

CH16 : Equations différentielles linéaires

Table des matières

I	Généralités	4
	1) Définitions	4
	2) Structure de l'ensemble des solutions	7
	3) Problème de Cauchy	7
	4) Equation différentielle scalaire d'ordre n	8
II	Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire	10
	1) Le théorème	10
	2) Dimension des espaces de solutions	10
	3) Exemples d'équations différentielles non résolubles	11
III	Equations différentielles à coefficients constants	13
	1) Propriétés de l'exponentielle de matrice / d'endomorphisme	13
	2) Résultat général	14
	3) Exemples de résolutions explicites	15
IV	Méthode de variation des constantes	17
	1) Rappel : MVC pour les équations scalaires d'ordre 1	17
	2) Méthode de variation des constantes pour les équations vectorielles	17
V	Equations linéaires scalaires d'ordre 2	22
	1) Système fondamental de solutions, wronskien	22
	2) Méthode de variation des constantes	23
	3) Techniques de recherche de solutions	25
	a) Méthode d'abaissement d'ordre	25
	b) Utilisation de séries entières	25
	c) Changement de variable / d'inconnue	26

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

I désigne un intervalle de \mathbb{R} d'intérieur non vide et E un \mathbb{K} -espace vectoriel normé de dimension finie. On rappelle que l'ensemble $\mathcal{L}(E)$ (formé des endomorphismes de E) est également un espace normé de dimension finie, mais également une algèbre normée pour les lois $(+, \cdot, \circ)$: en effet, étant donnée une norme $\| \cdot \|$ sur E , la norme "triple" $||| \cdot |||$ définie par

$$\forall u \in \mathcal{L}(E), \quad |||u||| = \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|}$$

est une norme sur $\mathcal{L}(E)$ vérifiant :

$$|||Id_E||| = 1, \quad \forall (u, v) \in \mathcal{L}(E)^2, \quad |||u \circ v||| \leq |||u||| |||v|||.$$

De même, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une algèbre normée, pour la norme $||| \cdot |||$ définie par :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad |||A||| = \sup_{V \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}} \frac{\|AV\|}{\|V\|},$$

où $\| \cdot \|$ est n'importe quelle norme sur \mathbb{K}^n . On a

$$|||I_n||| = 1, \quad \forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2, \quad |||AB||| \leq |||A||| |||B|||.$$

I Généralités

1) Définitions

Définition 1 (Equation différentielle d'ordre 1)

(i) On appelle **équation différentielle linéaire d'ordre 1** une équation de la forme :

$$\alpha(t)(x'(t)) = \beta(t)(x(t)) + \gamma(t),$$

où $\alpha : I \rightarrow \mathcal{L}(E)$, $\beta : I \rightarrow \mathcal{L}(E)$ et $\gamma : I \rightarrow E$ sont des applications continues données, et l'inconnue $x : I \rightarrow E$ est une fonction dérivable.

(ii) L'équation est dite **résoluble en x'** lorsque $\forall t \in I$, $\alpha(t) \in GL(E)$. Dans ce cas, l'équation est équivalente à l'équation résolue en x' :

$$x'(t) = a(t)(x(t)) + b(t),$$

où $\forall t \in I$, $a(t) = \alpha(t)^{-1} \circ \beta(t)$ et $b(t) = \alpha(t)^{-1}(\gamma(t))$.

Notation

On pourra abréger "equation différentielle linéaire" par "EDL".

Lemme 2 (Continuité des coefficients de la forme résolue)

Avec les notations précédentes, on a encore $a : I \rightarrow \mathcal{L}(E)$ continue et $b : I \rightarrow E$ continue.

Preuve

- L'inversion $i : \begin{cases} GL(E) \subset \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ u & \longmapsto & u^{-1} \end{cases}$ est continue car pour tout $u \in GL(E)$, on a

$$u + h = u \circ (Id + u^{-1} \circ h),$$

et pour $|||h||| < \frac{1}{|||u^{-1}|||}$, on a $Id + u^{-1} \circ h \in GL(E)$ (cf. CH.15 sur les séries de matrices), et

$$(Id + u^{-1} \circ h)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-u^{-1} \circ h)^k$$

(où cette série géométrique d'endomorphismes est absolument convergente, donc convergente).
Donc pour $\|h\|$ assez petit, $u + h \in GL(E)$ et

$$(u + h)^{-1} = (Id + u^{-1} \circ h)^{-1} \circ u^{-1} = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} (-u^{-1} \circ h)^k \right) \circ u^{-1},$$

ce qui entraîne

$$\|(u + h)^{-1} - u^{-1}\| = \left\| \left(\sum_{k=1}^{+\infty} (-u^{-1} \circ h)^k \right) \circ u^{-1} \right\| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \|u^{-1}\|^{k+1} \|h\|^k = O(\|h\|),$$

donc $(u + h)^{-1} \xrightarrow{h \rightarrow 0} u^{-1}$.

- Par composition, l'application $(i \circ \alpha) : t \mapsto \alpha(t)^{-1}$ est donc continue de I dans $\mathcal{L}(E)$.
- Les applications $B_1 : \begin{cases} \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E) & \longrightarrow \mathcal{L}(E) \\ (u, v) & \longmapsto u \circ v \end{cases}$ et $B_2 : \begin{cases} \mathcal{L}(E) \times E & \longrightarrow E \\ (u, x) & \longmapsto u(x) \end{cases}$ sont bilinéaires en dimension finie, donc continues. On en déduit par composition que les applications $a = B_1(i \circ \alpha, \beta) : I \rightarrow \mathcal{L}(E)$ et $b = B_2(i \circ \alpha, \gamma) : I \rightarrow E$ sont continues.

Notation

Dans la suite, on considèrera essentiellement des équations différentielles sous forme résolue en x' :

$$(E) : \quad x'(t) = a(t)(x(t)) + b(t),$$

avec $a : I \rightarrow \mathcal{L}(E)$ et $b : I \rightarrow E$ continues. On emploiera fréquemment la notation abrégée suivante :

$$(E) : \quad x' = a(t)(x) + b(t),$$

où l'on ne rappelle pas que l'inconnue x dépend de la variable réelle t , ou, de manière encore plus abrégée :

$$(E) : \quad x' = a(x) + b.$$

Exemple

- $E = \mathbb{K}$: $x'(t) = a(t)x(t) + b(t)$, avec $a : I \rightarrow \mathbb{K}$ et $b : I \rightarrow \mathbb{K}$ continues.
On retrouve les équations différentielles linéaires scalaires du premier ordre, étudiées en MP2I.
Par exemple : $x'(t) = \ln(t)x(t) + \cos(t)$ (ici, $I =]0, +\infty[$).
- $E = \mathbb{K}^n$: système différentiel linéaire d'inconnue vectorielle $x : t \mapsto (x_1(t), \dots, x_n(t))$, où les $x_i : I \rightarrow \mathbb{K}$ sont des fonctions dérivables, $a : I \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ continue et $b : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ continue.
Par exemple, avec $n = 2$:

$$\begin{cases} x'_1(t) = tx_1(t) + e^t x_2(t) + \cos(t) \\ x'_2(t) = x_1(t) + \sin(t)x_2(t) + 2 \end{cases} .$$

Dans cet exemple, on a $x'(t) = a(t)(x(t)) + b(t)$ avec

$$x : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto (x_1(t), x_2(t)) \end{cases} .$$

$$a : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^2) \\ t & \longmapsto \{(x, y) \mapsto (tx + e^t y, x + \sin(t)y)\} \end{cases} ,$$

$$b : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto (\cos(t), 2) \end{cases} .$$

- $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: équation différentielle linéaire d'inconnue matricielle $M : t \mapsto M(t)$, de la forme

$$M'(t) = \varphi(t)(M(t)) + B(t),$$

où $\varphi : I \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$ continue.

Par exemple :

$$M'(t) = Q(t)M(t) + B(t), \quad (\text{avec } Q : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \text{ continue}),$$

$$M'(t) = P^{-1}M(t)P + B(t), \quad (\text{avec } P \in GL_n(\mathbb{K})),$$

$$M'(t) = {}^tM(t) + B(t), \dots$$

Définition 3 (Solution d'une équation différentielle)

Soit une équation différentielle linéaire $(E) : x' = a(t)(x) + b(t)$, avec $a \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{L}(E))$ et $b \in \mathcal{C}^0(I, E)$. Une **solution** de (E) sur I est une fonction $x : I \rightarrow E$ dérivable telle que

$$\forall t \in I, \quad x'(t) = a(t)(x(t)) + b(t).$$

Propriété 4 (Régularité d'une solution)

Toute solution de (E) sur I est automatiquement de classe \mathcal{C}^1 .

Preuve

Par définition, toute solution $t \mapsto x(t)$ est dérivable sur I , et sa dérivée vérifie :

$$x' : t \mapsto a(t)(x(t)) + b(t).$$

Or, l'application $\theta : t \mapsto a(t)(x(t))$ est continue (puisque $\theta = B(a, x)$, où $B : \begin{cases} \mathcal{L}(E) \times E & \longrightarrow & E \\ (u, y) & \longmapsto & u(y) \end{cases}$ est bilinéaire en dimension finie, donc continue, et $a \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{L}(E))$, $x \in \mathcal{C}^0(I, E)$), ainsi que b , donc par composition et somme, x' est continue.

Vocabulaire

La fonction $t \mapsto b(t)$ est appelée **second membre** de l'équation $(E) : x' = a(t)(x) + b(t)$.

L'équation (E) est dite à **coefficients constants** lorsque $t \mapsto a(t)$ est une fonction constante.

L'équation $(H) : x' = a(t)(x)$ est appelée **équation homogène associée** à (E) .

Remarque (Ecriture d'une équation différentielle dans une base de E)

Fixons une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E . Notons, pour $t \in I$:

$$X(t) = [x(t)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n, \quad A(t) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(a(t)) = (a_{i,j}(t))_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),$$

$$B(t) = [b(t)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n,$$

alors on peut réécrire l'équation différentielle (E) sous la forme d'un système différentiel :

$$x'(t) = a(t)(x(t)) + b(t) \iff X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$$

$$\iff \forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad x'_i(t) = \sum_{j=1}^n a_{i,j}(t)x_j(t) + b_i(t).$$

Cas particulier intéressant : si $A(t)$ est diagonale pour tout $t \in I$, les équations du système différentiel seront découplées :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad x'_i(t) = a_{i,i}(t)x_i(t) + b_i(t),$$

et donc le système sera facile à résoudre.

La réduction des matrices va donc être utile dans les résolutions de systèmes différentiels linéaires, essentiellement quand $A(t) = A$ ne dépendra pas de t (systèmes "à coefficients constants").

2) Structure de l'ensemble des solutions

Notation

On notera $\mathcal{S}_I(E)$ l'ensemble des solutions de $(E) : x' = a(t)(x) + b(t)$ sur l'intervalle I .

De même, on notera $\mathcal{S}_I(H)$ l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée $(H) : x' = a(t)(x)$ sur l'intervalle I .

Propriété 5 (Structure des ensembles de solutions)

(i) L'ensemble $\mathcal{S}_I(H)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(I, E)$.

(ii) Si on connaît une solution $f_0 \in \mathcal{S}_I(E)$, alors on a

$$\mathcal{S}_I(E) = \{h + f_0, h \in \mathcal{S}_I(H)\}$$

("sol. générale de (E) " = "sol. générale de (H) " + "sol. particulière de (E) ").

Preuve

Facile.

Remarque

On précisera ce résultat plus loin : en fait, la dimension de $\mathcal{S}_I(H)$ est connue, et $\mathcal{S}_I(E)$ n'est jamais vide, quand on travaille avec des équations résolues en x' .

Propriété 6 (Principe de superposition)

Si f_1 est solution de $x' = a(t)(x) + b_1(t)$ sur I et si f_2 est solution de $x' = a(t)(x) + b_2(t)$ sur I , alors $f_1 + f_2$ est solution de $x' = a(t)(x) + b_1(t) + b_2(t)$ sur I (où b_1 et b_2 sont dans $\mathcal{C}^0(I, E)$).

Preuve

Evident.

Exemple

Résoudre $x' + x = 1 + e^{-t}$ sur \mathbb{R} .

3) Problème de Cauchy

Définition 7 (Problème de Cauchy linéaire d'ordre 1)

Un **problème de Cauchy linéaire d'ordre 1** est la donnée d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 et d'une condition initiale :

$$(PC) : \begin{cases} x'(t) = a(t)(x(t)) + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases},$$

avec $a \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{L}(E))$, $b \in \mathcal{C}^0(I, E)$, $t_0 \in I$, $x_0 \in E$.

Propriété 8 (Ecriture sous forme intégrale d'un problème de Cauchy)

Soit $a \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{L}(E))$ et $b \in \mathcal{C}^0(I, E)$. Alors, pour toute fonction $x \in \mathcal{C}^0(I, E)$, x est solution du problème de Cauchy (PC) si et seulement si

$$\forall t \in I, \quad x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t (a(s)(x(s)) + b(s)) ds.$$

Preuve

Voir les exercices (démonstration du théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire).

Remarque

Ainsi, une solution de (PC) sur I est une fonction continue $x : I \rightarrow E$ qui vérifie $\Phi(x) = x$, où

$$\Phi : \begin{cases} \mathcal{C}^0(I, E) & \longrightarrow & \mathcal{C}^0(I, E) \\ x & \longmapsto & \Phi(x) : \left(t \mapsto x_0 + \int_{t_0}^t (a(s)x(s) + b(s)) ds \right) \end{cases} .$$

Un problème de Cauchy est donc fondamentalement un **problème de point fixe**. Ce point de vue est essentiel pour montrer qu'un problème de Cauchy possède toujours une unique solution (voir plus loin, pour la démonstration du théorème de Cauchy-Lipschitz).

4) Equation différentielle scalaire d'ordre n

Définition 9 (Equation différentielle scalaire d'ordre n)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle **équation différentielle linéaire scalaire d'ordre n** résolue sur I une équation de la forme :

$$x^{(n)}(t) = a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) + b(t),$$

où les fonctions $a_i : I \rightarrow \mathbb{K}$ et $b : I \rightarrow \mathbb{K}$ sont continues.

Une **solution sur I** d'une telle équation est une fonction $x : I \rightarrow \mathbb{K}$ n -fois dérivable telle que

$$\forall t \in I, \quad x^{(n)}(t) = a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) + b(t).$$

Remarque

Une solution d'une telle équation différentielle est automatiquement de **classe \mathcal{C}^n sur I** puisque $x^{(n)}$ s'exprime comme somme et produits de fonctions continues.

Vocabulaire

Là aussi, on parle de **second membre** pour la fonction b , et on appelle **équation homogène** associée à

$$(E) : \quad x^{(n)}(t) = a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) + b(t)$$

l'équation sans second membre

$$(H) : \quad x^{(n)}(t) = a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t).$$

On emploiera également les notations $\mathcal{S}_I(E)$ et $\mathcal{S}_I(H)$ pour les ensembles de solutions.

Théorème 10 (Equivalence entre système et équation scalaire)

Soit

$$(E) : \quad x^{(n)}(t) = a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) + b(t)$$

une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre $n \geq 1$, avec $a_0, \dots, a_{n-1}, b \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$.

Soit $x \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$. On pose $X : t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K}^n)$.

Alors, x est solution de (E) sur I si et seulement si la fonction vectorielle X est solution du système différentiel :

$$(\Sigma) : \quad X'(t) = A(t)X(t) + B(t),$$

$$\text{où } A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ a_0(t) & a_1(t) & \dots & \dots & \dots & a_{n-1}(t) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \text{ et } B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n.$$

Preuve

Facile.

Remarque (A RETENIR)

En d'autres termes, on a une **bijection** entre les deux ensembles de solutions :

- les solutions de l'équation scalaire (E) sont exactement les premières composantes des solutions vectorielles du système différentiel (Σ).
- les solutions du système (Σ) sont exactement les fonctions vectorielles de la forme $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$, où x est une solution de l'équation scalaire (E).

Résoudre une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre n revient donc à résoudre un système différentiel d'ordre 1 à valeurs dans \mathbb{K}^n , d'où l'importance des systèmes différentiels.

Exemple

Réécrire l'équation scalaire $x'' = \cos(t)x' - \sin(t)x + e^t$ sous la forme d'un système différentiel.

Définition 11 (Problème de Cauchy linéaire scalaire d'ordre n)

Un **problème de Cauchy linéaire scalaire d'ordre n** est une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre n sous forme résolue, avec une condition initiale sur $(x, x', \dots, x^{(n-1)})$:

$$(PC) : \begin{cases} x^{(n)}(t) = a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \\ x'(t_0) = x'_0 \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)} \end{cases},$$

avec $a_0, \dots, a_{n-1}, b \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$, $t_0 \in I$ et $(x_0, x'_0, \dots, x_0^{(n-1)}) \in \mathbb{K}^n$.

Remarque

Les conditions initiales d'un tel problème de Cauchy se réécrivent vectoriellement $X(t_0) = X_0$, où

$$X = \begin{pmatrix} x \\ x' \\ \vdots \\ x^{(n-1)} \end{pmatrix}, \quad X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \\ \vdots \\ x_0^{(n-1)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Cela correspond évidemment à la condition initiale du système différentiel $X' = A(t)X + B(t)$ vérifié par X .

II Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire

1) Le théorème

Théorème 12 (Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire)

Soit $a \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{L}(E))$, $b \in \mathcal{C}^0(I, E)$, soit $(t_0, x_0) \in I \times E$. Alors le problème de Cauchy

$$(PC) : \begin{cases} x'(t) = a(t)x(t) + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

possède une unique solution $x \in \mathcal{C}^1(I, E)$.

Preuve

Voir les exercices.

Corollaire 13 (Théorème de Cauchy-Lipschitz pour les équations scalaires d'ordre n)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit a_0, a_1, \dots, a_{n-1} et b des fonctions continues $I \rightarrow \mathbb{K}$. Soit $t_0 \in I$ et $(x_0, x'_0, \dots, x_0^{(n-1)}) \in \mathbb{K}^n$. Alors le problème de Cauchy linéaire scalaire d'ordre n

$$(PC) : \begin{cases} x^{(n)}(t) = a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \\ x'(t_0) = x'_0 \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)} \end{cases},$$

possède une unique solution $x \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$.

Preuve

D'après le théorème 10, les solutions $x \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$ du problème de Cauchy scalaire d'ordre n (PC) sont exactement les premières composantes des solutions $X = (x, x', \dots, x^{(n-1)})$ du problème de Cauchy vectoriel :

$$(PC') : \begin{cases} X'(t) = A(t)X(t) + B(t) \\ X(t_0) = (x_0, x'_0, \dots, x_0^{(n-1)}) \end{cases},$$

où la matrice compagnon $A(t)$ et le vecteur $B(t)$ sont définis dans le th. 10. Il suffit alors d'appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz à (PC').

ATTENTION !

Il est essentiel de prendre **toutes les dérivées au même point t_0** dans les conditions initiales (pour avoir l'équivalence entre le problème de Cauchy scalaire d'ordre n et le problème de Cauchy vectoriel).

2) Dimension des espaces de solutions

Théorème 14 (Dimension des espaces de solutions)

Soit $a \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{L}(E))$, $b \in \mathcal{C}^0(I, E)$. On considère les équations différentielles :

$$(E) : x' = a(t)x + b(t), \quad (H) : x' = a(t)x.$$

- (i) Pour tout $t_0 \in I$, l'application $\varphi_{t_0} : \begin{cases} \mathcal{S}_I(H) & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x(t_0) \end{cases}$ est un isomorphisme linéaire, donc $\dim(\mathcal{S}_I(H)) = \dim(E)$.
- (ii) $\mathcal{S}_I(E)$ est non vide, c'est un sous-espace affine de $\mathcal{C}^1(I, E)$ de dimension $\dim(E)$, parallèle à $\mathcal{S}_I(H)$ (c'est-à-dire que $\mathcal{S}_I(E)$ s'obtient en translatant $\mathcal{S}_I(H)$ par n'importe quelle solution particulière de E).

Preuve

- (i) La linéarité de φ_{t_0} est évidente, et sa bijectivité résulte du théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire (appliqué à l'équation homogène (H)). Et on sait que deux espaces vectoriels isomorphes ont même dimension.
- (ii) La non-vacuité de (E) résulte également du théorème de Cauchy-Lipschitz, et on a déjà montré la structure affine de $\mathcal{S}_I(E)$.

Remarque

- Si une solution x de (H) s'annule en un point $t_0 \in I$, alors c'est la fonction nulle sur I (la seule solution du problème de Cauchy $x' = a(t)x$ avec la condition initiale $x(t_0) = 0$).
- De même, si deux solutions x_1, x_2 de (E) coïncident en un **même** point $t_0 \in I$, alors elles sont égales sur I (puisque $x_1 - x_2$ est solution de (H) et s'annule en $t_0 \in I$, donc c'est la fonction nulle, d'après le point précédent).

Corollaire 15 (Dimension des espaces de solutions pour les équations d'ordre n)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit a_0, a_1, \dots, a_{n-1} et b des fonctions continues $I \rightarrow \mathbb{K}$.

On note :

$$(E) : x^{(n)}(t) = a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) + b(t),$$

$$(H) : x^{(n)}(t) = a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t).$$

(i) Pour tout $t_0 \in I$, l'application

$$\varphi_{t_0} : \begin{cases} \mathcal{S}_I(H) & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ x & \longmapsto & (x(t_0), x'(t_0), \dots, x^{(n-1)}(t_0)) \end{cases}$$

est un isomorphisme, et donc $\mathcal{S}_I(H)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n .

(ii) $\mathcal{S}_I(E)$ est non vide, c'est un sous-espace affine de $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$ de dimension n , parallèle à $\mathcal{S}_I(H)$.

Preuve

- (i) On vérifie facilement que $\mathcal{S}_I(H)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel (un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$). La linéarité de φ_{t_0} est immédiate, sa bijectivité résulte du corollaire 13 appliqué à (H).
- (ii) La non-vacuité de $\mathcal{S}_I(E)$ résulte du théorème 13. Le reste se vérifie facilement (fixer une solution y_p de (E) et montrer à la main que y est solution de (E) ssi $y - y_p$ est solution de (H)).

Exemple

L'ensemble des solutions de (H) : $x'' = x$ sur \mathbb{R} est le plan $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(H) = \text{Vect}(x_1, x_2)$, où $x_1 : t \mapsto e^t$, $x_2 : t \mapsto e^{-t}$ (elles vérifient l'équation (H) et sont libres, donc elles forment une base de $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(H)$).

On a aussi $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(H) = \text{Vect}(\text{ch}, \text{sh})$.

ATTENTION !

Tous ces théorèmes ne s'appliquent qu'aux EDL **sous forme résolue**.

3) Exemples d'équations différentielles non résolubles

Il s'agit d'équations scalaires d'ordre n sous la forme :

$$\alpha_n(t)x^{(n)}(t) = \alpha_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \dots + \alpha_1(t)x'(t) + \alpha_0(t)x(t) + \beta(t),$$

où les α_i et β sont continues $I \rightarrow \mathbb{K}$ et la fonction $t \mapsto \alpha_n(t)$ s'annule sur I .

Méthode

Pour résoudre de telles équations sur I , on les résout d'abord sur les sous-intervalles $J \subset I$ sur lesquels α_n ne s'annule pas (en se ramenant à une forme résolue en $x^{(n)}$, sur laquelle on peut appliquer les

résultats précédents). Puis on essaye de "recoller" les solutions obtenues pour former des solutions valables sur tout I , c'est-à-dire des fonctions n -fois dérivables sur tout I .

Exemple

Résoudre $tx' - 2x = 0$ sur \mathbb{R} (problème de recollement en 0).

Exemple

Résoudre $t \ln(t)x' + x = 0$ sur $]0, +\infty[$ (problème de recollement en 1).

Exemple

Résoudre $tx' - x = t^2$ sur \mathbb{R} (problème de recollement en 0).

Exemple

Résoudre $t^2y'' - 2ty' + 2y = 2$ sur \mathbb{R} (problème de recollement en 0), en remarquant que $t \mapsto t$ et $t \mapsto t^2$ sont solutions de l'équation homogène.

Remarque

On voit sur ces exemples que lorsqu'une équation différentielle linéaire d'ordre n n'est pas résoluble en $x^{(n)}$ sur I , la dimension de l'espace affine des solutions sur I n'est plus nécessairement égale à n , elle peut diminuer ou augmenter.

III Equations différentielles à coefficients constants

Il s'agit des équations de la forme

$$x'(t) = a(x(t)) + b(t),$$

où $a \in \mathcal{L}(E)$ ne dépend pas de t , et $b \in \mathcal{C}^0(I, E)$.

Si $E = \mathbb{K}^n$, cela revient à considérer des systèmes différentiels de la forme :

$$X'(t) = AX(t) + B(t),$$

où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K}^n)$.

En exploitant l'équivalence entre systèmes différentiels et équations scalaires, les résultats de cette partie vont aussi permettre la résolution des équations différentielles linéaires scalaires d'ordre n à coefficients constants :

$$x^{(n)}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^{(i)}(t) + b(t),$$

où $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$ et $b \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$.

1) Propriétés de l'exponentielle de matrice / d'endomorphisme

Théorème 16 (Propriétés de l'exponentielle de matrice)

(i) $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est bien définie et continue.

(ii) Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, l'application $S : t \mapsto \exp(tA)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad S'(t) = A \exp(tA) = \exp(tA)A.$$

(iii) Si $AB = BA$, alors $\exp(A + B) = \exp(A) \exp(B) = \exp(B) \exp(A)$.

(iv) Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\exp(A) \in GL_n(\mathbb{K})$ et $\exp(A)^{-1} = \exp(-A)$.

Remarque

Ces propriétés restent valable pour l'exponentielle d'endomorphisme $\exp : \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathcal{L}(E)$.

Preuve

(i) La série de fonctions $\sum_{k \geq 0} \frac{A^k}{k!}$ converge normalement sur tout compact de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. En effet, sur toute boule fermée $B_f(0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}, R)$ avec $R > 0$, on a

$$\|A\| \leq R \implies \forall k \in \mathbb{N}, \left\| \frac{A^k}{k!} \right\| \leq \frac{\|A\|^k}{k!} \leq \frac{R^k}{k!},$$

et la série numérique $\sum_{k \geq 0} \frac{R^k}{k!}$ converge (vers e^R). Puisque $A \mapsto \frac{A^k}{k!}$ est continue pour tout $k \in \mathbb{N}$ (car polynomiale en les coefficients de A), on en déduit par convergence uniforme sur tout compact que $A \mapsto \exp(A)$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(ii) Fixons $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction vectorielle $g_k : t \mapsto \frac{(tA)^k}{k!} = \frac{t^k A^k}{k!}$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} , la série $\sum g_k$ converge simplement sur \mathbb{R} (d'après (i)), et la série $\sum g'_k$ converge normalement sur tout segment $[-R, R]$ avec $R > 0$, car pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\|g'_k\|_{\infty, [-R, R]} = \sup_{t \in [-R, R]} \left\| \frac{t^{k-1} A^k}{(k-1)!} \right\| \leq \frac{\|A\| (R \|A\|)^{k-1}}{(k-1)!},$$

et la série numérique $\sum_{k \geq 1} \frac{\|A\| (R \|A\|)^{k-1}}{(k-1)!}$ converge (vers $\|A\| e^{R \|A\|}$).

Donc par le théorème de dérivation d'une série de fonctions, on en déduit que $S \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$ et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad S'(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^{k-1} A^k}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k A^{k+1}}{k!} = A \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k A^k}{k!} \right) = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k A^k}{k!} \right) A$$

(par continuité du produit matriciel), d'où le résultat.

(iii) Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. D'après le point précédent, les fonctions :

$$\varphi : t \mapsto \exp(t(A + B)), \quad \psi : t \mapsto \exp(tA) \exp(tB),$$

sont de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} (la seconde par bilinéarité du produit matriciel), et on a

$$\varphi(0) = \exp(0) = I_n, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi'(t) = (A + B)\varphi(t),$$

ainsi que

$$\psi(0) = \exp(0)^2 = I_n, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \psi'(t) = A \exp(tA) \exp(tB) + \exp(tA) B \exp(tB).$$

Or, si $AB = BA$, alors $\exp(tA)B = B \exp(tA)$ (par continuité du produit matriciel), donc

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \psi'(t) = (A + B) \exp(tA) \exp(tB) = (A + B)\psi(t).$$

Ainsi, φ et ψ sont solutions du même problème de Cauchy linéaire d'ordre 1 (à valeurs dans $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) :

$$M'(t) = (A + B)M(t), \quad M(0) = I_n,$$

donc par le théorème de Cauchy-Lipschitz, $\varphi(t) = \psi(t)$ pour tout réel t . En particulier, $\varphi(1) = \psi(1)$, ce qui donne le résultat.

(iv) D'après le point précédent, on a

$$I_n = \exp(0) = \exp(A + (-A)) = \exp(A) \exp(-A) = \exp(-A) \exp(A),$$

ce qui montre bien que $\exp(A)$ est inversible, d'inverse $\exp(-A)$.

Remarque

La propriété (iii) peut aussi se montrer en effectuant un produit de Cauchy de séries matricielles (hors programme) :

$$\exp(A) \exp(B) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^k \frac{A^p}{p!} \frac{B^{k-p}}{(k-p)!} \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(A+B)^k}{k!} = \exp(A+B),$$

d'après la formule du binôme, qui est ici valable car A et B commutent.

ATTENTION !

Si $AB \neq BA$, on peut avoir $\exp(A+B) \neq \exp(A) \exp(B)$.

2) Résultat général

Théorème 17 (Solution d'un système différentiel à coefficients constants)

On considère le système différentiel à coefficients constants

$$(H) : X'(t) = AX(t),$$

avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et le problème de Cauchy

$$(PC) : \begin{cases} X'(t) = AX(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases},$$

avec $t_0 \in \mathbb{R}$ et $X_0 \in \mathbb{K}^n$.

(i) Les solutions de (H) sont les $X : t \mapsto e^{tA}V$ avec $V \in \mathbb{K}^n$.

(ii) L'unique solution de (PC) est $X : t \mapsto e^{(t-t_0)A}X_0$.

Preuve

- (i) On sait déjà que $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(H)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n , isomorphe à \mathbb{K}^n via l'application

$$\varphi_0 : \begin{cases} \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(H) & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ X & \longmapsto & X(0) \end{cases}$$

Pour tout $V \in \mathbb{K}^n$, il est facile de vérifier que $t \mapsto e^{tA}V$ est solution de (H) (en dérivant).
Donc

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(H) \supset \{t \mapsto e^{tA}V, V \in \mathbb{K}^n\} = Vect(t \mapsto e^{tA}E_j)_{1 \leq j \leq n},$$

où (E_1, \dots, E_n) est la base canonique de \mathbb{K}^n . Par l'isomorphisme réciproque φ_0^{-1} , on obtient que $(t \mapsto e^{tA}E_j)_{1 \leq j \leq n} = (\varphi_0^{-1}(E_j))_{1 \leq j \leq n}$ est une base de $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(H)$, ce qui montre que

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(H) = \{t \mapsto e^{tA}V, V \in \mathbb{K}^n\}.$$

- (ii) Parmi les éléments $X \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(H)$, on a

$$X(t_0) = X_0 \iff e^{t_0A}V = X_0 \iff V = (e^{t_0A})^{-1}X_0 \iff V = e^{-t_0A}X_0,$$

donc la solution de (PC) est $X : t \mapsto e^{tA}e^{-t_0A}X_0 = e^{(t-t_0)A}X_0$.

Remarque

- Lorsque $n = 1$, on retrouve la forme bien connue des solutions de $x' = ax$, où $a \in \mathbb{K}$: ce sont les fonctions $x : t \mapsto e^{ta}v = ve^{at}$, $v \in \mathbb{K}$ (on identifie $\mathcal{M}_1(\mathbb{K})$ à \mathbb{K}).
- On peut réécrire ce théorème sous la forme générale suivante :

Théorème

On considère l'équation différentielle à coefficients constants

$$(H) : x'(t) = a(x(t)),$$

avec $a \in \mathcal{L}(E)$, et le problème de Cauchy

$$(PC) : \begin{cases} x'(t) = a(x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases},$$

avec $t_0 \in \mathbb{R}$ et $x_0 \in E$.

(i) Les solutions de (H) sont les $x : t \mapsto e^{ta}(v)$ avec $v \in E$.

(ii) L'unique solution de (PC) est $x : t \mapsto e^{(t-t_0)a}(x_0)$.

ATTENTION !

Cela ne fonctionne plus si la matrice A dépend de t !

En effet, si $A \in C^0(I, \mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$, alors la fonction $X : t \mapsto e^{P(t)}V$, où P est une primitive de A , **n'est pas** solution de $X'(t) = A(t)X(t)$, car lorsqu'on dérive la série de fonctions $X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P(t)^k}{k!}V$, on a par multilinéarité :

$$\frac{d}{dt}(P(t)^k) = P'(t)P(t)^{k-1} + P(t)P'(t)P(t)^{k-2} + \dots + P(t)^{k-1}P'(t) \neq kP'(t)P(t)^{k-1},$$

car $P(t)P'(t) \neq P'(t)P(t)$ en général (une matrice et sa dérivée ne commutent pas nécessairement) .

3) Exemples de résolutions explicites

Exemple (Equations d'ordre 2 à coefficients constants)

Résolution de $ax'' + bx' + cx = 0$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$, d'inconnue $x \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

On retrouve l'expression des solutions vue en MP2I.

Exemple (Cas général diagonalisable)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisable et $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}AP = D$ est diagonale, de coefficients

diagonaux $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$.

Les solutions de $X' = AX$ sont les fonctions

$$X : t \mapsto \alpha_1 e^{\lambda_1 t} \vec{C}_1 + \dots + \alpha_n e^{\lambda_n t} \vec{C}_n, \quad (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n.$$

où $(\vec{C}_1, \dots, \vec{C}_n)$ sont les colonnes de la matrice de passage P .

Exemple (Système trigonalisable sur \mathbb{R} et non diagonalisable, ex 75 banque INP)

Résoudre le système différentiel :

$$\begin{cases} x' = -x - 4y \\ y' = x + 3y \end{cases}.$$

Exemple (Système diagonalisable sur \mathbb{C} mais pas sur \mathbb{R})

Résoudre le système différentiel :

$$\begin{cases} x'(t) = (\cos \theta)x(t) - (\sin \theta)y(t) \\ y'(t) = (\sin \theta)x(t) + (\cos \theta)y(t) \end{cases},$$

où $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ est un paramètre fixé.

Les solutions sont les fonctions (x, y) définies par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x(t) = e^{t \cos \theta} (a \cos(t \sin \theta) - b \sin(t \sin \theta)) \\ y(t) = e^{t \cos \theta} (a \sin(t \sin \theta) + b \cos(t \sin \theta)) \end{cases},$$

avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

IV Méthode de variation des constantes

1) Rappel : MVC pour les équations scalaires d'ordre 1

On considère l'équation différentielle (E) : $x'(t) = a(t)x(t) + b(t)$, où $a, b \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$, et son équation homogène associée (H) : $x'(t) = a(t)x(t)$.

Les solutions de (H) sur I sont les fonctions

$$x : t \mapsto \alpha e^{A(t)}, \quad \alpha \in \mathbb{K}$$

avec A une primitive de a sur I .

En effet, on vérifie facilement que la fonction $t \mapsto e^{A(t)}$ est une solution non nulle de (H). Par ailleurs $\mathcal{S}_I(H)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension 1, donc $\mathcal{S}_I(H) = \text{Vect}(t \mapsto e^{A(t)})$

Méthode (Méthode de variation de la constante)

Une fois que l'on connaît les solutions de (H), on peut chercher toutes les solutions de (E) sous la forme

$$x(t) = \lambda(t)e^{A(t)},$$

où $\lambda : I \rightarrow \mathbb{K}$ est une fonction dérivable.

En effet, toute fonction dérivable $x : I \rightarrow \mathbb{K}$ peut s'écrire sous cette forme, en posant $\lambda : t \mapsto x(t)e^{-A(t)}$ (ce qui est possible car $t \mapsto e^{A(t)}$ ne s'annule jamais sur I). Avec ces notations, x est solution de (E) si et seulement si

$$\forall t \in I, \quad \lambda'(t)e^{A(t)} + \lambda(t)A'(t)e^{A(t)} = a(t)\lambda(t)e^{A(t)} + b(t),$$

c'est-à-dire

$$\lambda'(t) = b(t)e^{-A(t)}$$

(les " $\lambda(t)$ " se sont simplifiés car $A'(t) = a(t)$).

Si on parvient à calculer une primitive de $t \mapsto b(t)e^{-A(t)}$, on obtient alors toutes les solutions de (E) :

$$x(t) = \left(\int_{t_0}^t b(s)e^{-A(s)} ds + \alpha \right) e^{A(t)}, \quad \alpha \in \mathbb{K}$$

(où $t_0 \in I$ quelconque).

Remarque

- Le choix de la primitive A n'influe en rien sur la forme des solutions.
- La "méthode de variation de la constante" ne fournit pas seulement une solution particulière de (E), elle fournit **directement toutes les solutions de (E)**.

2) Méthode de variation des constantes pour les équations vectorielles

On va maintenant généraliser la méthode de variation de la constante aux équations différentielles d'ordre 1 vectorielles (à valeurs dans un evn E de dimension finie), le but étant de déterminer les solutions de (E) : $x'(t) = a(t)x(t) + b(t)$ à partir de la forme des solutions de (H) : $x'(t) = a(t)x(t)$.

Définition 18 (Système fondamental de solutions)

Soit l'équation différentielle linéaire homogène

$$(H) : x'(t) = a(t)x(t),$$

avec $a \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{L}(E))$.

On appelle **système fondamental de solutions de (H)** toute base (x_1, \dots, x_n) de l'espace vectoriel $\mathcal{S}_I(H)$.

Remarque

Dans cette définition, $n = \dim(\mathcal{S}_I(H)) = \dim(E)$.

Définition 19 (Wronskien d'une famille de solutions)

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, soit $a \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{L}(E))$, et soit (x_1, \dots, x_n) une famille (non nécessairement libre) de solutions de $(H) : x'(t) = a(t)x(t)$.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . On appelle **wronskien** de la famille (x_1, \dots, x_n) l'application

$$w : \begin{cases} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ t & \longmapsto & w(t) = \det_{\mathcal{B}}(x_1(t), \dots, x_n(t)) = \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1(t), \dots, x_n(t))) \end{cases} .$$

Remarque

On a donc

$$w(t) = \begin{vmatrix} | & | & \dots & | \\ X_1(t) & X_2(t) & \dots & X_n(t) \\ | & | & \dots & | \end{vmatrix},$$

où $X_i(t) = [x_i(t)]_{\mathcal{B}} \in \mathbb{K}^n$ pour tout i .

Théorème 20 (Caractérisation des systèmes fondamentaux de solutions)

Avec les notations précédentes, il y a équivalence entre :

- (i) (x_1, \dots, x_n) est un système fondamental de solutions de (H) ;
- (ii) $\exists t_0 \in I, w(t_0) \neq 0$;
- (iii) $\forall t \in I, w(t) \neq 0$.

Dans ce cas, on dit que $Q(t) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1(t), \dots, x_n(t))$ est une **matrice fondamentale** de (H) .

Preuve

On sait que pour tout $t_0 \in I$, on a un isomorphisme :

$$\varphi_{t_0} : \begin{cases} \mathcal{S}_I(H) & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x(t_0) \end{cases} .$$

D'où l'équivalence :

$$(x_1, \dots, x_n) \text{ base de } \mathcal{S}_I(H) \iff (x_1(t_0), \dots, x_n(t_0)) \text{ base de } E \iff \det_{\mathcal{B}}(x_1(t_0), \dots, x_n(t_0)) \neq 0,$$

c'est-à-dire

$$(x_1, \dots, x_n) \text{ système fondamental} \iff w(t_0) \neq 0.$$

Remarque

Une matrice fondamentale $Q(t)$ est donc inversible pour tout $t \in I$. Ses colonnes $t \mapsto Q(t)E_j$ représentent un système fondamental de solutions de (H) .

Exemple (Cas des systèmes différentiels à coefficients constants)

En notant $(H) : X'(t) = AX(t)$, la matrice $Q(t) = e^{tA}$ est une matrice fondamentale de (H) , car les colonnes de $t \mapsto Q(t)$, c'est-à-dire la famille $(t \mapsto e^{tA}E_j)_{1 \leq j \leq n}$ forment une base de solutions de (H) .

Lemme 21 (Décomposition d'une fonction dérivable sur un système fondamental)

Soit (x_1, \dots, x_n) un système fondamental de solutions de $(H) : x'(t) = a(t)x(t)$.

Alors, toute fonction dérivable $x : I \rightarrow E$ peut s'écrire sous la forme

$$x(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(t)x_i(t),$$

avec les $\lambda_i : I \rightarrow \mathbb{K}$ des fonctions dérivables.

ATTENTION !

Ce résultat **ne dit pas** que toute fonction dérivable $x : I \rightarrow E$ est combinaison linéaire de (x_1, \dots, x_n)

(ce serait absurde, cela voudrait dire que toute fonction dérivable est solution de (H) ...). En effet, les coefficients λ_i **dépendent de t !**

Preuve

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E (indépendante de t). Soit $x : I \rightarrow E$ une fonction dérivable. Notons $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ les fonctions coordonnées de x dans la base \mathcal{B} . Les $\alpha_i : I \rightarrow \mathbb{K}$ sont dérivables (cf. CH.15 sur les fonctions vectorielles) et on a

$$\forall t \in I, \quad x(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(t) e_i.$$

Maintenant, on peut considérer, à $t \in I$ fixé, la base "mobile"

$$\mathcal{B}_t = (x_1(t), \dots, x_n(t))$$

(c'est une base de E car la famille de fonctions (x_1, \dots, x_n) est un système fondamental de solutions de (H) , donc son évaluation en tout point est une base de E). Pour tout $t \in I$, il existe $(\lambda_1(t), \dots, \lambda_n(t)) \in \mathbb{K}^n$ tel que

$$x(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) x_i(t).$$

Cela définit des fonctions $\lambda_i : I \rightarrow \mathbb{K}$. Reste à montrer qu'elles sont dérivables. La matrice de passage

$$Q(t) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_t) = \text{Mat}_{(e_1, \dots, e_n)}(x_1(t), \dots, x_n(t))$$

(qui est une matrice fondamentale de (H)) permet de relier les coordonnées $(\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t))$ et $(\lambda_1(t), \dots, \lambda_n(t))$:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1(t) \\ \vdots \\ \alpha_n(t) \end{pmatrix} = Q(t) \begin{pmatrix} \lambda_1(t) \\ \vdots \\ \lambda_n(t) \end{pmatrix},$$

donc

$$\begin{pmatrix} \lambda_1(t) \\ \vdots \\ \lambda_n(t) \end{pmatrix} = Q(t)^{-1} \begin{pmatrix} \alpha_1(t) \\ \vdots \\ \alpha_n(t) \end{pmatrix} = \frac{{}^t \text{com}(Q(t))}{\det(Q(t))} \begin{pmatrix} \alpha_1(t) \\ \vdots \\ \alpha_n(t) \end{pmatrix} = \frac{{}^t \text{com}(Q(t))}{w(t)} \begin{pmatrix} \alpha_1(t) \\ \vdots \\ \alpha_n(t) \end{pmatrix}.$$

Vu que les $x_i : I \rightarrow E$ sont dérivables (en tant que solutions de (H)), on a $Q : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dérivable, donc $t \mapsto {}^t \text{com}(Q(t))$ et $t \mapsto w(t)$ (qui sont polynomiales en les coefficients de $Q(t)$) sont dérivables, ce qui montre par produit que les fonctions $\lambda_i : I \rightarrow \mathbb{K}$ sont dérivables.

Méthode (Mise en oeuvre de la MVC sur un système différentiel)

Supposons que l'on connaisse un système fondamental de solutions du système différentiel homogène :

$$(H) : X'(t) = A(t)X(t),$$

noté (X_1, \dots, X_n) .

D'après le lemme précédent, on peut chercher toutes les solutions du système avec second membre

$$(E) : X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$$

sous la forme

$$X(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) X_i(t),$$

avec les $\lambda_i : I \rightarrow \mathbb{K}$ dérivables. Avec ces notations, X est solution de (E) si et seulement si

$$\forall t \in I, \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i'(t) X_i(t) + \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) X_i'(t) = A(t) \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i(t) X_i(t) \right) + B(t),$$

c'est-à-dire

$$\sum_{i=1}^n \lambda'_i(t) X_i(t) = B(t)$$

(puisque $X'_i(t) = A(t)X_i(t)$ pour tout i). On obtient alors pour tout $t \in I$ un système linéaire :

$$Q(t) \begin{pmatrix} \lambda'_1(t) \\ \vdots \\ \lambda'_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix},$$

où $Q(t)$ est la matrice carrée de colonnes $(X_1(t), \dots, X_n(t))$ (matrice fondamentale de (H)) et

$B(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$. Vu que $Q(t)$ est inversible pour tout $t \in I$, on obtient une unique solution :

$$\begin{pmatrix} \lambda'_1(t) \\ \vdots \\ \lambda'_n(t) \end{pmatrix} = Q(t)^{-1} \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix},$$

et on intègre ensuite (composante par composante) pour obtenir les coefficients $\lambda_i(t)$, puis la solution générale de (E) :

$$X(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) X_i(t).$$

ATTENTION !

Au moment de l'intégration des $\lambda'_i(t)$, ne pas oublier les constantes d'intégration pour avoir **toutes** les solutions de (E) , et pas seulement une solution particulière.

Exemple

Résoudre le système différentiel :

$$(E) : \begin{cases} x' = y \\ y' = -x + \cos(t) \end{cases}$$

avec la méthode de variation des constantes.

Notons $(H) : \begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}$ le système homogène associé.

Les solutions de ce système sont les fonctions $(x, y) = (x, x')$ avec $x'' = -x$. Facilement, on obtient que $X_1(t) = (\cos(t), -\sin(t))$ et $X_2(t) = (\sin(t), \cos(t))$ conviennent, et (X_1, X_2) forme un système fondamental de solutions de (H) , puisque

$$w(t) = \det_{(E_1, E_2)}(X_1(t), X_2(t)) = \begin{vmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

On peut donc chercher les solutions de (E) sous la forme générale :

$$X(t) = \lambda_1(t) X_1(t) + \lambda_2(t) X_2(t),$$

avec λ_1 et λ_2 dérivables sur \mathbb{R} .

Ces fonctions vérifient (E) si et seulement si

$$\lambda'_1(t) X_1(t) + \lambda'_2(t) X_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(t) \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda'_1(t) \\ \lambda'_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(t) \end{pmatrix}.$$

En inversant la matrice fondamentale, on obtient

$$\begin{pmatrix} \lambda_1'(t) \\ \lambda_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(t)\cos(t) \\ \cos^2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sin(2t)}{2} \\ \frac{1+\cos(2t)}{2} \end{pmatrix},$$

ce qui équivaut à

$$\begin{pmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\cos(2t)}{4} + \alpha \\ \frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4} + \beta \end{pmatrix}, \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

Ainsi, les solutions de (E) sont :

$$X(t) = \left(\frac{\cos(2t)}{4} + \alpha \right) \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix} + \left(\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4} + \beta \right) \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire (après simplification)

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cos(t) + \beta \sin(t) + \frac{\cos(t)}{4} + \frac{t \sin(t)}{2} \\ -\alpha \sin(t) + \beta \cos(t) + \frac{\sin(t)}{4} + \frac{t \cos(t)}{2} \end{pmatrix}, \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

V Equations linéaires scalaires d'ordre 2

On considère des équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2 résolues en x'' :

$$(E) : x''(t) = a(t)x'(t) + b(t)x(t) + c(t),$$

où $a, b, c \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$.

L'équation homogène associée est notée

$$(H) : x''(t) = a(t)x'(t) + b(t)x(t).$$

1) Système fondamental de solutions, wronskien

Définition 22 (Système fondamental de solutions)

On appelle **système fondamental de solutions de (H)** toute base (x_1, x_2) du plan vectoriel $\mathcal{S}_I(H)$.

Propriété 23 (Lien avec les systèmes différentiels)

(x_1, x_2) est un système fondamental de solutions de (H) si et seulement si

$$(X_1, X_2) = \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_1' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2' \end{pmatrix} \right)$$

est un système fondamental de solutions du système différentiel

$$(\Sigma) : X'(t) = A(t)X(t)$$

$$\text{avec } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b(t) & a(t) \end{pmatrix}.$$

Preuve

D'après le théorème 10, l'application

$$\theta : \begin{cases} \mathcal{S}_I(H) & \longrightarrow & \mathcal{S}_I(\Sigma) \\ x & \longmapsto & (x, x') \end{cases}$$

est un isomorphisme entre l'ensemble des solutions de (H) et l'ensemble des solutions de (Σ) . Donc (x_1, x_2) est une base de $\mathcal{S}_I(H)$ si et seulement si (X_1, X_2) est une base de $\mathcal{S}_I(\Sigma)$.

Définition 24 (Wronskien de deux solutions de (H))

Si x_1, x_2 sont deux solutions de (H) (non nécessairement libres), on appelle **wronskien de la famille (x_1, x_2)** l'application

$$w : \begin{cases} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ t & \longmapsto & w(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{vmatrix} = x_1(t)x_2'(t) - x_1'(t)x_2(t) \end{cases}.$$

Il s'agit du wronskien associé à la famille $(X_1, X_2) = ((x_1, x_1'), (x_2, x_2'))$ de solutions du système différentiel associé.

Théorème 25 (Caractérisation des systèmes fondamentaux)

Si x_1, x_2 sont deux solutions de (H) (non nécessairement libres), alors il y a équivalence entre :

- (i) (x_1, x_2) est un système fondamental de solutions de (H) ;
- (ii) $\exists t_0 \in I, w(t_0) \neq 0$;
- (iii) $\forall t \in I, w(t) \neq 0$.

Dans ce cas, on dit que $Q(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{pmatrix}$ est une matrice fondamentale de (H).

Preuve

Direct d'après les propositions 23 et 20.

Propriété 26 (Equation différentielle du wronskien)

Pour toute famille (x_1, x_2) de solutions de (H) , le wronskien w vérifie l'équation différentielle :

$$w'(t) = a(t)w(t).$$

Preuve

Facile.

Remarque

1. On retrouve ainsi le fait que w est soit identiquement nul, soit ne s'annule pas.
2. Si $(H) : x''(t) = b(t)x(t)$ (cas où $a(t) = 0$), alors le wronskien w est constant sur I .

Exemple

Wronskien d'un système fondamental de $x'' + bx = 0$, avec $b \in \mathbb{K}$ constant.

2) Méthode de variation des constantes

En exploitant encore l'équivalence entre équations scalaires d'ordre 2 et système différentiels à valeurs dans \mathbb{K}^2 , on peut adapter la méthode de variation des constantes des systèmes différentiels pour résoudre (E) à partir d'une base des solutions de (H) .

Méthode

Si on connaît (x_1, x_2) , un système fondamental de solutions de (H) , alors on peut chercher toutes les solutions de (E) sous la forme

$$x(t) = \lambda_1(t)x_1(t) + \lambda_2(t)x_2(t),$$

où λ_1 et λ_2 sont dérivables sur I .

Pour cela, on introduit la fonction vectorielle :

$$X : t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix},$$

et on cherche les solutions du système différentiel associé à (E) , noté $(\Sigma) : X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$, sous la forme

$$X(t) = \lambda_1(t)X_1(t) + \lambda_2(t)X_2(t),$$

où

$$(X_1, X_2) = \left(\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_1'(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} \right) \quad (\text{sys.t.fondamental de } (\Sigma)).$$

Avec ces notations, x est solution de (E) ssi X est solution de (Σ) ssi $\lambda_1'(t)X_1(t) + \lambda_2'(t)X_2(t) = B(t)$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} \lambda_1'(t)x_1(t) + \lambda_2'(t)x_2(t) = 0 \\ \lambda_1'(t)x_1'(t) + \lambda_2'(t)x_2'(t) = c(t) \end{cases}$$

ou encore

$$Q(t) \begin{pmatrix} \lambda_1'(t) \\ \lambda_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ c(t) \end{pmatrix},$$

où $Q(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{pmatrix}$ est la matrice fondamentale du système (Σ) .

Exemple

Résoudre $y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{1+x^2}$ sur \mathbb{R} .

Remarque (Autre présentation de la MVC)

Soit (x_1, x_2) un système fondamental de solutions de (H) : $x''(t) = a(t)x'(t) + b(t)x(t)$.

Alors les solutions du système différentiel homogène associé (Σ_H) : $X'(t) = A(t)X(t)$ sont les fonctions vectorielles :

$$X(t) = \alpha \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_1'(t) \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} x_2(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = Q(t)V, \quad V = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^2,$$

où $Q(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{pmatrix}$ est la matrice fondamentale de (Σ_H) .

Pour obtenir les solutions de (E) : $x''(t) = a(t)x'(t) + b(t)x(t) + c(t)$, on cherche les solutions du système différentiel associé (Σ_E) : $X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$ sous la forme générale :

$$X(t) = Q(t)\Lambda(t),$$

avec $\Lambda : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ dérivable ("on fait varier la constante vectorielle V ").

On a alors

$$X \text{ sol de } (\Sigma_E) \iff Q'(t)\Lambda(t) + Q(t)\Lambda'(t) = A(t)Q(t)\Lambda(t) + B(t),$$

mais $Q'(t) = A(t)Q(t)$ (par colonnes), donc

$$X \text{ sol de } (\Sigma_E) \iff Q(t)\Lambda'(t) = B(t).$$

3) Techniques de recherche de solutions

a) Méthode d'abaissement d'ordre

Si on connaît une solution de (H) , notée $x_0(t)$, qui ne s'annule pas sur I , alors on peut chercher les solutions de (E) sous la forme :

$$x(t) = \lambda(t)x_0(t), \text{ avec } \lambda \text{ deux fois dérivable sur } I.$$

On obtient alors, en injectant cette forme dans (E) , une équation d'ordre 1 en $z = \lambda'$ (les termes en λ se sont simplifiés), qu'on peut résoudre, et ensuite, on détermine $\lambda(t)$ en intégrant, puis les solutions $x(t)$ en remultipliant par $x_0(t)$.

Exemple

Résoudre (H) : $(t+1)x'' - x' - tx = 0$ sur $] -1, +\infty[$.

On remarque que $t \mapsto e^t$ est solution de (H) , donc on peut chercher les solutions de (H) sous la forme

$$x(t) = \lambda(t)e^t.$$

Une telle fonction x est solution de (H) si et seulement si (après simplification)

$$\lambda''(t) + \frac{2t+1}{t+1}\lambda'(t) = 0,$$

ou encore

$$\lambda''(t) + \left(2 - \frac{1}{t+1}\right)\lambda'(t) = 0.$$

C'est une équation d'ordre 1 en $z = \lambda'$, elle se résout facilement. On obtient

$$\lambda'(t) = \alpha(t+1)e^{-2t}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

En intégrant par parties, cela équivaut à

$$\lambda(t) = -\frac{\alpha}{4}(2t+3)e^{-2t} + \beta, \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,$$

et donc les solutions de (H) sur $I =] -1, +\infty[$ sont les fonctions

$$x(t) = -\frac{\alpha}{4}(2t+3)e^{-t} + \beta e^t, \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

b) Utilisation de séries entières

On peut également chercher si l'équation différentielle étudiée admet des solutions **développables en série entière** (cela englobe notamment les polynômes, les exponentielles, etc.).

Méthode (Recherche de solutions développables en séries entières)

On procède par "analyse-synthèse" :

- étant donnée une fonction développable en série entière $x(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ dans un intervalle $] -R; R[$, on détermine une condition nécessaire et suffisante sur la suite des coefficients (a_n) pour que x soit solution de (E) .
On obtient en général une relation de récurrence sur la suite (a_n) ;
- on essaie d'explicitier le terme général de la suite (a_n) en fonction de n , à partir de la relation de récurrence précédemment obtenue.
Cette étape donne les **éventuelles solutions DSE**;
- on vérifie ensuite que la ou les séries entières obtenues ont bien un rayon de convergence R non nul, et donc qu'elles définissent bien des fonctions.
Cette étape montre l'**existence** de solutions DSE sur $] -R; R[$;
- si possible, on essaie de "reconnaître" les solutions obtenues à partir de leur DSE, c'est-à-dire de les exprimer à l'aide de fonctions usuelles.

Remarque

Cette technique fonctionne bien lorsque les coefficients de l'équation différentielle (E) sont des polynômes en t , et lorsque le second membre $c(t)$ est lui-même développable en série entière.

Exemple

Déterminer les solutions DSE de (H) : $(t+1)x'' - x' - tx = 0$ sur $] -1, +\infty[$.

La fonction DSE $t \mapsto y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ est solution de (E) si et seulement si

$$a_2 = \frac{a_1}{2}, \quad \forall n \geq 1, \quad a_{n+2} = -\left(\frac{n-1}{n+2}\right) a_{n+1} + \frac{a_{n-1}}{(n+1)(n+2)}.$$

Par une récurrence pénible, on montre que cela équivaut à

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad a_{2k} = \frac{ka_1 - (k-1)a_0}{(2k)!}, \quad a_{2k+1} = \frac{ka_0 - (k-1)a_1}{(2k+1)!},$$

et $(a_0, a_1) \in \mathbb{R}^2$ ne sont pas imposés.

En choisissant $(a_0, a_1) = (1, 1)$, on obtient $a_n = 1/n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc on obtient une première solution DSE, qu'on reconnaît :

$$x_1(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} = e^t.$$

En choisissant $(a_0, a_1) = (-1, 1)$, on obtient un second DSE

$$x_2(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2k-1}{(2k)!} t^{2k} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2k-1}{(2k+1)!} t^{2k+1},$$

qui est de rayon de convergence $R = +\infty$, mais est plus difficile à reconnaître :

$$x_2(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2k-1}{(2k)!} t^{2k} - \int_0^t \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2k-1}{(2k)!} u^{2k} du \right) = t \operatorname{sh}(t) - \operatorname{ch}(t) - \int_0^t (u \operatorname{sh}(u) - \operatorname{ch}(u)) du.$$

Par IPP, on obtient

$$x_2(t) = (t+2) \operatorname{sh}(t) - (t+1) \operatorname{ch}(t) = \frac{e^t - (2t+3)e^{-t}}{2}.$$

On a trouvé deux solutions DSE et linéairement indépendantes de (H), donc puisque $\mathcal{S}_I(H)$ est de dimension 2 (équation résolue en x'' sur l'intervalle I), on a toutes les solutions de (H) :

$$\mathcal{S}_I(H) = \operatorname{Vect}(x_1, x_2) = \operatorname{Vect}(t \mapsto e^t, t \mapsto (2t+3)e^{-t}),$$

et elles sont toutes DSE sur cet exemple.

c) Changement de variable / d'inconnue**Exemple (Changement de variable)**

Résolution sur $I =] -1; 1[$ de l'équation différentielle (H) : $(1-t^2)y'' - ty' + y = 0$ en utilisant le changement de variable $t = \cos x$.

Solution Pour $y :] -1; 1[\rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable, posons $z = y \circ \cos$, qui est deux fois dérivable sur $]0; \pi[$ (et on a $y = z \circ \arccos$).

On a $z(x) = y(\cos x)$ et $z''(x) = -(\cos x) \times y'(\cos x) + (\sin^2 x) \times y''(\cos x)$, donc

$$y \text{ solution de (H)} \iff z''(x) + z(x) = 0 \iff z(x) = A \cos x + B \sin x, \quad (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$

Les solutions de (H) sur $] -1; 1[$ sont donc

$$y(t) = At + B \sin(\arccos(t)) = At + B\sqrt{1-t^2}, \quad (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$

Exemple (Changement d'inconnue)

On considère l'équation différentielle

$$(E) : x^2 y'' + 4xy' + (2 + x^2)y = 0.$$

1. Résoudre (E) sur $] -\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ en posant $u = x^2 y$.
2. Existe-t-il des solutions de (E) définies sur \mathbb{R} ?

Solution

1. En posant $u(x) = x^2 y(x)$, on a $u'(x) = 2xy(x) + x^2 y'(x)$ et $u''(x) = 2y(x) + 4xy'(x) + x^2 y''(x)$, donc

$$(E) \iff u''(x) + u(x) = 0 \iff u(x) = A \cos(x) + B \sin(x), \quad (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$

En divisant par x^2 , on en déduit les solutions de (E) sur $] -\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$:

$$y(x) = \frac{u(x)}{x^2} = \frac{A \cos(x) + B \sin(x)}{x^2}, \quad (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$

2. Les éventuelles solutions de (E) définies sur \mathbb{R} sont de la forme :

$$y(x) = \begin{cases} \frac{A \cos(x) + B \sin(x)}{x^2} & \text{si } x > 0 \\ \frac{C \cos(x) + D \sin(x)}{x^2} & \text{si } x < 0 \end{cases},$$

avec $(A, B, C, D) \in \mathbb{R}^4$, et sont deux fois dérivables en 0. Puisqu'on a

$$y(x) = \frac{A + Bx - \frac{A}{2}x^2 + o(x^2)}{x^2} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} - \frac{A}{2} + o(1),$$

la continuité de y en 0 impose que $A = B = 0$ (sinon, y possède une limite infinie en 0^+). Idem au voisinage de 0^- , on doit avoir $C = D = 0$.

Finalement, la seule solution possible sur \mathbb{R} est la fonction nulle, et elle convient car elle est bien deux fois dérivable sur \mathbb{R} .

L'équation (E) possède donc une seule solution définie sur \mathbb{R} : la fonction nulle.