CH16 : Equations différentielles linéaires

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie.
On rappelle que l'ensemble $\mathcal{L}(E)$ (formé des endomorphismes de E) est également un espace normé de dimension finie, mais également une algèbre normée pour les lois $(+, \cdot, \circ)$: en effet, étant donnée une norme $\| \,.\, \|$ sur E, la norme "triple" $||| \,.\, |||$ définie par

$$\forall u \in \mathcal{L}(E), \qquad |||u||| = \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|}$$

est une norme sur $\mathcal{L}(E)$ vérifiant :

$$|||Id_E||| = 1, \qquad \forall (u,v) \in \mathcal{L}(E)^2, \quad |||u \circ v||| \leq |||u|||\,|||v|||.$$

De même, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une algèbre normée, pour la norme $||| \,.\, |||$ définie par :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \qquad |||A||| = \sup_{V \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}} \frac{\|AV\|}{\|V\|},$$

où $\| \,.\, \|$ est n'importe quelle norme sur $\mathbb{K}^n$. On a

$$|||I_n||| = 1, \qquad \forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2, \quad |||AB||| \leq |||A|||\,|||B|||.$$

I Généralités

1) Définitions

Définition 1 (Equation différentielle d'ordre 1)

(*i*) *On appelle* **équation différentielle linéaire d'ordre 1** *une équation de la forme :*

$$\alpha(t)(x'(t)) = \beta(t)(x(t)) + \gamma(t),$$

où $\alpha : I \to \mathcal{L}(E)$, $\beta : I \to \mathcal{L}(E)$ et $\gamma : I \to E$ sont des applications continues données, et l'inconnue $x : I \to E$ est une fonction dérivable.

(*ii*) *L'équation est dite* **résoluble en x'** *lorsque $\forall t \in I,\ \alpha(t) \in GL(E)$. Dans ce cas, l'équation est équivalente à* **l'équation résolue en x'** *:*

$$x'(t) = a(t)(x(t)) + b(t),$$

où $\forall t \in I,\ a(t) = \alpha(t)^{-1} \circ \beta(t)$ et $b(t) = \alpha(t)^{-1}(\gamma(t))$.

Notation
On pourrra abréger "equation différentielle linéaire" par "EDL".

Lemme 2 (Continuité des coefficients de la forme résolue)
Avec les notations précédentes, on a encore $a : I \to \mathcal{L}(E)$ continue et $b : I \to E$ continue.

Notation
Dans la suite, on considèrera essentiellement des équations différentielles sous forme résolue en x' :

$$(E) : \quad x'(t) = a(t)(x(t)) + b(t),$$

avec $a : I \to \mathcal{L}(E)$ et $b : I \to E$ continues. On emploiera fréquemment la notation abrégée suivante :

$$(E) : \quad x' = a(t)(x) + b(t),$$

où l'on ne rappelle pas que l'inconnue x dépend de la variable réelle t, ou, de manière encore plus abrégée :

$$(E) : \quad x' = a(x) + b.$$

Définition 3 (Solution d'une équation différentielle)
Soit une équation différentielle linéaire $(E) : x' = a(t)(x)+b(t)$*, avec* $a \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{L}(E))$ *et* $b \in \mathcal{C}^0(I, E)$*.*
Une **solution** *de* (E) *sur* I *est une fonction* $x : I \to E$ *dérivable telle que*

$$\forall t \in I, \qquad x'(t) = a(t)(x(t)) + b(t).$$

Propriété 4 (Régularité d'une solution)
Toute solution de (E) *sur* I *est automatiquement de classe* $\mathcal{C}^1$*.*

Vocabulaire
La fonction $t \mapsto b(t)$ est appelée **second membre** de l'équation $(E) :\ x' = a(t)(x) + b(t)$.
L'équation (E) est dite **à coefficients constants** lorsque $t \mapsto a(t)$ est une fonction constante.
L'équation $(H) :\ x' = a(t)(x)$ est appelée **équation homogène associée** à (E).

2) Structure de l'ensemble des solutions

Notation
On notera $\mathcal{S}_I(E)$ l'ensemble des solutions de $(E) :\ x' = a(t)(x) + b(t)$ sur l'intervalle I.
De même, on notera $\mathcal{S}_I(H)$ l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée $(H) :\ x' = a(t)(x)$ sur l'intervalle I.

Propriété 5 (Structure des ensembles de solutions)

(i) L'ensemble $\mathcal{S}_I(H)$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathcal{C}^1(I, E)$*.*

(ii) Si on connaît une solution $f_0 \in \mathcal{S}_I(E)$*, alors on a*

$$\mathcal{S}_I(E) = \{h + f_0,\ h \in \mathcal{S}_I(H)\}$$

("sol. générale de (E)*" = "sol. générale de* (H)*" + "sol. particulière de* (E)*").*

Propriété 6 (Principe de superposition)
Si f_1 *est solution de* $x' = a(t)(x) + b_1(t)$ *sur* I *et si* f_2 *est solution de* $x' = a(t)(x) + b_2(t)$ *sur* I*, alors* $f_1 + f_2$ *est solution de* $x' = a(t)(x) + b_1(t) + b_2(t)$ *sur* I *(où* b_1 *et* b_2 *sont dans* $\mathcal{C}^0(I, E)$*).*

3) Problème de Cauchy

Définition 7 (Problème de Cauchy linéaire d'ordre 1)
Un **problème de Cauchy linéaire d'ordre 1** *est la donnée d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 et d'une condition initiale :*

$$(PC) : \left\{ \begin{array}{l} x'(t) = a(t)(x(t)) + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{array} \right. ,$$

avec $a \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{L}(E))$*,* $b \in \mathcal{C}^0(I, E)$*,* $t_0 \in I$*,* $x_0 \in E$*.*

Propriété 8 (Ecriture sous forme intégrale d'un problème de Cauchy)
Soit $a \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{L}(E))$ *et* $b \in \mathcal{C}^0(I, E)$*. Alors, pour toute fonction* $x \in \mathcal{C}^0(I, E)$*,* x *est solution du problème de Cauchy* (PC) *si et seulement si*

$$\forall t \in I, \qquad x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} (a(s)(x(s)) + b(s))\, ds.$$

4) Equation différentielle scalaire d'ordre n

Définition 9 (Equation différentielle scalaire d'ordre n)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle **équation différentielle linéaire scalaire d'ordre n** *résolue sur I une équation de la forme :*

$$x^{(n)}(t) = a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) + b(t),$$

où les fonctions $a_i : I \to \mathbb{K}$ et $b : I \to \mathbb{K}$ sont continues.
Une **solution sur I** *d'une telle équation est une fonction $x : I \to \mathbb{K}$ n-fois dérivable telle que*

$$\forall t \in I, \qquad x^{(n)}(t) = a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) + b(t).$$

Vocabulaire
Là aussi, on parle de **second membre** pour la fonction b, et on appelle **équation homogène** associée à

$$(E): \qquad x^{(n)}(t) = a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) + b(t)$$

l'équation sans second membre

$$(H): \qquad x^{(n)}(t) = a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t).$$

On emploiera également les notations $\mathcal{S}_I(E)$ et $\mathcal{S}_I(H)$ pour les ensembles de solutions.

Théorème 10 (Equivalence entre système et équation scalaire)
Soit

$$(E): \ x^{(n)}(t) = a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) + b(t)$$

une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre $n \geq 1$, avec $a_0, \cdots, a_{n-1}, b \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$.

Soit $x \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$. On pose $X : t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K}^n)$.

Alors, x est solution de (E) sur I si et seulement si la fonction vectorielle X est solution du système différentiel :

$$(\Sigma): \quad X'(t) = A(t)X(t) + B(t),$$

où $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ a_0(t) & a_1(t) & \dots & \dots & \dots & a_{n-1}(t) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *et* $B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$.

Définition 11 (Problème de Cauchy linéaire scalaire d'ordre n)
Un **problème de Cauchy linéaire scalaire d'ordre n** *est une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre n sous forme résolue, avec une condition initiale sur $(x, x', \cdots, x^{(n-1)})$:*

$$(PC): \begin{cases} x^{(n)}(t) = a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \\ x'(t_0) = x'_0 \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)} \end{cases},$$

avec $a_0, \cdots, a_{n-1}, b \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$, $t_0 \in I$ et $(x_0, x'_0, \cdots, x_0^{(n-1)}) \in \mathbb{K}^n$.

II Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire

1) Le théorème

Théorème 12 (Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire)
Soit $a \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{L}(E))$, $b \in \mathcal{C}^0(I, E)$, *soit* $(t_0, x_0) \in I \times E$. *Alors le problème de Cauchy*

$$(PC) : \begin{cases} x'(t) = a(t)(x(t)) + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

possède une unique solution $x \in \mathcal{C}^1(I, E)$.

Corollaire 13 (Théorème de Cauchy-Lipschitz pour les équations scalaires d'ordre n)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, *soit* $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$ *et* b *des fonctions continues* $I \to \mathbb{K}$. *Soit* $t_0 \in I$ *et* $(x_0, x_0', \cdots, x_0^{(n-1)}) \in \mathbb{K}^n$. *Alors le problème de Cauchy linéaire scalaire d'ordre* n

$$(PC) : \begin{cases} x^{(n)}(t) = a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \\ x'(t_0) = x_0' \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)} \end{cases},$$

possède une unique solution $x \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$.

2) Dimension des espaces de solutions

Théorème 14 (Dimension des espaces de solutions)
Soit $a \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{L}(E))$, $b \in \mathcal{C}^0(I, E)$. *On considère les équations différentielles :*

$$(E) : \ x' = a(t)(x) + b(t), \qquad (H) : \ x' = a(t)(x).$$

(i) *Pour tout* $t_0 \in I$, *l'application* $\varphi_{t_0} : \begin{cases} \mathcal{S}_I(H) & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x(t_0) \end{cases}$ *est un isomorphisme linéaire, donc* $\dim(\mathcal{S}_I(H)) = \dim(E)$.

(ii) $\mathcal{S}_I(E)$ *est non vide, c'est un sous-espace affine de* $\mathcal{C}^1(I, E)$ *de dimension* $\dim(E)$, *parallèle à* $\mathcal{S}_I(H)$ *(c'est-à-dire que* $\mathcal{S}_I(E)$ *s'obtient en translatant* $\mathcal{S}_I(H)$ *par n'importe quelle solution particulière de* E*).*

Corollaire 15 (Dimension des espaces de solutions pour les équations d'ordre n)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, *soit* $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$ *et* b *des fonctions continues* $I \to \mathbb{K}$.
On note :

$$(E) : \quad x^{(n)}(t) = a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) + b(t),$$

$$(H) : \quad x^{(n)}(t) = a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t).$$

(i) *Pour tout* $t_0 \in I$, *l'application*

$$\varphi_{t_0} : \begin{cases} \mathcal{S}_I(H) & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ x & \longmapsto & (x(t_0), x'(t_0), \cdots, x^{(n-1)}(t_0)) \end{cases}$$

est un isomorphisme, et donc $\mathcal{S}_I(H)$ *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension* n.

(ii) $\mathcal{S}_I(E)$ *est non vide, c'est un sous-espace affine de* $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$ *de dimension* n, *parallèle à* $\mathcal{S}_I(H)$.

3) Exemples d'équations différentielles non résolubles

Il s'agit d'équations scalaires d'ordre n sous la forme :

$$\alpha_n(t)x^{(n)}(t) = \alpha_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \cdots + \alpha_1(t)x'(t) + \alpha_0(t)x(t) + \beta(t),$$

où les α_i et β sont continues $I \to \mathbb{K}$ et la fonction $t \mapsto \alpha_n(t)$ s'annule sur I.

Méthode

Pour résoudre de telles équations sur I, on les résout d'abord sur les sous-intervalles $J \subset I$ sur lesquels α_n ne s'annule pas (en se ramenant à une forme résolue en $x^{(n)}$, sur laquelle on peut appliquer les résultats précédents). Puis on essaye de "recoller" les solutions obtenues pour former des solutions valables sur tout I, c'est-à-dire des fonctions n-fois dérivables sur tout I.

III Equations différentielles à coefficients constants

Il s'agit des équations de la forme
$$x'(t) = a(x(t)) + b(t),$$
où $a \in \mathcal{L}(E)$ ne dépend pas de t, et $b \in \mathcal{C}^0(I, E)$.
Si $E = \mathbb{K}^n$, cela revient à considérer des systèmes différentiels de la forme :
$$X'(t) = AX(t) + B(t),$$
où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K}^n)$.
En exploitant l'équivalence entre systèmes différentiels et équations scalaires, les résultats de cette partie vont aussi permettre la résolution des équations différentielles linéaires scalaires d'ordre n à coefficients constants :
$$x^{(n)}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^{(i)}(t) + b(t),$$
où $a_0, \cdots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$ et $b \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$.

1) Propriétés de l'exponentielle de matrice / d'endomorphisme

Théorème 16 (Propriétés de l'exponentielle de matrice)

(*i*) $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *est bien définie et continue.*

(*ii*) *Pour tout* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*, l'application* $S : t \mapsto \exp(tA)$ *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}$ *et*
$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad S'(t) = A\exp(tA) = \exp(tA)A.$$

(*iii*) *Si* $AB = BA$*, alors* $\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B) = \exp(B)\exp(A)$.

(*iv*) *Pour tout* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*,* $\exp(A) \in GL_n(\mathbb{K})$ *et* $\exp(A)^{-1} = \exp(-A)$.

2) Résultat général

Théorème 17 (Solution d'un système différentiel à coefficients constants)
On considère le système différentiel à coefficients constants
$$(H) : \; X'(t) = AX(t),$$
avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*, et le problème de Cauchy*
$$(PC) : \begin{cases} X'(t) = AX(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases},$$
avec $t_0 \in \mathbb{R}$ *et* $X_0 \in \mathbb{K}^n$.

(*i*) *Les solutions de* (H) *sont les* $X : t \mapsto e^{tA}V$ *avec* $V \in \mathbb{K}^n$.

(*ii*) *L'unique solution de* (PC) *est* $X : t \mapsto e^{(t-t_0)A}X_0$.

3) Exemples de résolutions explicites

IV Méthode de variation des constantes

1) Rappel : MVC pour les équations scalaires d'ordre 1

On considère l'équation différentielle $(E):\ x'(t)=a(t)x(t)+b(t)$, où $a,b\in\mathcal{C}^0(I,\mathbb{K})$, et son équation homogène associée $(H):\ x'(t)=a(t)x(t)$.
Les solutions de (H) sur I sont les fonctions

$$x : t\mapsto \alpha e^{A(t)},\qquad \alpha\in\mathbb{K}$$

avec A une primitive de a sur I.
En effet, on vérifie facilement que la fonction $t\mapsto e^{A(t)}$ est une solution non nulle de (H). Par ailleurs $\mathcal{S}_I(H)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 1, donc $\mathcal{S}_I(H)=Vect(t\mapsto e^{A(t)})$

Méthode (Méthode de variation de la constante)
Une fois que l'on connaît les solutions de (H), on peut chercher toutes les solutions de (E) sous la forme

$$x(t)=\lambda(t)e^{A(t)},$$

où $\lambda : I\to\mathbb{K}$ est une fonction dérivable.
En effet, toute fonction dérivable $x : I\to\mathbb{K}$ peut s'écrire sous cette forme, en posant $\lambda : t\mapsto x(t)e^{-A(t)}$ (ce qui est possible car $t\mapsto e^{A(t)}$ ne s'annule jamais sur I). Avec ces notations, x est solution de (E) si et seulement si

$$\forall t\in I,\qquad \lambda'(t)e^{A(t)}+\lambda(t)A'(t)e^{A(t)}=a(t)\lambda(t)e^{A(t)}+b(t),$$

c'est-à-dire

$$\lambda'(t)=b(t)e^{-A(t)}$$

(les "$\lambda(t)$" se sont simplifiés car $A'(t)=a(t)$).
Si on parvient à calculer une primitive de $t\mapsto b(t)e^{-A(t)}$, on obtient alors toutes les solutions de (E) :

$$x(t)=\left(\int_{t_0}^{t} b(s)e^{-A(s)}ds+\alpha\right)e^{A(t)},\qquad \alpha\in\mathbb{K}$$

(où $t_0\in I$ quelconque).

2) Méthode de variation des constantes pour les équations vectorielles

On va maintenant généraliser la méthode de variation de la constante aux équations différentielles d'ordre 1 vectorielles (à valeurs dans un evn E de dimension finie), le but étant de déterminer les solutions de $(E):\ x'(t)=a(t)(x(t))+b(t)$ à partir de la forme des solutions de $(H):\ x'(t)=a(t)(x(t))$.

Définition 18 (Système fondamental de solutions)
Soit l'équation différentielle linéaire homogène

$$(H):\ x'(t)=a(t)(x(t)),$$

avec $a\in\mathcal{C}^0(I,\mathcal{L}(E))$.
On appelle **système fondamental de solutions de (H)** *toute base $(x_1,\cdots,x_n)$ de l'espace vectoriel $\mathcal{S}_I(H)$.*

Définition 19 (Wronskien d'une famille de solutions)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n\in\mathbb{N}^*$, soit $a\in\mathcal{C}^0(I,\mathcal{L}(E))$, et soit $(x_1,\cdots,x_n)$ une famille (non nécessairement libre) de solutions de $(H):\ x'(t)=a(t)(x(t))$.
Soit $\mathcal{B}=(e_1,\cdots,e_n)$ une base de E. On appelle **wronskien** *de la famille $(x_1,\cdots,x_n)$ l'application*

$$w:\left\{\begin{array}{lll} I & \longrightarrow & \mathbb{K}\\ t & \longmapsto & w(t)=\det_{\mathcal{B}}(x_1(t),\cdots,x_n(t))=\det(Mat_{\mathcal{B}}(x_1(t),\cdots,x_n(t)))\end{array}\right. .$$

Théorème 20 (Caractérisation des systèmes fondamentaux de solutions)
Avec les notations précédentes, il y a équivalence entre :

(i) $(x_1, \cdots, x_n)$ *est un système fondamental de solutions de* (H) *;*

(ii) $\exists t_0 \in I,\ w(t_0) \neq 0$ *;*

(iii) $\forall t \in I,\ w(t) \neq 0$.

Dans ce cas, on dit que $Q(t) = Mat_{\mathcal{B}}(x_1(t), \cdots, x_n(t))$ *est une* **matrice fondamentale** *de* (H).

Lemme 21 (Décomposition d'une fonction dérivable sur un système fondamental)
Soit $(x_1, \cdots, x_n)$ *un système fondamental de solutions de* $(H) :\ x'(t) = a(t)(x(t))$.
Alors, toute fonction dérivable $x : I \to E$ *peut s'écrire sous la forme*

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t) x_i(t),$$

avec les $\lambda_i : I \to \mathbb{K}$ *des fonctions dérivables.*

Méthode (Mise en oeuvre de la MVC sur un système différentiel)
Supposons que l'on connaisse un système fondamental de solutions du système différentiel homogène :

$$(H) :\ X'(t) = A(t)X(t),$$

noté $(X_1, \cdots, X_n)$.
D'après le lemme précédent, **on peut chercher toutes les solutions du système avec second membre**

$$\boldsymbol{(E) :\ X'(t) = A(t)X(t) + B(t)}$$

sous la forme

$$\boldsymbol{X(t) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t) X_i(t),}$$

avec les $\boldsymbol{\lambda_i : I \to \mathbb{K}}$ dérivables. *Avec ces notations,* X *est solution de* (E) *si et seulement si*

$$\forall t \in I, \qquad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i'(t) X_i(t) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t) X_i'(t) = A(t) \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t) X_i(t) \right) + B(t),$$

c'est-à-dire

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i'(t) X_i(t) = B(t)$$

(puisque $X_i'(t) = A(t)X_i(t)$ *pour tout* i*). On obtient alors pour tout* $t \in I$ *un système linéaire :*

$$Q(t) \begin{pmatrix} \lambda_1'(t) \\ \vdots \\ \lambda_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix},$$

où $Q(t)$ *est la matrice carrée de colonnes* $(X_1(t), \cdots, X_n(t))$ *(matrice fondamentale de* (H)*) et* $B(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$. *Vu que* $Q(t)$ *est inversible pour tout* $t \in I$*, on obtient une unique solution :*

$$\begin{pmatrix} \lambda_1'(t) \\ \vdots \\ \lambda_n'(t) \end{pmatrix} = Q(t)^{-1} \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix},$$

et on intègre ensuite (composante par composante) pour obtenir les coefficients $\lambda_i(t)$*, puis la solution générale de* (E) *:*

$$X(t) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t) X_i(t).$$

V Equations linéaires scalaires d'ordre 2

On considère des équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2 résolues en x'' :

$$(E) : \; x''(t) = a(t)x'(t) + b(t)x(t) + c(t),$$

où $a, b, c \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$.
L'équation homogène associée est notée

$$(H) : \; x''(t) = a(t)x'(t) + b(t)x(t).$$

1) Système fondamental de solutions, wronskien

Définition 22 (Système fondamental de solutions)
On appelle **système fondamental de solutions de (H)** *toute base (x_1, x_2) du plan vectoriel $\mathcal{S}_I(H)$.*

Propriété 23 (Lien avec les systèmes différentiels)
(x_1, x_2) est un système fondamental de solutions de (H) si et seulement si

$$(X_1, X_2) = \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_1' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2' \end{pmatrix} \right)$$

est un système fondamental de solutions du système différentiel

$$(\Sigma) : \; X'(t) = A(t)X(t)$$

avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b(t) & a(t) \end{pmatrix}$.

Définition 24 (Wronskien de deux solutions de (H))
Si x_1, x_2 sont deux solutions de (H) (non nécessairement libres), on appelle **wronskien** *de la famille (x_1, x_2) l'application*

$$w : \begin{cases} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ t & \longmapsto & w(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{vmatrix} = x_1(t)x_2'(t) - x_1'(t)x_2(t) \end{cases}.$$

Il s'agit du wronskien associé à la famille $(X_1, X_2) = ((x_1, x_1'), (x_2, x_2'))$ de solutions du système différentiel associé.

Théorème 25 (Caractérisation des systèmes fondamentaux)
Si x_1, x_2 sont deux solutions de (H) (non nécessairement libres), alors il y a équivalence entre :

- *(i)* (x_1, x_2) *est un système fondamental de solutions de (H) ;*
- *(ii)* $\exists t_0 \in I, \; w(t_0) \neq 0$ *;*
- *(iii)* $\forall t \in I, \; w(t) \neq 0$.

Dans ce cas, on dit que $Q(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{pmatrix}$ *est une matrice fondamentale de (H).*

Propriété 26 (Equation différentielle du wronskien)
Pour toute famille (x_1, x_2) de solutions de (H), le wronskien w vérifie l'équation différentielle :

$$w'(t) = a(t)w(t).$$

2) Méthode de variation des constantes

En exploitant encore l'équivalence entre équations scalaires d'ordre 2 et système différentiels à valeurs dans $\mathbb{K}^2$, on peut adapter la méthode de variation des constantes des systèmes différentiels pour résoudre (E) à partir d'une base des solutions de (H).

Méthode

Si on connaît (x_1, x_2)*, un système fondamental de solutions de* (H)*, alors on peut chercher toutes les solutions de* (E) *sous la forme*

$$x(t) = \lambda_1(t)x_1(t) + \lambda_2(t)x_2(t),$$

où λ_1 *et* λ_2 *sont dérivables sur* I*.*
Pour cela, on introduit la fonction vectorielle :

$$X : t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix},$$

et on cherche les solutions du système différentiel associé à (E)*, noté* (Σ) *:* $X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$*, sous la forme*

$$X(t) = \lambda_1(t)X_1(t) + \lambda_2(t)X_2(t),$$

où

$$(X_1, X_2) = \left(\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_1'(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} \right) \quad (\textit{syst.fondamental de } (\Sigma)).$$

Avec ces notations, x *est solution de* (E) *ssi* X *est solution de* (Σ) *ssi* $\lambda_1'(t)X_1(t) + \lambda_2'(t)X_2(t) = B(t)$*, c'est-à-dire*

$$\begin{cases} \lambda_1'(t)x_1(t) + \lambda_2'(t)x_2(t) = 0 \\ \lambda_1'(t)x_1'(t) + \lambda_2'(t)x_2'(t) = c(t) \end{cases}$$

ou encore

$$Q(t) \begin{pmatrix} \lambda_1'(t) \\ \lambda_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ c(t) \end{pmatrix},$$

où $Q(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{pmatrix}$ *est la matrice fondamentale du système* (Σ)*.*

3) Techniques de recherche de solutions

a) Méthode d'abaissement d'ordre

Si on connaît une solution de (H), notée $x_0(t)$, qui ne s'annule pas sur I, alors on peut chercher les solutions de (E) sous la forme :

$$x(t) = \lambda(t)x_0(t), \text{ avec } \lambda \text{ deux fois dérivable sur } I.$$

On obtient alors, en injectant cette forme dans (E), une équation d'ordre 1 en $z = \lambda'$ (les termes en λ se sont simplifiés), qu'on peut résoudre, et ensuite, on détermine $\lambda(t)$ en intégrant, puis les solutions $x(t)$ en remultipliant par $x_0(t)$.

b) Utilisation de séries entières

On peut également chercher si l'équation différentielle étudiée admet des solutions **développables en série entière** (cela englobe notamment les polynômes, les exponentielles, etc.).

Méthode (Recherche de solutions développables en séries entières)
On procède par "analyse-synthèse" :

- *étant donnée une fonction développable en série entière* $x(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ *dans un intervalle* $]-R;R[$*, on détermine une condition nécessaire et suffisante sur la suite des coefficients* (a_n) *pour que* x *soit solution de* (E)*.*
  On obtient en général une relation de récurrence sur la suite (a_n) *;*
- *on essaie d'expliciter le terme général de la suite* (a_n) *en fonction de* n*, à partir de la relation de récurrence précedemment obtenue.*
  Cette étape donne les **éventuelles** *solutions DSE ;*
- *on vérifie ensuite que la ou les séries entières obtenues ont bien un rayon de convergence* R *non nul, et donc qu'elles définissent bien des fonctions.*
  Cette étape montre **l'existence** *de solutions DSE sur* $]-R;R[$ *;*
- *si possible, on essaie de "reconnaître" les solutions obtenues à partir de leur DSE, c'est-à-dire de les exprimer à l'aide de fonctions usuelles.*

c) Changement de variable / d'inconnue