CH15 : Séries et fonctions vectorielles

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Dans ce chapitre, on va généraliser des notions déjà connues :

- la notion de série, déjà connue pour les suites numériques $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.
  On va définir les "séries vectorielles" à partir des suites de vecteurs d'un EVN de dim finie.
- les notions de dérivée et d'intégrale, déjà connues pour les fonctions numériques (c'est-à-dire à valeurs dans $\mathbb{K}$). On va définir la dérivée et l'intégrale des "fonctions vectorielles" (c'est-à-dire les fonctions à valeurs dans un EVN de dim finie).

Tout ceci est possible grâce à la notion générale de limite dans un espace vectoriel normé (cf. cours de topologie).

I Séries vectorielles

E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé non nul de dimension finie.

1) Convergence absolue

Définition 1 (Convergence absolue d'une série vectorielle)
Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie.
Etant donné une suite $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$, on dit que la série $\sum u_n$ est **absolument convergente** *lorsque la série numérique $\sum \|u_n\|$ converge.*

Propriété 2 (Indépendance de la convergence absolue vis-à-vis de la norme)
Le fait qu'une série soit absolument convergente ne dépend pas de la norme $\|.\|$ choisie sur E.

Théorème 3 (La convergence absolue entraîne la convergence en dimension finie)
Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie. Si $\sum u_n$ est absolument convergente, alors $\sum u_n$ est convergente.

Propriété 4 (Inégalité triangulaire infinie en dimension finie)
Soit $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$. **Si $\sum u_n$ converge absolument, alors** *on a l'inégalité suivante :*

$$\left\|\sum_{k=0}^{+\infty} u_k\right\| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \|u_k\|.$$

2) Séries géométriques matricielles

On se place ici dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, où $n \in \mathbb{N}^*$.
La convergence absolue va nous permettre de définir des séries de matrices.

Lemme 5 (Normes matricielles)
Pour toute norme N sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2, \qquad N(AB) \leq CN(A)N(B).$$

Propriété 6 (Série géométrique matricielle)
Soit $\| \ . \ \|$ une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et soit $C > 0$ telle que $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\|AB\| \leq C\|A\|\|B\|$.
Alors pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\|A\| < \dfrac{1}{C}$, la série $\displaystyle\sum_{k \geq 0} A^k$ converge absolument, donc converge.
De plus, $I_n - A$ est inversible et $(I_n - A)^{-1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} A^k$.

3) Exponentielle de matrice

Théorème 7 (Série exponentielle matricielle)
Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*, la série* $\displaystyle\sum_{k \geq 0} \frac{A^k}{k!}$ *converge absolument, donc converge.*

Sa somme est notée $\displaystyle e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$ *et appelée* **exponentielle de la matrice** A*.*

II Dérivabilité des fonctions vectorielles

I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide, et F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé non nul de dimension finie (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On notera $p = \dim(F) \in \mathbb{N}^*$.

On considère des fonctions $f : I \to F$.

1) Dérivabilité en un point

Définition 8 (Dérivabilité en un point)
Soit $f : I \to F$ et $t_0 \in I$. On dit que f est **dérivable en t_0** *si la fonction*

$$\phi_{t_0} : \begin{cases} I \setminus \{t_0\} & \longrightarrow & F \\ t & \longmapsto & \dfrac{1}{t - t_0}(f(t) - f(t_0)) \end{cases}$$

possède une limite finie $\ell \in F$ en t_0.
Dans ce cas, cette limite est appelée **le vecteur dérivé de f en t_0** *(ou plus simplement la dérivée de f en t_0), et on note*

$$f'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h} \in F.$$

Propriété 9 (Expression en coordonnées)
Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_p)$ une base de F et soit $f : I \to F$. Notons $(f_1, \cdots, f_p)$ les fonctions coordonnées de f dans $\mathcal{B}$, c'est-à-dire que

$$\forall t \in I, \qquad f(t) = \sum_{i=1}^{p} f_i(t) e_i,$$

avec $f_i : I \to \mathbb{K}$ pour tout $i \in [\![1, p]\!]$. Alors :

(i) La fonction f est dérivable en $t_0 \in I$ si et seulement si toutes les f_i sont dérivables en t_0.

(ii) Dans ce cas, $f'(t_0) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} f_i'(t_0) e_i$.

Définition 10 (Négligeabilité d'une fonction vectorielle devant une fonction scalaire)
On suppose que $t_0 \in \overline{I}$. Etant données une fonction vectorielle $f : I \to F$ et une fonction scalaire $g : I \to \mathbb{K}$, on dit que f est **négligeable** *devant g au voisinage de t_0 et on note $f(t) = \underset{t \to t_0}{o}(g(t))$ lorsque qu'il existe un voisinage V de t_0 relatif à I et une fonction vectorielle $\varepsilon : V \to F$ telle que $\varepsilon(t) \underset{t \to t_0}{\longrightarrow} 0_F$ et pour tout $t \in V$, $f(t) = g(t)\varepsilon(t)$.*

Propriété 11 (Equivalence entre dérivabilité et DL d'ordre 1)
Une fonction $f : I \to F$ est dérivable en $t_0 \in I$ si et seulement si il existe $\alpha \in F$ tel que

$$f(t_0 + h) = f(t_0) + h\alpha + \underset{h \to 0}{o}(h).$$

Dans ce cas, $f'(t_0) = \alpha$.

Corollaire 12 (La dérivabilité entraîne la continuité)
Si $f : I \to F$ est dérivable en $t_0 \in I$, alors f est continue en t_0.

Définition 13 (Dérivabilité à droite et à gauche)
Avec les notations de la définition 8 :

(i) *Si t_0 n'est pas la borne inférieure de I, on dit que f est* **dérivable à gauche en t_0** *lorsque la fonction ϕ_{t_0} possède une limite $\ell \in F$ quand $t \to t_0^-$.*
La dérivée à gauche est notée $f_g'(t_0) = \lim\limits_{t \to t_0^-} \phi_{t_0}(t)$.

(ii) *Si t_0 n'est pas la borne supérieure de I, on dit que f est* **dérivable à droite en t_0** *lorsque la fonction ϕ_{t_0} possède une limite $\ell \in F$ quand $t \to t_0^+$.*
La dérivée à droite est notée $f_d'(t_0) = \lim\limits_{t \to t_0^+} \phi_{t_0}(t)$.

Définition 14 (Fonction dérivée, fonction de classe $\mathcal{C}^1$)
Soit $f : I \to F$.

(i) *On dit que f est* **dérivable** *si elle est dérivable en tout point $t_0 \in I$. On appelle alors* **fonction dérivée de f** *la fonction vectorielle $f' : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & F \\ t & \longmapsto & f'(t) \end{array} \right.$.*

(ii) *On dit que f est* **de classe $\mathcal{C}^1$** *lorsqu'elle est dérivable et que sa fonction dérivée f' est continue.*

Propriété 15 (Fonction de dérivée nulle sur un intervalle)
Soit $f : I \to F$ une fonction dérivable. Alors, f' est nulle sur I si et seulement si f est constante sur I.

2) Opérations

Propriété 16 (Opérations linéaires)
Pour toutes fonctions dérivables $f : I \to F$ et $g : I \to F$, et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, la combinaison linéaire $\lambda f + g$ est dérivable, et on a

$$(\lambda f + g)' = \lambda f' + g'.$$

L'ensemble des fonctions dérivables $I \to F$ est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I, F)$.

Propriété 17 (Composition avec une application linéaire)
Soit $f : I \to F$, et soit $L : F \to G$ une application linéaire, où G est un autre $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie.

(i) *Si f est dérivable en t_0, alors $L \circ f$ est dérivable en t_0 et*

$$(L \circ f)'(t_0) = L(f'(t_0)).$$

(ii) *Si f est dérivable, alors $L \circ f$ est dérivable et*

$$(L \circ f)' = L \circ f'.$$

Notation
Parfois, la composée $L \circ f$ se notera abusivement $L(f)$.
Avec cette notation, on aura donc $\forall t \in I,\ L(f)(t) = L(f(t))$.

Propriété 18 (Composition avec une application bilinéaire)
Soient F_1, F_2, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés. Soit $f : I \to F_1$, $g : I \to F_2$ et soit $B : F_1 \times F_2 \to G$ une application bilinéaire.

(i) *Si f et g sont dérivables en $t_0 \in I$, alors $B(f, g) : t \mapsto B(f(t), g(t))$ est dérivable en t_0 et :*

$$(B(f, g))'(t_0) = B(f'(t_0), g(t_0)) + B(f(t_0), g'(t_0)).$$

(ii) *Si f et g sont dérivables, alors $B(f, g) : t \mapsto B(f(t), g(t))$ est dérivable et :*

$$(B(f, g))' = B(f', g) + B(f, g').$$

Propriété 19 (Composition avec une application multilinéaire)
Soient $F_1, \cdots, F_n, G$ *des* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels normés de dimension finie, soit* $f_1 : I \to F_1, \cdots,$ $f_n : I \to F_n$ *des fonctions vectorielles et soit* $M : F_1 \times \cdots \times F_n \to G$ *une application multilinéaire.*

(*i*) *Si* $f_1, \cdots, f_n$ *sont dérivables en* $t_0 \in I$*, alors* $M(f_1, \cdots, f_n) : t \mapsto M(f_1(t), \cdots, f_n(t))$ *est dérivable en* t_0 *et*

$$(M(f_1, \cdots, f_n))'(t_0) = \sum_{i=1}^{n} M(f_1(t_0), \cdots, f_{i-1}(t_0), f_i'(t_0), f_{i+1}(t_0), \cdots, f_n(t_0)).$$

(*ii*) *Si* $f_1, \cdots, f_n$ *sont dérivables, alors* $M(f_1, \cdots, f_n) : t \mapsto M(f_1(t), \cdots, f_n(t))$ *est dérivable et*

$$(M(f_1, \cdots, f_n))' = \sum_{i=1}^{n} M(f_1, \cdots, f_{i-1}, f_i', f_{i+1}, \cdots, f_n).$$

Théorème 20 (Dérivée d'une fonction composée)
Soit $f : I \to F$*, et soit* $\varphi : J \to I$*, où* J *est un intervalle de* $\mathbb{R}$*.*

(*i*) *Si* φ *est dérivable en* $x_0 \in J$ *et si* f *est dérivable en* $\varphi(x_0)$*, alors* $f \circ \varphi$ *est dérivable en* x_0 *et :*

$$(f \circ \varphi)'(x_0) = \varphi'(x_0) f'(\varphi(x_0)).$$

(*ii*) *Si* φ *et* f *sont dérivables, alors* $f \circ \varphi$ *est dérivable et :*

$$(f \circ \varphi)' = \varphi' \times (f' \circ \varphi).$$

3) Dérivées successives

Définition 21 (Fonction de classe $\mathcal{C}^n$)
Soit $f : I \to F$. On définit le fait que f soit **de classe $\mathcal{C}^n$** *récursivement :*

(i) *On dit que f est de classe $\mathcal{C}^0$ lorsqu'elle est continue.*

(ii) *Pour tout entier $n \geq 1$, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^n$ lorsque f est dérivable et que f' est de classe $\mathcal{C}^{n-1}$.*

On dira également que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ lorsqu'elle est de classe $\mathcal{C}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Notation
On notera $\mathcal{C}^n(I, F)$ l'ensemble des fonctions $I \to F$ de classe $\mathcal{C}^n$, pour tout $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.
Pour $f \in \mathcal{C}^n(I, F)$, on notera (comme pour les fonctions à valeurs scalaires) :

$$f^{(0)} = f, \qquad f^{(1)} = f', \qquad \forall k \in [\![1, n]\!],\ f^{(k)} = (f^{(k-1)})'.$$

Propriété 22 (Classe $\mathcal{C}^n$ et coordonnées)
Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_p)$ une base de F et soit $f : I \to F$.
Notons $(f_1, \cdots, f_p)$ les fonctions coordonnées de f dans $\mathcal{B}$.
Alors, f est de classe $\mathcal{C}^n$ si et seulement si toutes les f_i sont de classe $\mathcal{C}^n$, et on a

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \qquad f^{(k)} = \sum_{i=1}^{p} f_i^{(k)} e_i.$$

Propriété 23 (Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^n$)
Avec les notations du paragraphe précédent :

(i) *Si $(f, g) \in \mathcal{C}^n(I, F)^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\lambda f + g \in \mathcal{C}^n(I, F)$ et $(\lambda f + g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + g^{(n)}$.*
En particulier, $\mathcal{C}^n(I, F)$ et $\mathcal{C}^\infty(I, F)$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(I, F)$.

(ii) *Si $f \in \mathcal{C}^n(I, F)$ et $L : F \to G$ est linéaire, alors $L \circ f \in \mathcal{C}^n(I, G)$ et $(L \circ f)^{(n)} = L \circ f^{(n)}$.*

(iii) *Si $f \in \mathcal{C}^n(I, F_1), g \in \mathcal{C}^n(I, F_2)$ et si $B : F_1 \times F_2 \to G$ est bilinéaire, alors $B(f, g) \in \mathcal{C}^n(I, G)$ et*

$$(B(f, g))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B(f^{(k)}, g^{(n-k)}) \qquad \textit{(formule de Leibniz)}.$$

(iv) *Si $f \in \mathcal{C}^n(I, F)$ et $\varphi \in \mathcal{C}^n(J, I)$, alors $f \circ \varphi \in \mathcal{C}^n(J, F)$.*

III Intégration des fonctions vectorielles sur un segment

On va maintenant définir la notion d'intégrale sur un segment $I = [a, b]$ (avec $a < b$) pour une fonction à valeurs vectorielles.

1) Définitions

Définition 24 (Fonction vectorielle continue par morceaux)
Une fonction vectorielle $f : [a, b] \to F$ est dite **continue par morceaux** *s'il existe une subdivision $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ de $[a, b]$ telle que pour tout $k \in \{0, \cdots, n-1\}$, la restriction $f_{|]t_k,t_{k+1}[}$ possède un prolongement continu sur $[t_k, t_{k+1}]$.*

Notation
On notera $\mathcal{C}^0_{pm}([a, b], F)$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux $[a, b] \to F$.

Propriété 25 (Structure algébrique des fonctions continues par morceaux)
$\mathcal{C}^0_{pm}([a, b], F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}([a, b], F)$.

Propriété 26 (Continuité par morceaux et coordonnées)
Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_p)$ une base de F et soit $f : [a, b] \to F$.
Notons $(f_1, \cdots, f_p)$ les fonctions coordonnées de f dans $\mathcal{B}$.
Alors, f est continue par morceaux si et seulement si toutes les f_i sont continues par morceaux.

Théorème 27 (Définition de l'intégrale sur un segment d'une fonction vectorielle)
Soit $f \in \mathcal{C}^0_{pm}([a, b], F)$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_p)$ une base de F, et $(f_1, \cdots, f_p)$ les fonctions coordonnées de f dans $\mathcal{B}$. Alors le vecteur $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \left(\int_a^b f_i(t)dt \right) e_i \in F$ ne dépend pas du choix de la base $\mathcal{B}$.
On l'appelle **intégrale de f sur $[a, b]$**.

Notation
Comme pour les fonctions à valeurs scalaires, on pourra noter l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$, ou $\displaystyle\int_{[a,b]} f$, ou encore $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$. On a donc, pour **toute** base $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_p)$ de F :

$$\int_a^b f = \sum_{i=1}^{p} \left(\int_a^b f_i \right) e_i.$$

2) Propriétés de l'intégrale

Propriété 28 (Linéarité et relation de Chasles)

(*i*) *L'intégrale $f \mapsto \displaystyle\int_a^b f$ est une application linéaire $\mathcal{C}^0_{pm}([a, b], F) \to F$.*

(*ii*) *Pour tout $c \in]a, b[$ et $f \in \mathcal{C}^0_{pm}([a, b], F)$, les restrictions de f aux segments $[a, c]$ et $[c, b]$ sont bien continues par morceaux, et on a*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Propriété 29 (Intégrale d'une composition linéaire)
Soit $f \in \mathcal{C}^0_{pm}([a, b], F)$ et soit $L : F \to G$ linéaire. Alors $L(f) \in \mathcal{C}^0_{pm}([a, b], G)$ et $\int_a^b L(f) = L\left(\int_a^b f\right)$.

Définition 30 (Sommes de Riemann)
Soit $f : [a, b] \to F$ et $\sigma = (a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b)$ une subdivision de $[a, b]$. Etant donnés des réels $(\alpha_0, \cdots, \alpha_{n-1}) \in [t_0, t_1] \times \cdots \times [t_{n-1}, t_n]$, on appelle **somme de Riemann associée à $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{\sigma}$ et $\boldsymbol{\alpha}$** *le vecteur :*

$$R(f, \sigma, \alpha) = \sum_{k=0}^{n-1} (t_{k+1} - t_k) f(\alpha_k) \in F.$$

Théorème 31 (Convergence des sommes de Riemann)
Soit $f \in \mathcal{C}^0_{pm}([a, b], F)$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour toute subdivision σ de pas inférieur à δ et pour tous points $(\alpha_k)_{0 \leq k \leq n-1} \in [t_0, t_1] \times \cdots \times [t_{n-1}, t_n]$:

$$\left\| \int_a^b f - R(f, \sigma, \alpha) \right\| \leq \varepsilon.$$

En particulier, on a

$$R_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f$$

(méthode des rectangles à gauche)

Propriété 32 (Inégalité triangulaire intégrale)
Soit $f \in \mathcal{C}^0_{pm}([a, b], F)$. Alors $\|f\| \in \mathcal{C}^0_{pm}([a, b], \mathbb{R})$ et

$$\left\| \int_a^b f \right\| \leq \int_a^b \|f\|.$$

Corollaire 33 (Inégalité de la moyenne)
Soit $f \in \mathcal{C}^0_{pm}([a, b], F)$. Alors, $\|f\| \in \mathcal{C}^0_{pm}([a, b], \mathbb{R})$ et

$$\left\| \int_a^b f \right\| \leq (b-a) \sup_{t \in [a,b]} \|f(t)\|.$$

3) Théorème fondamental de l'analyse

Notation (Notation polarisée de l'intégrale)
Pour $f \in \mathcal{C}^0_{pm}([a, b], F)$ on pose

$$\int_b^a f = -\int_a^b f \text{ si } a < b, \quad \text{et} \quad \int_b^a f = 0 \text{ si } a = b.$$

Cette notation permet d'étendre la relation de Chasles à tout triplet de points (a, b, c), quelque soient leur positions relatives. Par exemple, on aura

$$\int_1^0 f = \int_1^2 f + \int_2^0 f.$$

Théorème 34 (Théorème fondamental de l'analyse)
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ (non nécessairement un segment), soit $g : I \to F$ et $a \in I$.
Si g est continue, alors la fonction $G : x \mapsto \displaystyle\int_a^x g(t)dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, et $G' = g$.

Corollaire 35 (Formule fondamentale du calcul intégral)
Soit $g : I \to F$ une fonction continue et soit $G : I \to F$ une primitive **quelconque** *de g. Alors :*

$$\forall (a, b) \in I^2, \qquad \int_a^b g(t)dt = G(b) - G(a).$$

Notation
On notera classiquement $[G]_a^b = G(b) - G(a)$.

4) Inégalité des accroissements finis

En revanche, le résultat suivant reste vrai pour les fonctions vectorielles :

Théorème 36 (Inégalité des accroissements finis)
Soit $f \in \mathcal{C}^1(I, F)$. Alors :

$$\forall (a,b) \in I^2, \qquad \|f(b) - f(a)\| \leq |b-a| \sup_{t\in[a,b]} \|f'(t)\|.$$

IV Formules de Taylor pour les fonctions vectorielles

Théorème 37 (Formule de Taylor avec reste intégral)
Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, F)$. Pour tout $(a, b) \in I^2$, on a :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + R_n,$$

où $R_n = \displaystyle\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$.

Corollaire 38 (Inégalité de Taylor-Lagrange)
Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, F)$. Pour tout $(a, b) \in I^2$, on a :

$$\left\| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right\| = \|R_n\| \leq \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{t \in [a,b]} \|f^{(n+1)}(t)\|.$$

Théorème 39 (Formule de Taylor-Young)
Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $f \in \mathcal{C}^n(I, F)$. Pour tout $a \in I$:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(t-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \underset{t \to a}{o}((t-a)^n).$$

V Suites et séries de fonctions vectorielles

Nous allons maintenant généraliser les résultats des chapitres 7 et 9 (suites et séries de fonctions) à des fonctions $f : A \subset E \to F$, où E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.

1) Généralités

Définition 40 (Types de convergence des suites de fonctions)
Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(A,F)^{\mathbb{N}}$, et soit $f \in \mathcal{F}(A,F)$.

(i) *On dit que la suite (f_n)* **converge simplement** *vers f et on note $f_n \underset{CS}{\to} f$ lorsque pour tout $t \in A$, la suite $(f_n(t))$ converge vers $f(t)$ dans F.*

(ii) *On dit que la suite (f_n)* **converge uniformément** *vers f et on note $f_n \underset{CU}{\to} f$ lorsque les fonctions $f_n - f$ sont bornées à partir d'un certain rang et $\|f_n - f\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, où l'on note $\|f_n - f\|_\infty = \sup\limits_{t\in A} \|f_n(t) - f(t)\|_F$.*

Définition 41 (Types de convergence des séries de fonctions)
Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(A,F)^{\mathbb{N}}$.

(i) *On dit que la série de fonctions $\sum\limits_{k\geq 0} f_k$* **converge simplement** *vers $S : A \to F$ lorsque la suite des sommes partielles $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} f_k$ converge simplement vers S.*

(ii) *On dit que la série de fonctions $\sum\limits_{k\geq 0} f_k$* **converge uniformément** *vers $S : A \to F$ lorsque la suite des sommes partielles $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} f_k$ converge uniformément vers S.*

(iii) *On dit que la série de fonctions $\sum\limits_{k\geq 0} f_k$* **converge normalement** *lorsque les f_k sont bornées sur A et la série $\sum\limits_{k\geq 0} \|f_k\|_\infty$ converge.*

Propriété 42 (Lien entre CVU et reste)
Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(A,F)^{\mathbb{N}}$. La série $\sum\limits_{k\geq 0} f_k$ converge uniformément si et seulement si elle converge simplement et la suite des restes $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} f_k$ converge uniformément vers 0.

Propriété 43 (La convergence normale entraîne la convergence uniforme)
Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(A,F)^{\mathbb{N}}$. Si la série $\sum\limits_{k\geq 0} f_k$ converge normalement, alors elle converge uniformément.

2) Continuité et double limite

Théorème 44 (Continuité de la limite d'une suite de fonctions)
Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(A,F)^{\mathbb{N}}$ et $f \in \mathcal{F}(A,F)$.

(i) *Soit $t_0 \in A$. Si les f_n sont continues en t_0 et si (f_n) converge uniformément vers f sur un voisinage de t_0 relatif à A, alors f est continue en t_0.*

(ii) *Si les f_n sont continues sur A et si pour tout $t_0 \in A$, (f_n) converge uniformément vers f sur un voisinage de t_0 relatif à A, alors f est continue sur A.*

Théorème 45 (Continuité de la somme d'une série de fonctions)
Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(A, F)^{\mathbb{N}}$.

(i) *Soit* $t_0 \in A$. *Si les* f_n *sont continues en* t_0 *et si la série* $\sum f_n$ *converge uniformément sur un voisinage de* t_0 *relatif à* A, *alors la fonction somme* $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ *est continue en* t_0.

(ii) *Si les* f_n *sont continues sur* A *et si pour tout* $t_0 \in A$, *la série* $\sum f_n$ *converge uniformément sur un voisinage de* t_0 *relatif à* A, *alors la fonction somme* $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ *est continue sur* A.

Théorème 46 (Théorème de la double limite pour les suites de fonctions)
Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(A, F)^{\mathbb{N}}$, *soit* $f \in \mathcal{F}(A, F)$ *et* $t_0 \in \overline{A}$. *On suppose que :*

(i) *La suite* (f_n) *converge uniformément vers* f *sur un voisinage de* t_0 *relatif à* A.

(ii) *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $f_n(t) \underset{t \to t_0}{\longrightarrow} \ell_n \in F$.

Alors, la suite (ℓ_n) *converge vers* $\ell \in F$ *et* $f(t) \underset{t \to t_0}{\longrightarrow} \ell$, *c'est-à-dire*

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\lim_{t \to t_0} f_n(t) \right) = \lim_{t \to t_0} \left(\lim_{n \to +\infty} f_n(t) \right).$$

Théorème 47 (Théorème de la double limite pour les séries de fonctions)
Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(A, F)^{\mathbb{N}}$ *et* $t_0 \in \overline{A}$. *On suppose que :*

(i) *La série* $\sum f_n$ *converge uniformément sur un voisinage de* t_0 *relatif à* A.

(ii) *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $f_n(t) \underset{t \to t_0}{\longrightarrow} \ell_n \in F$.

Alors, la série $\sum \ell_n$ *converge vers* $\ell \in F$ *et la fonction somme* $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ *vérifie* $S(t) \underset{t \to t_0}{\longrightarrow} \ell$, *c'est-à-dire*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\lim_{t \to t_0} f_n(t) \right) = \lim_{t \to t_0} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right).$$

3) Intégration et dérivation

Propriété 48 (Convergence uniforme des primitives)
Soit I *un intervalle de* $\mathbb{R}$, *soit* $(g_n) \in \mathcal{C}^0(I, F)^{\mathbb{N}}$.
Si (g_n) *converge uniformément vers* $g : I \to F$ *sur tout segment de* I, *alors pour tout* $a \in I$, *la suite de fonctions* (G_n) *définie par*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in I,\ G_n(x) = \int_a^x g_n(t)dt$$

converge uniformément sur tout segment de I *vers la fonction* $G : I \to F$ *définie par*

$$G(x) = \int_a^x g(t)dt.$$

Théorème 49 (Interversion limite/intégrale sur un segment)
Soit (f_n) *une suite de fonctions continues* $[a, b] \to F$ *qui converge uniformément vers* $f : [a, b] \to F$. *Alors*

$$\int_a^b f_n(t)dt \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(t)dt.$$

Propriété 50 (Convergence uniforme d'une série de primitives)
Soit $(g_n) \in \mathcal{F}(I,F)^{\mathbb{N}}$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. On suppose que :

- (i) *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, g_n est continue sur I.*
- (ii) *La série de fonctions $\sum g_n$ converge uniformément sur tout segment de I vers $S : I \to F$.*

Pour tout $a \in I$, on note $G_n : x \mapsto \displaystyle\int_a^x g_n(t)dt$. Alors, la série de fonctions $\sum G_n$ converge uniformément vers $G : x \mapsto \displaystyle\int_a^x S(t)dt$ sur tout segment de I.

Théorème 51 (Théorème d'intégration terme à terme sur un segment)
Soit (f_n) une suite de fonctions continues $[a,b] \to F$. Si la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a,b]$, alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_a^b f_n(t)dt\right) = \int_a^b\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right)dt.$$

Théorème 52 (Théorème de dérivation d'une limite de fonctions)
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soit $(f_n) \in \mathcal{F}(I,F)^{\mathbb{N}}$. On suppose que :

- (i) *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.*
- (ii) *La suite (f_n) converge simplement vers une fonction $f : I \to F$.*
- (iii) *La suite des dérivées (f_n') converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction $g : I \to F$;*

Alors, la suite (f_n) converge uniformément vers f sur tout segment de I, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, et $f' = g$. Autrement dit, on a

$$\lim_{n\to+\infty} f_n' = f' = \left(\lim_{n\to+\infty} f_n\right)'.$$

Théorème 53 (Théorème de dérivation terme à terme d'une série de fonctions)
Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(I,F)^{\mathbb{N}}$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. On suppose que :

- (i) *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \in \mathcal{C}^1(I,F)$.*
- (ii) *La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement vers $S : I \to F$ sur I.*
- (iii) *La série des dérivées $\sum f_n'$ converge uniformément sur tout segment de I vers $T : I \to F$.*

Alors la série $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment de I, la fonction S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, et $S' = T$. Autrement dit, on a

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'.$$