit $a \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{L}(E))$, et soit (x_1, \dots, x_n) une famille (non nécessairement libre) de solutions de (H) : $x'(t) = a(t)x(t)$.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . On appelle **wronskien** de la famille (x_1, \dots, x_n) l'application

$$w : \begin{cases} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ t & \longmapsto & w(t) = \det_{\mathcal{B}}(x_1(t), \dots, x_n(t)) = \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1(t), \dots, x_n(t))) \end{cases} \cdot$$

Théorème 20 (Caractérisation des systèmes fondamentaux de solutions)

Avec les notations précédentes, il y a équivalence entre :

- (i) (x_1, \dots, x_n) est un système fondamental de solutions de (H) ;
- (ii) $\exists t_0 \in I, w(t_0) \neq 0$;
- (iii) $\forall t \in I, w(t) \neq 0$.

Dans ce cas, on dit que $Q(t) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1(t), \dots, x_n(t))$ est une **matrice fondamentale** de (H) .

Lemme 21 (Décomposition d'une fonction dérivable sur un système fondamental)

Soit (x_1, \dots, x_n) un système fondamental de solutions de $(H) : x'(t) = a(t)(x(t))$.

Alors, toute fonction dérivable $x : I \rightarrow E$ peut s'écrire sous la forme

$$x(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(t)x_i(t),$$

avec les $\lambda_i : I \rightarrow \mathbb{K}$ des fonctions dérivables.

Méthode (Mise en oeuvre de la MVC sur un système différentiel)

Supposons que l'on connaisse un système fondamental de solutions du système différentiel homogène :

$$(H) : X'(t) = A(t)X(t),$$

noté (X_1, \dots, X_n) .

D'après le lemme précédent, on peut chercher toutes les solutions du système avec second membre

$$(E) : X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$$

sous la forme

$$X(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(t)X_i(t),$$

avec les $\lambda_i : I \rightarrow \mathbb{K}$ dérivables. Avec ces notations, X est solution de (E) si et seulement si

$$\forall t \in I, \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i'(t)X_i(t) + \sum_{i=1}^n \lambda_i(t)X_i'(t) = A(t) \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i(t)X_i(t) \right) + B(t),$$

c'est-à-dire

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i'(t)X_i(t) = B(t)$$

(puisque $X_i'(t) = A(t)X_i(t)$ pour tout i). On obtient alors pour tout $t \in I$ un système linéaire :

$$Q(t) \begin{pmatrix} \lambda_1'(t) \\ \vdots \\ \lambda_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix},$$

où $Q(t)$ est la matrice carrée de colonnes $(X_1(t), \dots, X_n(t))$ (matrice fondamentale de (H)) et

$B(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$. Vu que $Q(t)$ est inversible pour tout $t \in I$, on obtient une unique solution :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1'(t) \\ \vdots \\ \lambda_n'(t) \end{pmatrix} = Q(t)^{-1} \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix},$$

et on intègre ensuite (composante par composante) pour obtenir les coefficients $\lambda_i(t)$, puis la solution générale de (E) :

$$X(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(t)X_i(t).$$

V Equations linéaires scalaires d'ordre 2

On considère des équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2 résolues en x'' :

$$(E) : x''(t) = a(t)x'(t) + b(t)x(t) + c(t),$$

où $a, b, c \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$.

L'équation homogène associée est notée

$$(H) : x''(t) = a(t)x'(t) + b(t)x(t).$$

1) Système fondamental de solutions, wronskien

Définition 22 (Système fondamental de solutions)

On appelle système fondamental de solutions de (H) toute base (x_1, x_2) du plan vectoriel $\mathcal{S}_I(H)$.

Propriété 23 (Lien avec les systèmes différentiels)

(x_1, x_2) est un système fondamental de solutions de (H) si et seulement si

$$(X_1, X_2) = \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_1' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2' \end{pmatrix} \right)$$

est un système fondamental de solutions du système différentiel

$$(\Sigma) : X'(t) = A(t)X(t)$$

avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b(t) & a(t) \end{pmatrix}$.

Définition 24 (Wronskien de deux solutions de (H))

Si x_1, x_2 sont deux solutions de (H) (non nécessairement libres), on appelle wronskien de la famille (x_1, x_2) l'application

$$w : \begin{cases} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ t & \longmapsto & w(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{vmatrix} = x_1(t)x_2'(t) - x_1'(t)x_2(t) \end{cases} .$$

Il s'agit du wronskien associé à la famille $(X_1, X_2) = ((x_1, x_1'), (x_2, x_2'))$ de solutions du système différentiel associé.

Théorème 25 (Caractérisation des systèmes fondamentaux)

Si x_1, x_2 sont deux solutions de (H) (non nécessairement libres), alors il y a équivalence entre :

- (i) (x_1, x_2) est un système fondamental de solutions de (H) ;
- (ii) $\exists t_0 \in I, w(t_0) \neq 0$;
- (iii) $\forall t \in I, w(t) \neq 0$.

Dans ce cas, on dit que $Q(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{pmatrix}$ est une matrice fondamentale de (H) .

Propriété 26 (Equation différentielle du wronskien)

Pour toute famille (x_1, x_2) de solutions de (H) , le wronskien w vérifie l'équation différentielle :

$$w'(t) = a(t)w(t).$$

2) Méthode de variation des constantes

En exploitant encore l'équivalence entre équations scalaires d'ordre 2 et système différentiels à valeurs dans \mathbb{K}^2 , on peut adapter la méthode de variation des constantes des systèmes différentiels pour résoudre (E) à partir d'une base des solutions de (H) .

Méthode

Si on connaît (x_1, x_2) , un système fondamental de solutions de (H) , alors on peut chercher toutes les solutions de (E) sous la forme

$$x(t) = \lambda_1(t)x_1(t) + \lambda_2(t)x_2(t),$$

où λ_1 et λ_2 sont dérivables sur I .

Pour cela, on introduit la fonction vectorielle :

$$X : t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix},$$

et on cherche les solutions du système différentiel associé à (E) , noté $(\Sigma) : X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$, sous la forme

$$X(t) = \lambda_1(t)X_1(t) + \lambda_2(t)X_2(t),$$

où

$$(X_1, X_2) = \left(\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_1'(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} \right) \quad (\text{sys.fondamental de } (\Sigma)).$$

Avec ces notations, x est solution de (E) ssi X est solution de (Σ) ssi $\lambda_1'(t)X_1(t) + \lambda_2'(t)X_2(t) = B(t)$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} \lambda_1'(t)x_1(t) + \lambda_2'(t)x_2(t) = 0 \\ \lambda_1'(t)x_1'(t) + \lambda_2'(t)x_2'(t) = c(t) \end{cases}$$

ou encore

$$Q(t) \begin{pmatrix} \lambda_1'(t) \\ \lambda_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ c(t) \end{pmatrix},$$

où $Q(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{pmatrix}$ est la matrice fondamentale du système (Σ) .

3) Techniques de recherche de solutions

a) Méthode d'abaissement d'ordre

Si on connaît une solution de (H) , notée $x_0(t)$, qui ne s'annule pas sur I , alors on peut chercher les solutions de (E) sous la forme :

$$x(t) = \lambda(t)x_0(t), \text{ avec } \lambda \text{ deux fois dérivable sur } I.$$

On obtient alors, en injectant cette forme dans (E) , une équation d'ordre 1 en $z = \lambda'$ (les termes en λ se sont simplifiés), qu'on peut résoudre, et ensuite, on détermine $\lambda(t)$ en intégrant, puis les solutions $x(t)$ en remultipliant par $x_0(t)$.

b) Utilisation de séries entières

On peut également chercher si l'équation différentielle étudiée admet des solutions **développables en série entière** (cela englobe notamment les polynômes, les exponentielles, etc.).

Méthode (Recherche de solutions développables en séries entières)

On procède par "analyse-synthèse" :

- étant donnée une fonction développable en série entière $x(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ dans un intervalle $] -R; R[$, on détermine une condition nécessaire et suffisante sur la suite des coefficients (a_n) pour que x soit solution de (E) .
On obtient en général une relation de récurrence sur la suite (a_n) ;
- on essaie d'explicitier le terme général de la suite (a_n) en fonction de n , à partir de la relation de récurrence précédemment obtenue.
Cette étape donne les **éventuelles** solutions DSE;
- on vérifie ensuite que la ou les séries entières obtenues ont bien un rayon de convergence R non nul, et donc qu'elles définissent bien des fonctions.
Cette étape montre l'**existence** de solutions DSE sur $] -R; R[$;
- si possible, on essaie de "reconnaître" les solutions obtenues à partir de leur DSE, c'est-à-dire de les exprimer à l'aide de fonctions usuelles.

c) Changement de variable / d'inconnue