CH16 : Equations différentielles linéaires

Table des matières

I Généralités . . . 4
- 1) Définitions . . . 4
- 2) Structure de l'ensemble des solutions . . . 7
- 3) Problème de Cauchy . . . 7
- 4) Equation différentielle scalaire d'ordre n . . . 8

II Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire . . . 11
- 1) Le théorème . . . 11
- 2) Dimension des espaces de solutions . . . 12
- 3) Exemples d'équations différentielles non résolubles . . . 13

III Equations différentielles à coefficients constants . . . 14
- 1) Propriétés de l'exponentielle de matrice / d'endomorphisme . . . 14
- 2) Résultat général . . . 15
- 3) Exemples de résolutions explicites . . . 16

IV Méthode de variation des constantes . . . 18
- 1) Rappel : MVC pour les équations scalaires d'ordre 1 . . . 18
- 2) Méthode de variation des constantes pour les équations vectorielles . . . 18

V Equations linéaires scalaires d'ordre 2 . . . 23
- 1) Système fondamental de solutions, wronskien . . . 23
- 2) Méthode de variation des constantes . . . 24
- 3) Techniques de recherche de solutions . . . 26
  - a) Méthode d'abaissement d'ordre . . . 26
  - b) Utilisation de séries entières . . . 26
  - c) Changement de variable / d'inconnue . . . 27

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie.
On rappelle que l'ensemble $\mathcal{L}(E)$ (formé des endomorphismes de E) est également un espace normé de dimension finie, mais également une algèbre normée pour les lois $(+, \cdot, \circ)$: en effet, étant donnée une norme $\| \, . \, \|$ sur E, la norme "triple" $||| \, . \, |||$ définie par

$$\forall u \in \mathcal{L}(E), \qquad |||u||| = \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|}$$

est une norme sur $\mathcal{L}(E)$ vérifiant :

$$|||Id_E||| = 1, \qquad \forall (u, v) \in \mathcal{L}(E)^2, \quad |||u \circ v||| \leq |||u||| \, |||v|||.$$

De même, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une algèbre normée, pour la norme $||| \, . \, |||$ définie par :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \qquad |||A||| = \sup_{V \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}} \frac{\|AV\|}{\|V\|},$$

où $\| \, . \, \|$ est n'importe quelle norme sur $\mathbb{K}^n$. On a

$$|||I_n||| = 1, \qquad \forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2, \quad |||AB||| \leq |||A||| \, |||B|||.$$

I Généralités

1) Définitions

Définition 1 (Equation différentielle d'ordre 1)

(i) *On appelle* **équation différentielle linéaire d'ordre 1** *une équation de la forme :*

$$\alpha(t)(x'(t)) = \beta(t)(x(t)) + \gamma(t),$$

où $\alpha : I \to \mathcal{L}(E)$, $\beta : I \to \mathcal{L}(E)$ et $\gamma : I \to E$ sont des applications continues données, et l'inconnue $x : I \to E$ est une fonction dérivable.

(ii) *L'équation est dite* **résoluble en x'** *lorsque $\forall t \in I, \ \alpha(t) \in GL(E)$. Dans ce cas, l'équation est équivalente à* **l'équation résolue en x'** *:*

$$x'(t) = a(t)(x(t)) + b(t),$$

où $\forall t \in I, \ a(t) = \alpha(t)^{-1} \circ \beta(t)$ et $b(t) = \alpha(t)^{-1}(\gamma(t))$.

Notation
On pourrra abréger "equation différentielle linéaire" par "EDL".

Lemme 2 (Continuité des coefficients de la forme résolue)
Avec les notations précédentes, on a encore $a : I \to \mathcal{L}(E)$ continue et $b : I \to E$ continue.

Preuve

- L'inversion $i : \left\{ \begin{array}{ccc} GL(E) \subset \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ u & \longmapsto & u^{-1} \end{array} \right.$ est continue car pour tout $u \in GL(E)$, on a

$$u + h = u \circ (Id + u^{-1} \circ h),$$

et pour $|||h||| < \frac{1}{|||u^{-1}|||}$, on a $Id + u^{-1} \circ h \in GL(E)$ (cf. CH.15 sur les séries de matrices), et

$$(Id + u^{-1} \circ h)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-u^{-1} \circ h)^k$$

(où cette série géométrique d'endomorphismes est absolument convergente, donc convergente). Donc pour $|||h|||$ assez petit, $u+h \in GL(E)$ et

$$(u+h)^{-1} = (Id + u^{-1}\circ h)^{-1} \circ u^{-1} = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} (-u^{-1}\circ h)^k\right) \circ u^{-1},$$

ce qui entraîne

$$|||(u+h)^{-1} - u^{-1}||| = ||| \left(\sum_{k=1}^{+\infty} (-u^{-1}\circ h)^k\right) \circ u^{-1}||| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} |||u^{-1}|||^{k+1}|||h|||^k = O(|||h|||),$$

donc $(u+h)^{-1} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} u^{-1}$.

- Par composition, l'application $(i\circ\alpha) : t \mapsto \alpha(t)^{-1}$ est donc continue de I dans $\mathcal{L}(E)$.
- Les applications $B_1 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E)\times\mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ (u,v) & \longmapsto & u\circ v \end{array} \right.$ et $B_2 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E)\times E & \longrightarrow & E \\ (u,x) & \longmapsto & u(x) \end{array} \right.$ sont bilinéaires en dimension finie, donc continues. On en déduit par composition que les applications $a = B_1(i\circ\alpha, \beta) : I \to \mathcal{L}(E)$ et $b = B_2(i\circ\alpha,\gamma) : I \to E$ sont continues.

Notation
Dans la suite, on considèrera essentiellement des équations différentielles sous forme résolue en x' :

$$(E): \quad x'(t) = a(t)(x(t)) + b(t),$$

avec $a : I \to \mathcal{L}(E)$ et $b : I \to E$ continues. On emploiera fréquemment la notation abrégée suivante :

$$(E): \quad x' = a(t)(x) + b(t),$$

où l'on ne rappelle pas que l'inconnue x dépend de la variable réelle t, ou, de manière encore plus abrégée :

$$(E): \quad x' = a(x) + b.$$

Exemple

- $\boxed{E = \mathbb{K}}$: $x'(t) = a(t)x(t) + b(t)$, avec $a : I \to \mathbb{K}$ et $b : I \to \mathbb{K}$ continues.
  On retrouve les équations différentielles linéaires scalaires du premier ordre, étudiées en MP2I.
  Par exemple : $x'(t) = \ln(t)x(t) + \cos(t)$ (ici, $I =]0, +\infty[$).
- $\boxed{E = \mathbb{K}^n}$: système différentiel linéaire d'inconnue vectorielle $x : t \mapsto (x_1(t), \cdots, x_n(t))$, où les $x_i : I \to \mathbb{K}$ sont des fonctions dérivables, $a : I \to \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ continue et $b : I \to \mathbb{K}^n$ continue.
  Par exemple, avec $n = 2$:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x_1'(t) & = & tx_1(t) + e^t x_2(t) + \cos(t) \\ x_2'(t) & = & x_1(t) + \sin(t)x_2(t) + 2 \end{array} \right. .$$

  Dans cet exemple, on a $x'(t) = a(t)(x(t)) + b(t)$ avec

$$x : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (x_1(t), x_2(t)) \end{array} \right. .$$

$$a : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathcal{L}(\mathbb{R}^2) \\ t & \longmapsto & \{(x,y) \mapsto (tx + e^t y, x + \sin(t)y)\} \end{array} \right. ,$$

$$b : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (\cos(t), 2) \end{array} \right. .$$

- $\boxed{E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$: équation différentielle linéaire d'inconnue matricielle $M : t \mapsto M(t)$, de la forme

$$M'(t) = \varphi(t)(M(t)) + B(t),$$

où $\varphi : I \to \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$ continue.
Par exemple :

$$M'(t) = Q(t)M(t) + B(t), \quad (\text{ avec } Q : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \text{ continue }),$$

$$M'(t) = P^{-1}M(t)P + B(t), \quad (\text{ avec } P \in GL_n(\mathbb{K})),$$

$$M'(t) = {}^tM(t) + B(t), \cdots$$

Définition 3 (Solution d'une équation différentielle)
Soit une équation différentielle linéaire $(E) : x' = a(t)(x)+b(t)$, avec $a \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{L}(E))$ et $b \in \mathcal{C}^0(I, E)$. Une **solution** *de (E) sur I est une fonction $x : I \to E$ dérivable telle que*

$$\forall t \in I, \qquad x'(t) = a(t)(x(t)) + b(t).$$

Propriété 4 (Régularité d'une solution)
Toute solution de (E) sur I est automatiquement de classe $\mathcal{C}^1$.

Preuve
Par définition, toute solution $t \mapsto x(t)$ est dérivable sur I, et sa dérivée vérifie :

$$x' : t \mapsto a(t)(x(t)) + b(t).$$

Or, l'application $\theta : t \mapsto a(t)(x(t))$ est continue (puisque $\theta = B(a, x)$, où $B : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) \times E & \longrightarrow & E \\ (u, y) & \longmapsto & u(y) \end{array} \right.$ est bilinéaire en dimension finie, donc continue, et $a \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{L}(E))$, $x \in \mathcal{C}^0(I, E)$), ainsi que b, donc par composition et somme, x' est continue.

Vocabulaire
La fonction $t \mapsto b(t)$ est appelée **second membre** de l'équation (E) : $x' = a(t)(x) + b(t)$.
L'équation (E) est dite **à coefficients constants** lorsque $t \mapsto a(t)$ est une fonction constante.
L'équation (H) : $x' = a(t)(x)$ est appelée **équation homogène associée** à (E).

Remarque (Ecriture d'une équation différentielle dans une base de E)
Fixons une base $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ de E. Notons, pour $t \in I$:

$$X(t) = [x(t)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n, \qquad A(t) = Mat_{\mathcal{B}}(a(t)) = (a_{i,j}(t))_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),$$

$$B(t) = [b(t)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n,$$

alors on peut réécrire l'équation différentielle (E) sous la forme d'un système différentiel :

$$x'(t) = a(t)(x(t)) + b(t) \iff X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$$

$$\iff \forall i \in \{1, \cdots, n\}, \quad x_i'(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}(t)x_j(t) + b_i(t).$$

Cas particulier intéressant : si $A(t)$ est diagonale pour tout $t \in I$, les équations du système différentiel seront découplées :

$$\forall i \in \{1, \cdots, n\}, \quad x_i'(t) = a_{i,i}(t)x_i(t) + b_i(t),$$

et donc le système sera facile à résoudre.
La réduction des matrices va donc être utile dans les résolutions de systèmes différentiels linéaires, essentiellement quand $A(t) = A$ ne dépendra pas de t (systèmes "à coefficients constants").

2) Structure de l'ensemble des solutions

Notation

On notera $\mathcal{S}_I(E)$ l'ensemble des solutions de (E) : $x' = a(t)(x) + b(t)$ sur l'intervalle I.
De même, on notera $\mathcal{S}_I(H)$ l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée (H) : $x' = a(t)(x)$ sur l'intervalle I.

Propriété 5 (Structure des ensembles de solutions)

(i) L'ensemble $\mathcal{S}_I(H)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(I, E)$.

(ii) Si on connaît une solution $f_0 \in \mathcal{S}_I(E)$, alors on a

$$\mathcal{S}_I(E) = \{h + f_0,\ h \in \mathcal{S}_I(H)\}$$

("sol. générale de (E)" = "sol. générale de (H)" + "sol. particulière de (E)").

Preuve

Facile.

Remarque

On précisera ce résultat plus loin : en fait, la dimension de $\mathcal{S}_I(H)$ est connue, et $\mathcal{S}_I(E)$ n'est jamais vide, quand on travaille avec des équations résolues en x'.

Propriété 6 (Principe de superposition)

Si f_1 est solution de $x' = a(t)(x) + b_1(t)$ sur I et si f_2 est solution de $x' = a(t)(x) + b_2(t)$ sur I, alors $f_1 + f_2$ est solution de $x' = a(t)(x) + b_1(t) + b_2(t)$ sur I (où b_1 et b_2 sont dans $\mathcal{C}^0(I, E)$).

Preuve

Evident.

Exemple

Résoudre $x' + x = 1 + e^{-t}$ sur $\mathbb{R}$.

3) Problème de Cauchy

Définition 7 (Problème de Cauchy linéaire d'ordre 1)

Un **problème de Cauchy linéaire d'ordre 1** *est la donnée d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 et d'une condition initiale :*

$$(PC) : \begin{cases} x'(t) = a(t)(x(t)) + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases},$$

avec $a \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{L}(E))$, $b \in \mathcal{C}^0(I, E)$, $t_0 \in I$, $x_0 \in E$.

Propriété 8 (Ecriture sous forme intégrale d'un problème de Cauchy)

Soit $a \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{L}(E))$ et $b \in \mathcal{C}^0(I, E)$. Alors, pour toute fonction $x \in \mathcal{C}^0(I, E)$, x est solution du problème de Cauchy (PC) si et seulement si

$$\forall t \in I, \qquad x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} (a(s)(x(s)) + b(s))\, ds.$$

Preuve

Si x est solution de (PC), alors x est de classe $\mathcal{C}^1$ (cf. prop. 4) et vérifie $x'(t) = a(t)(x(t)) + b(t)$. En intégrant de t_0 à t, on obtient le résultat.
Réciproquement, si $x : I \to E$ continue vérifie

$$\forall t \in I, \qquad x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} (a(s)(x(s)) + b(s))\, ds,$$

alors, par le théorème fondamental de l'analyse, x est dérivable et $x'(t) = a(t)(x(t)) + b(t)$. De plus, $x(t_0) = x_0 + \int_{t_0}^{t_0} \cdots = x_0$, donc x est solution de (PC).

Remarque
Ainsi, une solution de (PC) sur I est une fonction continue $x : I \to E$ qui vérifie $\Phi(x) = x$, où

$$\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^0(I,E) & \longrightarrow & \mathcal{C}^0(I,E) \\ x & \longmapsto & \Phi(x) : \left(t \mapsto x_0 + \int_{t_0}^{t} (a(s)(x(s)) + b(s))ds\right) \end{array} \right. .$$

Un problème de Cauchy est donc fondamentalement un **problème de point fixe**. *Ce point de vue est essentiel pour montrer qu'un problème de Cauchy possède toujours une unique solution (voir plus loin, pour la démonstration du théorème de Cauchy-Lipschitz).*

4) Equation différentielle scalaire d'ordre n

Définition 9 (Equation différentielle scalaire d'ordre n)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle **équation différentielle linéaire scalaire d'ordre n** *résolue sur I une équation de la forme :*

$$x^{(n)}(t) = a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) + b(t),$$

où les fonctions $a_i : I \to \mathbb{K}$ et $b : I \to \mathbb{K}$ sont continues.
Une **solution sur I** *d'une telle équation est une fonction $x : I \to \mathbb{K}$ n-fois dérivable telle que*

$$\forall t \in I, \qquad x^{(n)}(t) = a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) + b(t).$$

Remarque
Une solution d'une telle équation différentielle est automatiquement **de classe $\mathcal{C}^n$ sur I** *puisque $x^{(n)}$ s'exprime comme somme et produits de fonctions continues.*

Vocabulaire
Là aussi, on parle de **second membre** pour la fonction b, et on appelle **équation homogène** associée à

$$(E) : \qquad x^{(n)}(t) = a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) + b(t)$$

l'équation sans second membre

$$(H) : \qquad x^{(n)}(t) = a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t).$$

On emploiera également les notations $\mathcal{S}_I(E)$ et $\mathcal{S}_I(H)$ pour les ensembles de solutions.

Théorème 10 (Equivalence entre système et équation scalaire)
Soit
$$(E): \; x^{(n)}(t) = a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) + b(t)$$
une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre $n \geq 1$*, avec* $a_0, \cdots, a_{n-1}, b \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$.

Soit $x \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$*. On pose* $X : t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K}^n)$.

Alors, x *est solution de* (E) *sur* I *si et seulement si la fonction vectorielle* X *est solution du système différentiel :*
$$(\Sigma): \quad X'(t) = A(t)X(t) + B(t),$$
où $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ a_0(t) & a_1(t) & \dots & \dots & \dots & a_{n-1}(t) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *et* $B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$.

Preuve
Facile.

Remarque (A RETENIR)
En d'autres termes, on a une **bijection** *entre les deux ensembles de solutions :*

- *les solutions de l'équation scalaire* (E) *sont exactement les premières composantes des solutions vectorielles du système différentiel* (Σ).
- *les solutions du système* (Σ) *sont exactement les fonctions vectorielles de la forme* $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$*, où* x *est une solution de l'équation scalaire* (E).

Résoudre une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre n *revient donc à résoudre un système différentiel d'ordre* 1 *à valeurs dans* $\mathbb{K}^n$*, d'où l'importance des systèmes différentiels.*

Exemple
Réécrire l'équation scalaire $x'' = \cos(t)x' - \sin(t)x + e^t$ *sous la forme d'un système différentiel.*

Définition 11 (Problème de Cauchy linéaire scalaire d'ordre n)
Un **problème de Cauchy linéaire scalaire d'ordre n** *est une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre* n *sous forme résolue, avec une condition initiale sur* $(x, x', \cdots, x^{(n-1)})$ *:*
$$(PC): \begin{cases} x^{(n)}(t) = a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \\ x'(t_0) = x'_0 \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)} \end{cases},$$
avec $a_0, \cdots, a_{n-1}, b \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$*,* $t_0 \in I$ *et* $(x_0, x'_0, \cdots, x_0^{(n-1)}) \in \mathbb{K}^n$.

Remarque

Les conditions initiales d'un tel problème de Cauchy se réécrivent vectoriellement $X(t_0) = X_0$, *où*

$$X = \begin{pmatrix} x \\ x' \\ \vdots \\ x^{(n-1)} \end{pmatrix}, \qquad X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_0' \\ \vdots \\ x_0^{(n-1)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Cela correspond évidemment à la condition initiale du système différentiel $X' = A(t)X + B(t)$ *vérifié par* X.

II Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire

1) Le théorème

Théorème 12 (Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire)
Soit $a \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{L}(E))$, $b \in \mathcal{C}^0(I, E)$, soit $(t_0, x_0) \in I \times E$. Alors le problème de Cauchy

$$(PC) : \left\{ \begin{array}{l} x'(t) = a(t)(x(t)) + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{array} \right.$$

possède une unique solution $x \in \mathcal{C}^1(I, E)$.

Preuve (traitée en MPI*)
Difficile, nous l'admettrons ici, mais donnons quand même les idées principales :

- On peut réécrire (PC) comme un problème de point fixe (cf. prop. 8) : on cherche $x \in \mathcal{C}^0(I, E)$ telle que $\Phi(x) = x$, où

$$\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^0(I, E) & \longrightarrow & \mathcal{C}^0(I, E) \\ x & \longmapsto & \Phi(x) : \left(t \mapsto x_0 + \int_{t_0}^{t} (a(s)(x(s)) + b(s))ds\right) \end{array} \right. .$$

- On construit par récurrence la suite de fonctions (x_n) :

$$x_0 : t \mapsto x_0,$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad x_{n+1} = \Phi(x_n),$$

  et on montre que (x_n) converge uniformément sur tout segment $[a, b] \subset I$ vers une fonction $x \in \mathcal{C}^0(I, E)$ telle que $\Phi(x) = x$.
  Cela se fait en majorant $\|x_{n+1} - x_n\|_{\infty,[a,b]}$ et en montrant que la série $\sum(x_{n+1} - x_n)$ converge normalement sur tout segment $[a, b]$ contenant t_0.
  La clef est l'inégalité suivante, qui se montre par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in [a, b], \qquad \|x_{n+1}(t) - x_n(t)\| \leq M \frac{\alpha^n}{(n+1)!} |t - t_0|^{n+1},$$

  où $M = \alpha\|x_0\| + \beta$, $\alpha = \sup_{t \in [a,b]} \|\!|a(t)|\!\|$, $\beta = \sup_{t \in [a,b]} \|b(t)\|$.
  Ceci montre l'existence d'un point fixe de Φ, donc une solution du problème de Cauchy.
- L'unicité du point fixe x s'obtient encore en majorant $\|x - \tilde{x}\|_{\infty,[a,b]}$, où x et $\tilde{x}$ sont deux points fixes de Φ.

Corollaire 13 (Théorème de Cauchy-Lipschitz pour les équations scalaires d'ordre n)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$ et b des fonctions continues $I \to \mathbb{K}$. Soit $t_0 \in I$ et $(x_0, x_0', \cdots, x_0^{(n-1)}) \in \mathbb{K}^n$. Alors le problème de Cauchy linéaire scalaire d'ordre n

$$(PC) : \left\{ \begin{array}{l} x^{(n)}(t) = a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \\ x'(t_0) = x_0' \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)} \end{array} \right. ,$$

possède une unique solution $x \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$.

Preuve
D'après le théorème 10, les solutions $x \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$ du problème de Cauchy scalaire d'ordre n (PC) sont exactement les premières composantes des solutions $X = (x, x', \cdots, x^{(n-1)})$ du problème de Cauchy vectoriel :

$$(PC') : \left\{ \begin{array}{l} X'(t) = A(t)X(t) + B(t) \\ X(t_0) = (x_0, x_0', \cdots, x_0^{(n-1)}) \end{array} \right. ,$$

où la matrice compagnon $A(t)$ et le vecteur $B(t)$ sont définis dans le th. 10. Il suffit alors d'appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz à (PC').

ATTENTION !
Il est essentiel de prendre **toutes les dérivées au même point t_0** dans les conditions initiales (pour avoir l'équivalence entre le problème de Cauchy scalaire d'ordre n et le problème de Cauchy vectoriel).

2) Dimension des espaces de solutions

Théorème 14 (Dimension des espaces de solutions)
Soit $a \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{L}(E))$, $b \in \mathcal{C}^0(I, E)$. On considère les équations différentielles :

$$(E): \ x' = a(t)(x) + b(t), \qquad (H): \ x' = a(t)(x).$$

(i) *Pour tout $t_0 \in I$, l'application $\varphi_{t_0} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{S}_I(H) & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x(t_0) \end{array} \right.$ est un isomorphisme linéaire, donc $\dim(\mathcal{S}_I(H)) = \dim(E)$.*

(ii) *$\mathcal{S}_I(E)$ est non vide, c'est un sous-espace affine de $\mathcal{C}^1(I, E)$ de dimension $\dim(E)$, parallèle à $\mathcal{S}_I(H)$ (c'est-à-dire que $\mathcal{S}_I(E)$ s'obtient en translatant $\mathcal{S}_I(H)$ par n'importe quelle solution particulière de E).*

Preuve

(i) La linéarité de φ_{t_0} est évidente, et sa bijectivité résulte du théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire (appliqué à l'équation homogène (H)). Et on sait que deux espaces vectoriels isomorphes ont même dimension.

(ii) La non-vacuité de (E) résulte également du théorème de Cauchy-Lipschitz, et on a déjà montré la structure affine de $\mathcal{S}_I(E)$.

Remarque

- *Si une solution x de (H) s'annule en un point $t_0 \in I$, alors c'est la fonction nulle sur I (la seule solution du problème de Cauchy $x' = a(t)(x)$ avec la condition initiale $x(t_0) = 0$).*
- *De même, si deux solutions x_1, x_2 de (E) coïncident en un* **même** *point $t_0 \in I$, alors elles sont égales sur I (puisque $x_1 - x_2$ est solution de (H) et s'annule en $t_0 \in I$, donc c'est la fonction nulle, d'après le point précédent).*

Corollaire 15 (Dimension des espaces de solutions pour les équations d'ordre n)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$ et b des fonctions continues $I \to \mathbb{K}$.
On note :

$$(E): \quad x^{(n)}(t) = a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) + b(t),$$

$$(H): \quad x^{(n)}(t) = a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t).$$

(i) *Pour tout $t_0 \in I$, l'application*

$$\varphi_{t_0} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{S}_I(H) & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ x & \longmapsto & (x(t_0), x'(t_0), \cdots, x^{(n-1)}(t_0)) \end{array} \right.$$

est un isomorphisme, et donc $\mathcal{S}_I(H)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.

(ii) *$\mathcal{S}_I(E)$ est non vide, c'est un sous-espace affine de $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$ de dimension n, parallèle à $\mathcal{S}_I(H)$.*

Preuve

(i) On vérifie facilement que $\mathcal{S}_I(H)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$). La linéarité de φ_{t_0} est immédiate, sa bijectivité résulte du corollaire 13 appliqué à (H).

(*ii*) La non-vacuité de $\mathcal{S}_I(E)$ résulte du théorème 13. Le reste se vérifie facilement (fixer une solution y_p de (E) et montrer à la main que y est solution de (E) ssi $y - y_p$ est solution de (H)).

Exemple
L'ensemble des solutions de (H) : $x'' = x$ sur $\mathbb{R}$ est le plan $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(H) = Vect(x_1, x_2)$, où $x_1 : t \mapsto e^t$, $x_2 : t \mapsto e^{-t}$ (elles vérifient l'équation (H) et sont libres, donc elles forment une base de $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(H)$).
On a aussi $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(H) = Vect(\mathrm{ch}, \mathrm{sh})$.

ATTENTION !
Tous ces théorèmes ne s'appliquent qu'aux EDL **sous forme résolue**.

3) Exemples d'équations différentielles non résolubles

Il s'agit d'équations scalaires d'ordre n sous la forme :

$$\alpha_n(t)x^{(n)}(t) = \alpha_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \cdots + \alpha_1(t)x'(t) + \alpha_0(t)x(t) + \beta(t),$$

où les α_i et β sont continues $I \to \mathbb{K}$ et la fonction $t \mapsto \alpha_n(t)$ s'annule sur I.

Méthode
Pour résoudre de telles équations sur I, on les résout d'abord sur les sous-intervalles $J \subset I$ sur lesquels α_n ne s'annule pas (en se ramenant à une forme résolue en $x^{(n)}$, sur laquelle on peut appliquer les résultats précédents). Puis on essaye de "recoller" les solutions obtenues pour former des solutions valables sur tout I, c'est-à-dire des fonctions n-fois dérivables sur tout I.

Exemple
Résoudre $tx' - 2x = 0$ *sur* $\mathbb{R}$ (problème de recollement en 0).

Exemple
Résoudre $t\ln(t)x' + x = 0$ *sur* $]0, +\infty[$ (problème de recollement en 1).

Exemple
Résoudre $tx' - x = t^2$ *sur* $\mathbb{R}$ (problème de recollement en 0).

Exemple
Résoudre $t^2y'' - 2ty' + 2y = 2$ *sur* $\mathbb{R}$ (problème de recollement en 0), en remarquant que $t \mapsto t$ et $t \mapsto t^2$ sont solutions de l'équation homogène.

Remarque
On voit sur ces exemples que lorsqu'une équation différentielle linéaire d'ordre n n'est pas résoluble en $x^{(n)}$ sur I, la dimension de l'espace affine des solutions sur I n'est plus nécessairement égale à n, elle peut diminuer ou augmenter.

III Equations différentielles à coefficients constants

Il s'agit des équations de la forme
$$x'(t) = a(x(t)) + b(t),$$
où $a \in \mathcal{L}(E)$ ne dépend pas de t, et $b \in \mathcal{C}^0(I, E)$.
Si $E = \mathbb{K}^n$, cela revient à considérer des systèmes différentiels de la forme :
$$X'(t) = AX(t) + B(t),$$
où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K}^n)$.
En exploitant l'équivalence entre systèmes différentiels et équations scalaires, les résultats de cette partie vont aussi permettre la résolution des équations différentielles linéaires scalaires d'ordre n à coefficients constants :
$$x^{(n)}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^{(i)}(t) + b(t),$$
où $a_0, \cdots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$ et $b \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$.

1) Propriétés de l'exponentielle de matrice / d'endomorphisme

Théorème 16 (Propriétés de l'exponentielle de matrice)

(i) $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *est bien définie et continue.*

(ii) *Pour tout* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*, l'application* $S : t \mapsto \exp(tA)$ *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}$ *et*
$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad S'(t) = A\exp(tA) = \exp(tA)A.$$

(iii) *Si* $AB = BA$*, alors* $\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B) = \exp(B)\exp(A)$.

(iv) *Pour tout* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*,* $\exp(A) \in GL_n(\mathbb{K})$ *et* $\exp(A)^{-1} = \exp(-A)$.

Remarque
Ces propriétés restent valable pour l'exponentielle d'endomorphisme $\exp : \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E)$.

Preuve

(i) La série de fonctions $\displaystyle\sum_{k\geq 0} \frac{A^k}{k!}$ converge normalement sur tout compact de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. En effet, sur toute boule fermée $B_f(0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}, R)$ avec $R > 0$, on a
$$|||A||| \leq R \implies \forall k \in \mathbb{N}, \left|\left|\left|\frac{A^k}{k!}\right|\right|\right| \leq \frac{|||A|||^k}{k!} \leq \frac{R^k}{k!},$$
et la série numérique $\sum_{k\geq 0} \frac{R^k}{k!}$ converge (vers e^R). Puisque $A \mapsto \frac{A^k}{k!}$ est continue pour tout $k \in \mathbb{N}$ (car polynomiale en les coefficients de A), on en déduit par convergence uniforme sur tout compact que $A \mapsto \exp(A)$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(ii) Fixons $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction vectorielle $g_k : t \mapsto \frac{(tA)^k}{k!} = \frac{t^k A^k}{k!}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, la série $\sum g_k$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ (d'après (i)), et la série $\sum g_k'$ converge normalement sur tout segment $[-R, R]$ avec $R > 0$, car pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:
$$\|g_k'\|_{\infty,[-R,R]} = \sup_{t\in[-R,R]} \left|\left|\left|\frac{t^{k-1}A^k}{(k-1)!}\right|\right|\right| \leq \frac{|||A|||(R|||A|||)^{k-1}}{(k-1)!},$$
et la série numérique $\sum_{k\geq 1} \frac{|||A|||(R|||A|||)^{k-1}}{(k-1)!}$ converge (vers $|||A|||e^{R|||A|||}$).
Donc par le théorème de dérivation d'une série de fonctions, on en déduit que $S \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$ et
$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad S'(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^{k-1}A^k}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k A^{k+1}}{k!} = A\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k A^k}{k!}\right) = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k A^k}{k!}\right) A$$

(par continuité du produit matriciel), d'où le résultat.

(iii) Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. D'après le point précédent, les fonctions :

$$\varphi : t \mapsto \exp(t(A+B)), \qquad \psi : t \mapsto \exp(tA)\exp(tB),$$

sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (la seconde par bilinéarité du produit matriciel), et on a

$$\varphi(0) = \exp(0) = I_n, \qquad \forall t \in \mathbb{R},\ \varphi'(t) = (A+B)\varphi(t),$$

ainsi que

$$\psi(0) = \exp(0)^2 = I_n, \qquad \forall t \in \mathbb{R},\ \psi'(t) = A\exp(tA)\exp(tB) + \exp(tA)B\exp(tB).$$

Or, si $AB = BA$, alors $\exp(tA)B = B\exp(tA)$ (par continuité du produit matriciel), donc

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \psi'(t) = (A+B)\exp(tA)\exp(tB) = (A+B)\psi(t).$$

Ainsi, φ et ψ sont solutions du même problème de Cauchy linéaire d'ordre 1 (à valeurs dans $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) :

$$M'(t) = (A+B)M(t), \qquad M(0) = I_n,$$

donc par le théorème de Cauchy-Lipschitz, $\varphi(t) = \psi(t)$ pour tout réel t. En particulier, $\varphi(1) = \psi(1)$, ce qui donne le résultat.

(iv) D'après le point précédent, on a

$$I_n = \exp(0) = \exp(A + (-A)) = \exp(A)\exp(-A) = \exp(-A)\exp(A),$$

ce qui montre bien que $\exp(A)$ est inversible, d'inverse $\exp(-A)$.

Remarque
La propriété (iii) peut aussi se montrer en effectuant un produit de Cauchy de séries matricielles (hors programme) :

$$\exp(A)\exp(B) = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{k}\frac{A^p}{p!}\frac{B^{k-p}}{(k-p)!}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(A+B)^k}{k!} = \exp(A+B),$$

d'après la formule du binôme, qui est ici valable car A et B commutent.

ATTENTION !
Si $AB \neq BA$, on peut avoir $\exp(A+B) \neq \exp(A)\exp(B)$.

2) Résultat général

Théorème 17 (Solution d'un système différentiel à coefficients constants)
On considère le système différentiel à coefficients constants

$$(H) :\ X'(t) = AX(t),$$

avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et le problème de Cauchy

$$(PC) : \begin{cases} X'(t) = AX(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases},$$

avec $t_0 \in \mathbb{R}$ et $X_0 \in \mathbb{K}^n$.

(i) Les solutions de (H) sont les $X : t \mapsto e^{tA}V$ avec $V \in \mathbb{K}^n$.

(ii) L'unique solution de (PC) est $X : t \mapsto e^{(t-t_0)A}X_0$.

Preuve

(i) On sait déjà que $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(H)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, isomorphe à $\mathbb{K}^n$ via l'application

$$\varphi_0 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(H) & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ X & \longmapsto & X(0) \end{array} \right.$$

Pour tout $V \in \mathbb{K}^n$, il est facile de vérifier que $t \mapsto e^{tA}V$ est solution de (H) (en dérivant). Donc

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(H) \supset \{t \mapsto e^{tA}V,\ V \in \mathbb{K}^n\} = Vect(t \mapsto e^{tA}E_j)_{1\leq j\leq n},$$

où $(E_1, \cdots, E_n)$ est la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Par l'isomorphisme réciproque φ_0^{-1}, on obtient que $(t \mapsto e^{tA}E_j)_{1\leq j\leq n} = (\varphi_0^{-1}(E_j))_{1\leq j\leq n}$ est une base de $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(H)$, ce qui montre que

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(H) = \{t \mapsto e^{tA}V,\ V \in \mathbb{K}^n\}.$$

(ii) Parmi les éléments $X \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(H)$, on a

$$X(t_0) = X_0 \iff e^{t_0A}V = X_0 \iff V = (e^{t_0A})^{-1}X_0 \iff V = e^{-t_0A}X_0,$$

donc la solution de (PC) est $X : t \mapsto e^{tA}e^{-t_0A}X_0 = e^{(t-t_0)A}X_0$.

Remarque

- *Lorsque $n = 1$, on retrouve la forme bien connue des solutions de $x' = ax$, où $a \in \mathbb{K}$: ce sont les fonctions $x : t \mapsto e^{ta}v = ve^{at}$, $v \in \mathbb{K}$ (on identifie $\mathcal{M}_1(\mathbb{K})$ à $\mathbb{K}$).*
- *On peut réécrire ce théorème sous la forme générale suivante :*

Théorème
On considère l'équation différentielle à coefficients constants

$$(H) :\ x'(t) = a(x(t)),$$

avec $a \in \mathcal{L}(E)$, et le problème de Cauchy

$$(PC) :\ \left\{ \begin{array}{l} x'(t) = a(x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{array} \right. ,$$

avec $t_0 \in \mathbb{R}$ et $x_0 \in E$.

(i) Les solutions de (H) sont les $x : t \mapsto e^{ta}(v)$ avec $v \in E$.

(ii) L'unique solution de (PC) est $x : t \mapsto e^{(t-t_0)a}(x_0)$.

ATTENTION !

Cela ne fonctionne plus si la matrice A dépend de t !
En effet, si $A \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$, alors la fonction $X : t \mapsto e^{P(t)}V$, où P est une primitive de A, **n'est pas** solution de $X'(t) = A(t)X(t)$, car lorsqu'on dérive la série de fonctions $X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P(t)^k}{k!}V$, on a par multilinéarité :

$$\frac{d}{dt}(P(t)^k) = P'(t)P(t)^{k-1} + P(t)P'(t)P(t)^{k-2} + \cdots + P(t)^{k-1}P'(t) \neq kP'(t)P(t)^{k-1},$$

car $P(t)P'(t) \neq P'(t)P(t)$ en général (une matrice et sa dérivée ne commutent pas nécessairement) .

3) Exemples de résolutions explicites

Exemple (Equations d'ordre 2 à coefficients constants)
Résolution de $ax'' + bx' + cx = 0$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$, d'inconnue $x \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.
On retrouve l'expression des solutions vue en MP2I.

Exemple (Cas général diagonalisable)
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisable et $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}AP = D$ est diagonale, de coefficients

diagonaux $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$.
Les solutions de $X' = AX$ sont les fonctions

$$X : t \mapsto \alpha_1 e^{\lambda_1 t}\overrightarrow{C_1} + \cdots + \alpha_n e^{\lambda_n t}\overrightarrow{C_n}, \qquad (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n.$$

où $(\overrightarrow{C_1}, \cdots, \overrightarrow{C_n})$ sont les colonnes de la matrice de passage P.

Exemple (Système trigonalisable sur $\mathbb{R}$ et non diagonalisable, ex 75 banque INP)
Résoudre le système différentiel :

$$\begin{cases} x' = -x - 4y \\ y' = x + 3y \end{cases}.$$

Exemple (Système diagonalisable sur $\mathbb{C}$ mais pas sur $\mathbb{R}$)
Résoudre le système différentiel :

$$\begin{cases} x'(t) = (\cos\theta)x(t) - (\sin\theta)y(t) \\ y'(t) = (\sin\theta)x(t) + (\cos\theta)y(t) \end{cases},$$

où $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ est un paramètre fixé.
Les solutions sont les fonctions (x, y) définies par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \begin{cases} x(t) = e^{t\cos\theta}\left(a\cos(t\sin\theta) - b\sin(t\sin\theta)\right) \\ y(t) = e^{t\cos\theta}\left(a\sin(t\sin\theta) + b\cos(t\sin\theta)\right) \end{cases},$$

avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

IV Méthode de variation des constantes

1) Rappel : MVC pour les équations scalaires d'ordre 1

On considère l'équation différentielle $(E): \ x'(t) = a(t)x(t) + b(t)$, où $a, b \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$, et son équation homogène associée $(H): \ x'(t) = a(t)x(t)$.
Les solutions de (H) sur I sont les fonctions

$$x : t \mapsto \alpha e^{A(t)}, \qquad \alpha \in \mathbb{K}$$

avec A une primitive de a sur I.
En effet, on vérifie facilement que la fonction $t \mapsto e^{A(t)}$ est une solution non nulle de (H). Par ailleurs $\mathcal{S}_I(H)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 1, donc $\mathcal{S}_I(H) = Vect(t \mapsto e^{A(t)})$

Méthode (Méthode de variation de la constante)
Une fois que l'on connaît les solutions de (H), on peut chercher toutes les solutions de (E) sous la forme

$$x(t) = \lambda(t)e^{A(t)},$$

où $\lambda : I \to \mathbb{K}$ est une fonction dérivable.
En effet, toute fonction dérivable $x : I \to \mathbb{K}$ peut s'écrire sous cette forme, en posant $\lambda : t \mapsto x(t)e^{-A(t)}$ (ce qui est possible car $t \mapsto e^{A(t)}$ ne s'annule jamais sur I). Avec ces notations, x est solution de (E) si et seulement si

$$\forall t \in I, \qquad \lambda'(t)e^{A(t)} + \lambda(t)A'(t)e^{A(t)} = a(t)\lambda(t)e^{A(t)} + b(t),$$

c'est-à-dire

$$\lambda'(t) = b(t)e^{-A(t)}$$

(les "$\lambda(t)$" se sont simplifiés car $A'(t) = a(t)$).
Si on parvient à calculer une primitive de $t \mapsto b(t)e^{-A(t)}$, on obtient alors toutes les solutions de (E) :

$$x(t) = \left(\int_{t_0}^{t} b(s)e^{-A(s)}ds + \alpha\right)e^{A(t)}, \qquad \alpha \in \mathbb{K}$$

(où $t_0 \in I$ quelconque).

Remarque

- *Le choix de la primitive A n'influe en rien sur la forme des solutions.*
- *La "méthode de variation de la constante" ne fournit pas seulement une solution particulière de (E), elle fournit* **directement toutes les solutions de (E)**.

2) Méthode de variation des constantes pour les équations vectorielles

On va maintenant généraliser la méthode de variation de la constante aux équations différentielles d'ordre 1 vectorielles (à valeurs dans un evn E de dimension finie), le but étant de déterminer les solutions de $(E): \ x'(t) = a(t)(x(t)) + b(t)$ à partir de la forme des solutions de $(H): \ x'(t) = a(t)(x(t))$.

Définition 18 (Système fondamental de solutions)
Soit l'équation différentielle linéaire homogène

$$(H): \ x'(t) = a(t)(x(t)),$$

avec $a \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{L}(E))$.
On appelle **système fondamental de solutions de (H)** *toute base $(x_1, \cdots, x_n)$ de l'espace vectoriel $\mathcal{S}_I(H)$.*

Remarque
Dans cette définition, $n = \dim(\mathcal{S}_I(H)) = \dim(E)$.

Définition 19 (Wronskien d'une famille de solutions)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, soit $a \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{L}(E))$, et soit $(x_1, \cdots, x_n)$ une famille (non nécessairement libre) de solutions de $(H): \ x'(t) = a(t)(x(t))$.
Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E. On appelle **wronskien** *de la famille $(x_1, \cdots, x_n)$ l'application*

$$w : \left\{ \begin{array}{lcc} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ t & \longmapsto & w(t) = \det_{\mathcal{B}}(x_1(t), \cdots, x_n(t)) = \det(Mat_{\mathcal{B}}(x_1(t), \cdots, x_n(t))) \end{array} \right. .$$

Remarque
On a donc

$$w(t) = \begin{vmatrix} | & | & \cdots & | \\ | & | & \cdots & | \\ X_1(t) & X_2(t) & \cdots & X_n(t) \\ | & | & \cdots & | \\ | & | & \cdots & | \end{vmatrix},$$

où $X_i(t) = [x_i(t)]_{\mathcal{B}} \in \mathbb{K}^n$ pour tout i.

Théorème 20 (Caractérisation des systèmes fondamentaux de solutions)
Avec les notations précédentes, il y a équivalence entre :

(i) $(x_1, \cdots, x_n)$ *est un système fondamental de solutions de (H) ;*

(ii) $\exists t_0 \in I, \ w(t_0) \neq 0$ *;*

(iii) $\forall t \in I, \ w(t) \neq 0$.

Dans ce cas, on dit que $Q(t) = Mat_{\mathcal{B}}(x_1(t), \cdots, x_n(t))$ est une **matrice fondamentale** *de (H).*

Preuve
On sait que pour tout $t_0 \in I$, on a un isomorphisme :

$$\varphi_{t_0} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{S}_I(H) & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x(t_0) \end{array} \right. .$$

D'où l'équivalence :

$$(x_1, \cdots, x_n) \text{ base de } \mathcal{S}_I(H) \iff (x_1(t_0), \cdots, x_n(t_0)) \text{ base de } E \iff \det_{\mathcal{B}}(x_1(t_0), \cdots, x_n(t_0)) \neq 0,$$

c'est-à-dire

$$(x_1, \cdots, x_n) \text{ système fondamental } \iff w(t_0) \neq 0.$$

Remarque
Une matrice fondamentale $Q(t)$ est donc inversible pour tout $t \in I$. Ses colonnes $t \mapsto Q(t)E_j$ représentent un système fondamental de solutions de (H).

Exemple (Cas des systèmes différentiels à coefficients constants)
En notant $(H): \ X'(t) = AX(t)$, la matrice $Q(t) = e^{tA}$ est une matrice fondamentale de (H), car les colonnes de $t \mapsto Q(t)$, c'est-à-dire la famille $(t \mapsto e^{tA}E_j)_{1 \leq j \leq n}$ forment une base de solutions de (H).

Lemme 21 (Décomposition d'une fonction dérivable sur un système fondamental)
Soit $(x_1, \cdots, x_n)$ un système fondamental de solutions de $(H): \ x'(t) = a(t)(x(t))$.
Alors, toute fonction dérivable $x : I \to E$ peut s'écrire sous la forme

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t) x_i(t),$$

avec les $\lambda_i : I \to \mathbb{K}$ des fonctions dérivables.

ATTENTION !
Ce résultat **ne dit pas** que toute fonction dérivable $x : I \to E$ est combinaison linéaire de $(x_1, \cdots, x_n)$

(ce serait absurde, cela voudrait dire que toute fonction dérivable est solution de (H)...). En effet, les coefficients λ_i **dépendent de** t !

Preuve
Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E (indépendante de t). Soit $x : I \to E$ une fonction dérivable. Notons $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ les fonctions coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$. Les $\alpha_i : I \to \mathbb{K}$ sont dérivables (cf. CH.15 sur les fonctions vectorielles) et on a

$$\forall t \in I, \qquad x(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(t) e_i.$$

Maintenant, on peut considérer, à $t \in I$ fixé, la base "mobile"

$$\mathcal{B}_t = (x_1(t), \cdots, x_n(t))$$

(c'est une base de E car la famille de fonctions $(x_1, \cdots, x_n)$ est un système fondamental de solutions de (H), donc son évaluation en tout point est une base de E). Pour tout $t \in I$, il existe $(\lambda_1(t), \cdots, \lambda_n(t)) \in \mathbb{K}^n$ tel que

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t) x_i(t).$$

Cela définit des fonctions $\lambda_i : I \to \mathbb{K}$. Reste à montrer qu'elles sont dérivables. La matrice de passage

$$Q(t) = Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_t) = Mat_{(e_1, \cdots, e_n)}(x_1(t), \cdots, x_n(t))$$

(qui est une matrice fondamentale de (H)) permet de relier les coordonnées $(\alpha_1(t), \cdots, \alpha_n(t))$ et $(\lambda_1(t), \cdots, \lambda_n(t))$:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1(t) \\ \vdots \\ \alpha_n(t) \end{pmatrix} = Q(t) \begin{pmatrix} \lambda_1(t) \\ \vdots \\ \lambda_n(t) \end{pmatrix},$$

donc

$$\begin{pmatrix} \lambda_1(t) \\ \vdots \\ \lambda_n(t) \end{pmatrix} = Q(t)^{-1} \begin{pmatrix} \alpha_1(t) \\ \vdots \\ \alpha_n(t) \end{pmatrix} = \frac{{}^t com(Q(t))}{\det(Q(t))} \begin{pmatrix} \alpha_1(t) \\ \vdots \\ \alpha_n(t) \end{pmatrix} = \frac{{}^t com(Q(t))}{w(t)} \begin{pmatrix} \alpha_1(t) \\ \vdots \\ \alpha_n(t) \end{pmatrix}.$$

Vu que les $x_i : I \to E$ sont dérivables (en tant que solutions de (H)), on a $Q : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dérivable, donc $t \mapsto {}^t com(Q(t))$ et $t \mapsto w(t)$ (qui sont polynomiales en les coefficients de $Q(t)$) sont dérivables, ce qui montre par produit que les fonctions $\lambda_i : I \to \mathbb{K}$ sont dérivables.

Méthode (Mise en oeuvre de la MVC sur un système différentiel)
Supposons que l'on connaisse un système fondamental de solutions du système différentiel homogène :

$$(H): \; X'(t) = A(t)X(t),$$

noté $(X_1, \cdots, X_n)$.
D'après le lemme précédent, **on peut chercher toutes les solutions du système avec second membre**

$$\boldsymbol{(E): \; X'(t) = A(t)X(t) + B(t)}$$

sous la forme

$$\boldsymbol{X(t) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t) X_i(t),}$$

avec les $\boldsymbol{\lambda_i : I \to \mathbb{K}}$ dérivables. *Avec ces notations, X est solution de (E) si et seulement si*

$$\forall t \in I, \qquad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i'(t) X_i(t) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t) X_i'(t) = A(t) \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t) X_i(t) \right) + B(t),$$

c'est-à-dire

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i'(t) X_i(t) = B(t)$$

(puisque $X_i'(t) = A(t)X_i(t)$ *pour tout* i*). On obtient alors pour tout* $t \in I$ *un système linéaire :*

$$Q(t) \begin{pmatrix} \lambda_1'(t) \\ \vdots \\ \lambda_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix},$$

où $Q(t)$ *est la matrice carrée de colonnes* $(X_1(t), \cdots, X_n(t))$ *(matrice fondamentale de* (H)*) et* $B(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$*. Vu que* $Q(t)$ *est inversible pour tout* $t \in I$*, on obtient une unique solution :*

$$\begin{pmatrix} \lambda_1'(t) \\ \vdots \\ \lambda_n'(t) \end{pmatrix} = Q(t)^{-1} \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix},$$

et on intègre ensuite (composante par composante) pour obtenir les coefficients $\lambda_i(t)$*, puis la solution générale de* (E) *:*

$$X(t) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t) X_i(t).$$

ATTENTION !

Au moment de l'intégration des $\lambda_i'(t)$, ne pas oublier les constantes d'intégration pour avoir **toutes** les solutions de (E), et pas seulement une solution particulière.

Exemple

Résoudre le système différentiel :

$$(E) : \begin{cases} x' = y \\ y' = -x + \cos(t) \end{cases}$$

avec la méthode de variation des constantes.

Notons $(H) : \begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}$ le système homogène associé.

Les solutions de ce système sont les fonctions $(x, y) = (x, x')$ avec $x'' = -x$. Facilement, on obtient que $X_1(t) = (\cos(t), -\sin(t))$ et $X_2(t) = (\sin(t), \cos(t))$ conviennent, et (X_1, X_2) forme un système fondamental de solutions de (H), puisque

$$w(t) = \det_{(E_1,E_2)}(X_1(t), X_2(t)) = \begin{vmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

On peut donc chercher les solutions de (E) sous la forme générale :

$$X(t) = \lambda_1(t) X_1(t) + \lambda_2(t) X_2(t),$$

avec λ_1 et λ_2 dérivables sur $\mathbb{R}$.

Ces fonctions vérifient (E) si et seulement si

$$\lambda_1'(t) X_1(t) + \lambda_2'(t) X_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(t) \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1'(t) \\ \lambda_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(t) \end{pmatrix}.$$

En inversant la matrice fondamentale, on obtient

$$\begin{pmatrix} \lambda_1'(t) \\ \lambda_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(t)\cos(t) \\ \cos^2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sin(2t)}{2} \\ \frac{1+\cos(2t)}{2} \end{pmatrix},$$

ce qui équivaut à

$$\begin{pmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\cos(2t)}{4} + \alpha \\ \frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4} + \beta \end{pmatrix}, \qquad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

Ainsi, les solutions de (E) sont :

$$X(t) = \left(\frac{\cos(2t)}{4} + \alpha\right) \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix} + \left(\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4} + \beta\right) \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire (après simplification)

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\cos(t) + \beta\sin(t) + \frac{\cos(t)}{4} + \frac{t\sin(t)}{2} \\ -\alpha\sin(t) + \beta\cos(t) + \frac{\sin(t)}{4} + \frac{t\cos(t)}{2} \end{pmatrix}, \qquad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

V Equations linéaires scalaires d'ordre 2

On considère des équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2 résolues en x'' :

$$(E): \; x''(t) = a(t)x'(t) + b(t)x(t) + c(t),$$

où $a, b, c \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$.
L'équation homogène associée est notée

$$(H): \; x''(t) = a(t)x'(t) + b(t)x(t).$$

1) Système fondamental de solutions, wronskien

Définition 22 (Système fondamental de solutions)
On appelle **système fondamental de solutions de $(\boldsymbol{H})$** *toute base (x_1, x_2) du plan vectoriel $\mathcal{S}_I(H)$.*

Propriété 23 (Lien avec les systèmes différentiels)
(x_1, x_2) est un système fondamental de solutions de (H) si et seulement si

$$(X_1, X_2) = \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_1' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2' \end{pmatrix} \right)$$

est un système fondamental de solutions du système différentiel

$$(\Sigma): \; X'(t) = A(t)X(t)$$

avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b(t) & a(t) \end{pmatrix}$.

Preuve
D'après le théorème 10, l'application

$$\theta : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{S}_I(H) & \longrightarrow & \mathcal{S}_I(\Sigma) \\ x & \longmapsto & (x, x') \end{array} \right.$$

est un isomorphisme entre l'ensemble des solutions de (H) et l'ensemble des solutions de (Σ). Donc (x_1, x_2) est une base de $\mathcal{S}_I(H)$ si et seulement si (X_1, X_2) est une base de $\mathcal{S}_I(\Sigma)$.

Définition 24 (Wronskien de deux solutions de (H))
Si x_1, x_2 sont deux solutions de (H) (non nécessairement libres), on appelle **wronskien** *de la famille (x_1, x_2) l'application*

$$w : \left\{ \begin{array}{lll} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ t & \longmapsto & w(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{vmatrix} = x_1(t)x_2'(t) - x_1'(t)x_2(t) \end{array} \right. .$$

Il s'agit du wronskien associé à la famille $(X_1, X_2) = ((x_1, x_1'), (x_2, x_2'))$ de solutions du système différentiel associé.

Théorème 25 (Caractérisation des systèmes fondamentaux)
Si x_1, x_2 sont deux solutions de (H) (non nécessairement libres), alors il y a équivalence entre :

- *(i)* (x_1, x_2) *est un système fondamental de solutions de (H) ;*
- *(ii)* $\exists t_0 \in I, \; w(t_0) \neq 0$;
- *(iii)* $\forall t \in I, \; w(t) \neq 0$.

Dans ce cas, on dit que $Q(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{pmatrix}$ *est une matrice fondamentale de (H).*

Preuve
Direct d'après les propositions 23 et 20.

Propriété 26 (Equation différentielle du wronskien)
Pour toute famille (x_1, x_2) de solutions de (H), le wronskien w vérifie l'équation différentielle :

$$w'(t) = a(t)w(t).$$

Preuve
Facile.

Remarque

1. *On retrouve ainsi le fait que w est soit identiquement nul, soit ne s'annule pas.*
2. *Si $(H):\ x''(t) = b(t)x(t)$ (cas où $a(t) = 0$), alors le wronskien w est constant sur I.*

Exemple
Wronskien d'un système fondamental de $x'' + bx = 0$, avec $b \in \mathbb{K}$ constant.

2) Méthode de variation des constantes

En exploitant encore l'équivalence entre équations scalaires d'ordre 2 et système différentiels à valeurs dans $\mathbb{K}^2$, on peut adapter la méthode de variation des constantes des systèmes différentiels pour résoudre (E) à partir d'une base des solutions de (H).

Méthode
Si on connaît (x_1, x_2), un système fondamental de solutions de (H), alors on peut chercher toutes les solutions de (E) sous la forme

$$x(t) = \lambda_1(t)x_1(t) + \lambda_2(t)x_2(t),$$

où λ_1 et λ_2 sont dérivables sur I.
Pour cela, on introduit la fonction vectorielle :

$$X : t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix},$$

et on cherche les solutions du système différentiel associé à (E), noté $(\Sigma):\ X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$, sous la forme

$$X(t) = \lambda_1(t)X_1(t) + \lambda_2(t)X_2(t),$$

où

$$(X_1, X_2) = \left(\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_1'(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} \right) \quad (\textit{syst.fondamental de } (\Sigma)).$$

Avec ces notations, x est solution de (E) ssi X est solution de (Σ) ssi $\lambda_1'(t)X_1(t) + \lambda_2'(t)X_2(t) = B(t)$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} \lambda_1'(t)x_1(t) + \lambda_2'(t)x_2(t) = 0 \\ \lambda_1'(t)x_1'(t) + \lambda_2'(t)x_2'(t) = c(t) \end{cases}$$

ou encore

$$Q(t) \begin{pmatrix} \lambda_1'(t) \\ \lambda_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ c(t) \end{pmatrix},$$

où $Q(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{pmatrix}$ est la matrice fondamentale du système (Σ).

Exemple
Résoudre $y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$.

Remarque (Autre présentation de la MVC)
Soit (x_1, x_2) *un système fondamental de solutions de* $(H): \ x''(t) = a(t)x'(t) + b(t)x(t)$.
Alors les solutions du système différentiel homogène associé $(\Sigma_H): X'(t) = A(t)X(t)$ *sont les fonctions vectorielles :*

$$X(t) = \alpha \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_1'(t) \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} x_2(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = Q(t)V, \qquad V = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^2,$$

où $Q(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{pmatrix}$ *est la matrice fondamentale de* (Σ_H).
Pour obtenir les solutions de $(E): \ x''(t) = a(t)x'(t) + b(t)x(t) + c(t)$, *on cherche les solutions du système différentiel associé* $(\Sigma_E): \ X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$ *sous la forme générale :*

$$X(t) = Q(t)\Lambda(t),$$

avec $\Lambda : I \to \mathbb{R}^2$ *dérivable ("on fait varier la constante vectorielle* V*").*
On a alors

$$X \text{ sol de } (\Sigma_E) \iff Q'(t)\Lambda(t) + Q(t)\Lambda'(t) = A(t)Q(t)\Lambda(t) + B(t),$$

mais $Q'(t) = A(t)Q(t)$ *(par colonnes), donc*

$$X \text{ sol de } (\Sigma_E) \iff Q(t)\Lambda'(t) = B(t).$$

3) Techniques de recherche de solutions

a) Méthode d'abaissement d'ordre

Si on connaît une solution de (H), notée $x_0(t)$, qui ne s'annule pas sur I, alors on peut chercher les solutions de (E) sous la forme :

$$x(t) = \lambda(t)x_0(t), \text{ avec } \lambda \text{ deux fois dérivable sur } I.$$

On obtient alors, en injectant cette forme dans (E), une équation d'ordre 1 en $z = \lambda'$ (les termes en λ se sont simplifiés), qu'on peut résoudre, et ensuite, on détermine $\lambda(t)$ en intégrant, puis les solutions $x(t)$ en remultipliant par $x_0(t)$.

Exemple
Résoudre (H) : $(t+1)x'' - x' - tx = 0$ sur $]-1, +\infty[$.
On remarque que $t \mapsto e^t$ est solution de (H), donc on peut chercher les solutions de (H) sous la forme

$$x(t) = \lambda(t)e^t.$$

Une telle fonction x est solution de (H) si et seulement si (après simplification)

$$\lambda''(t) + \frac{2t+1}{t+1}\lambda'(t) = 0,$$

ou encore

$$\lambda''(t) + \left(2 - \frac{1}{t+1}\right)\lambda'(t) = 0.$$

C'est une équation d'ordre 1 en $z = \lambda'$, elle se résout facilement. On obtient

$$\lambda'(t) = \alpha(t+1)e^{-2t}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

En intégrant par parties, cela équivaut à

$$\lambda(t) = -\frac{\alpha}{4}(2t+3)e^{-2t} + \beta, \qquad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,$$

et donc les solutions de (H) sur $I =]-1, +\infty[$ sont les fonctions

$$x(t) = -\frac{\alpha}{4}(2t+3)e^{-t} + \beta e^t, \qquad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

b) Utilisation de séries entières

On peut également chercher si l'équation différentielle étudiée admet des solutions **développables en série entière** (cela englobe notamment les polynômes, les exponentielles, etc.).

Méthode (Recherche de solutions développables en séries entières)
On procède par "analyse-synthèse" :

- *étant donnée une fonction développable en série entière* $x(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ *dans un intervalle* $]-R; R[$*, on détermine une condition nécessaire et suffisante sur la suite des coefficients* (a_n) *pour que* x *soit solution de* (E)*.*
  On obtient en général une relation de récurrence sur la suite (a_n) *;*
- *on essaie d'expliciter le terme général de la suite* (a_n) *en fonction de* n*, à partir de la relation de récurrence précedemment obtenue.*
  Cette étape donne les **éventuelles** *solutions DSE ;*
- *on vérifie ensuite que la ou les séries entières obtenues ont bien un rayon de convergence* R *non nul, et donc qu'elles définissent bien des fonctions.*
  Cette étape montre **l'existence** *de solutions DSE sur* $]-R; R[$ *;*
- *si possible, on essaie de "reconnaître" les solutions obtenues à partir de leur DSE, c'est-à-dire de les exprimer à l'aide de fonctions usuelles.*

Remarque
Cette technique fonctionne bien lorsque les coefficients de l'équation différentielle (E) sont des polynômes en t, et lorsque le second membre $c(t)$ est lui-même développable en série entière.

Exemple
Déterminer les solutions DSE de (H) : $(t+1)x'' - x' - tx = 0$ sur $]-1,+\infty[$.
La fonction DSE $t \mapsto y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ est solution de (E) si et seulement si

$$a_2 = \frac{a_1}{2}, \qquad \forall n \geq 1,\ a_{n+2} = -\left(\frac{n-1}{n+2}\right) a_{n+1} + \frac{a_{n-1}}{(n+1)(n+2)}.$$

Par une récurrence pénible, on montre que cela équivaut à

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad a_{2k} = \frac{ka_1 - (k-1)a_0}{(2k)!}, \qquad a_{2k+1} = \frac{ka_0 - (k-1)a_1}{(2k+1)!},$$

et $(a_0, a_1) \in \mathbb{R}^2$ ne sont pas imposés.
En choisissant $(a_0, a_1) = (1, 1)$, on obtient $a_n = 1/n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc on obtient une première solution DSE, qu'on reconnaît :

$$x_1(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} = e^t.$$

En choisissant $(a_0, a_1) = (-1, 1)$, on obtient un second DSE

$$x_2(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2k-1}{(2k)!} t^{2k} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2k-1}{(2k+1)!} t^{2k+1},$$

qui est de rayon de convergence $R = +\infty$, mais est plus difficile à reconnaître :

$$x_2(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2k-1}{(2k)!} t^{2k} - \int_0^t \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2k-1}{(2k)!} u^{2k} du \right) = t\,\mathrm{sh}(t) - \mathrm{ch}(t) - \int_0^t (u\,\mathrm{sh}(u) - \mathrm{ch}(u)) du.$$

Par IPP, on obtient

$$x_2(t) = (t+2)\,\mathrm{sh}(t) - (t+1)\,\mathrm{ch}(t) = \frac{e^t - (2t+3)e^{-t}}{2}.$$

On a trouvé deux solutions DSE et linéairement indépendantes de (H), donc puisque $\mathcal{S}_I(H)$ est de dimension 2 (équation résolue en x'' sur l'intervalle I), on a toutes les solutions de (H) :

$$\mathcal{S}_I(H) = Vect(x_1, x_2) = Vect(t \mapsto e^t, t \mapsto (2t+3)e^{-t}),$$

et elles sont toutes DSE sur cet exemple.

c) Changement de variable / d'inconnue

Exemple (Changement de variable)
Résolution sur $I =]-1;1[$ de l'équation différentielle (H) : $(1-t^2)y'' - ty' + y = 0$
en utilisant le changement de variable $t = \cos x$.

Solution Pour $y :]-1;1[\to \mathbb{R}$ deux fois dérivable, posons $z = y \circ \cos$, qui est deux fois dérivable sur $]0;\pi[$ (et on a $y = z \circ \arccos$).
On a $z(x) = y(\cos x)$ et $z''(x) = -(\cos x) \times y'(\cos x) + (\sin^2 x) \times y''(\cos x)$, donc

$$y \text{ solution de } (H) \iff z''(x) + z(x) = 0 \iff z(x) = A\cos x + B\sin x, \quad (A,B) \in \mathbb{R}^2.$$

Les solutions de (H) sur $]-1;1[$ sont donc

$$y(t) = At + B\sin(\arccos(t)) = At + B\sqrt{1-t^2}, \qquad (A,B) \in \mathbb{R}^2.$$

Exemple (Changement d'inconnue)
On considère l'équation différentielle

$$(E):\ x^2y'' + 4xy' + (2+x^2)y = 0.$$

1. Résoudre (E) sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ en posant $u = x^2y$.
2. Existe-t-il des solutions de (E) définies sur $\mathbb{R}$?

Solution

1. En posant $u(x) = x^2y(x)$, on a $u'(x) = 2xy(x) + x^2y'(x)$ et $u''(x) = 2y(x) + 4xy'(x) + x^2y''(x)$, donc

$$(E) \iff u''(x) + u(x) = 0 \iff u(x) = A\cos(x) + B\sin(x), \qquad (A,B) \in \mathbb{R}^2.$$

En divisant par x^2, on en déduit les solutions de (E) sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$:

$$y(x) = \frac{u(x)}{x^2} = \frac{A\cos(x) + B\sin(x)}{x^2}, \qquad (A,B) \in \mathbb{R}^2.$$

2. Les éventuelles solutions de (E) définies sur $\mathbb{R}$ sont de la forme :

$$y(x) = \begin{cases} \frac{A\cos(x)+B\sin(x)}{x^2} & \text{si } x > 0 \\ \frac{C\cos(x)+D\sin(x)}{x^2} & \text{si } x < 0 \end{cases},$$

avec $(A,B,C,D) \in \mathbb{R}^4$, et sont deux fois dérivables en 0. Puisqu'on a

$$y(x) = \frac{A + Bx - \frac{A}{2}x^2 + o(x^2)}{x^2} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} - \frac{A}{2} + o(1),$$

la continuité de y en 0 impose que $A = B = 0$ (sinon, y possède une limite infinie en 0^+. Idem au voisinage de 0^-, on doit avoir $C = D = 0$.
Finalement, la seule solution possible sur $\mathbb{R}$ est la fonction nulle, et elle convient car elle est bien deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
L'équation (E) possède donc une seule solution définie sur $\mathbb{R}$: la fonction nulle.