

CH15 : Séries et fonctions vectorielles

\mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

Dans ce chapitre, on va généraliser des notions déjà connues :

- la notion de série, déjà connue pour les suites numériques $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.
On va définir les "séries vectorielles" à partir des suites de vecteurs d'un EVN de dim finie.
- les notions de dérivée et d'intégrale, déjà connues pour les fonctions numériques (c'est-à-dire à valeurs dans \mathbb{K}). On va définir la dérivée et l'intégrale des "fonctions vectorielles" (c'est-à-dire les fonctions à valeurs dans un EVN de dim finie).

Tout ceci est possible grâce à la notion générale de limite dans un espace vectoriel normé (cf. cours de topologie).

I Séries vectorielles

E désigne un \mathbb{K} -espace vectoriel normé non nul de dimension finie.

1) Convergence absolue

Définition 1 (Convergence absolue d'une série vectorielle)

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie.

Etant donné une suite $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$, on dit que la série $\sum u_n$ est **absolument convergente** lorsque la série numérique $\sum \|u_n\|$ converge.

Propriété 2 (Indépendance de la convergence absolue vis-à-vis de la norme)

Le fait qu'une série soit absolument convergente ne dépend pas de la norme $\|\cdot\|$ choisie sur E .

Théorème 3 (La convergence absolue entraîne la convergence en dimension finie)

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie. Si $\sum u_n$ est absolument convergente, alors $\sum u_n$ est convergente.

Propriété 4 (Inégalité triangulaire infinie en dimension finie)

Soit $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$. Si $\sum u_n$ converge absolument, alors on a l'inégalité suivante :

$$\left\| \sum_{k=0}^{+\infty} u_k \right\| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \|u_k\|.$$

2) Séries géométriques matricielles

On se place ici dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, où $n \in \mathbb{N}^*$.

La convergence absolue va nous permettre de définir des séries de matrices.

Lemme 5 (Normes matricielles)

Pour toute norme N sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2, \quad N(AB) \leq CN(A)N(B).$$

Propriété 6 (Série géométrique matricielle)

Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et soit $C > 0$ telle que $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \|AB\| \leq C\|A\|\|B\|$.

Alors pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\|A\| < \frac{1}{C}$, la série $\sum_{k \geq 0} A^k$ converge absolument, donc converge.

De plus, $I_n - A$ est inversible et $(I_n - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} A^k$.

3) Exponentielle de matrice

Théorème 7 (Série exponentielle matricielle)

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la série $\sum_{k \geq 0} \frac{A^k}{k!}$ converge absolument, donc converge.

Sa somme est notée $e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$ et appelée **exponentielle de la matrice A** .

II Dérivabilité des fonctions vectorielles

I désigne un intervalle de \mathbb{R} d'intérieur non vide, et F un \mathbb{K} -espace vectoriel normé non nul de dimension finie (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}). On notera $p = \dim(F) \in \mathbb{N}^*$.

On considère des fonctions $f : I \rightarrow F$.

1) Dérivabilité en un point

Définition 8 (Dérivabilité en un point)

Soit $f : I \rightarrow F$ et $t_0 \in I$. On dit que f est **dérivable en t_0** si la fonction

$$\phi_{t_0} : \begin{cases} I \setminus \{t_0\} & \longrightarrow & F \\ t & \longmapsto & \frac{1}{t-t_0}(f(t) - f(t_0)) \end{cases}$$

possède une limite finie $\ell \in F$ en t_0 .

Dans ce cas, cette limite est appelée **le vecteur dérivé de f en t_0** (ou plus simplement la *dérivée de f en t_0*), et on note

$$f'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h} \in F.$$

Propriété 9 (Expression en coordonnées)

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de F et soit $f : I \rightarrow F$. Notons (f_1, \dots, f_p) les fonctions coordonnées de f dans \mathcal{B} , c'est-à-dire que

$$\forall t \in I, \quad f(t) = \sum_{i=1}^p f_i(t)e_i,$$

avec $f_i : I \rightarrow \mathbb{K}$ pour tout $i \in [1, p]$. Alors :

(i) La fonction f est dérivable en $t_0 \in I$ si et seulement si toutes les f_i sont dérivables en t_0 .

(ii) Dans ce cas, $f'(t_0) = \sum_{i=1}^p f'_i(t_0)e_i$.

Définition 10 (Négligeabilité d'une fonction vectorielle devant une fonction scalaire)

On suppose que $t_0 \in \bar{I}$. Etant données une fonction vectorielle $f : I \rightarrow F$ et une fonction scalaire $g : I \rightarrow \mathbb{K}$, on dit que f est **négligeable** devant g au voisinage de t_0 et on note $f(t) = \underset{t \rightarrow t_0}{o}(g(t))$ lorsque qu'il existe un voisinage V de t_0 relatif à I et une fonction vectorielle $\varepsilon : V \rightarrow F$ telle que $\varepsilon(t) \underset{t \rightarrow t_0}{\longrightarrow} 0_F$ et pour tout $t \in V$, $f(t) = g(t)\varepsilon(t)$.

Propriété 11 (Equivalence entre dérivabilité et DL d'ordre 1)

Une fonction $f : I \rightarrow F$ est dérivable en $t_0 \in I$ si et seulement si il existe $\alpha \in F$ tel que

$$f(t_0 + h) = f(t_0) + h\alpha + \underset{h \rightarrow 0}{o}(h).$$

Dans ce cas, $f'(t_0) = \alpha$.

Corollaire 12 (La dérivabilité entraîne la continuité)

Si $f : I \rightarrow F$ est dérivable en $t_0 \in I$, alors f est continue en t_0 .

Définition 13 (Dérivabilité à droite et à gauche)

Avec les notations de la définition 8 :

- (i) Si t_0 n'est pas la borne inférieure de I , on dit que f est **dérivable à gauche en t_0** lorsque la fonction ϕ_{t_0} possède une limite $\ell \in F$ quand $t \rightarrow t_0^-$.

La dérivée à gauche est notée $f'_g(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0^-} \phi_{t_0}(t)$.

- (ii) Si t_0 n'est pas la borne supérieure de I , on dit que f est **dérivable à droite en t_0** lorsque la fonction ϕ_{t_0} possède une limite $\ell \in F$ quand $t \rightarrow t_0^+$.

La dérivée à droite est notée $f'_d(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0^+} \phi_{t_0}(t)$.

Définition 14 (Fonction dérivée, fonction de classe \mathcal{C}^1)

Soit $f : I \rightarrow F$.

- (i) On dit que f est **dérivable** si elle est dérivable en tout point $t_0 \in I$. On appelle alors

fonction dérivée de f la fonction vectorielle $f' : \begin{cases} I & \longrightarrow & F \\ t & \longmapsto & f'(t) \end{cases}$.

- (ii) On dit que f est de **classe \mathcal{C}^1** lorsqu'elle est dérivable et que sa fonction dérivée f' est continue.

Propriété 15 (Fonction de dérivée nulle sur un intervalle)

Soit $f : I \rightarrow F$ une fonction dérivable. Alors, f' est nulle sur I si et seulement si f est constante sur I .

2) Opérations**Propriété 16 (Opérations linéaires)**

Pour toutes fonctions dérivables $f : I \rightarrow F$ et $g : I \rightarrow F$, et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, la combinaison linéaire $\lambda f + g$ est dérivable, et on a

$$(\lambda f + g)' = \lambda f' + g'.$$

L'ensemble des fonctions dérivables $I \rightarrow F$ est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I, F)$.

Propriété 17 (Composition avec une application linéaire)

Soit $f : I \rightarrow F$, et soit $L : F \rightarrow G$ une application linéaire, où G est un autre \mathbb{K} -espace vectoriel normé de dimension finie.

- (i) Si f est dérivable en t_0 , alors $L \circ f$ est dérivable en t_0 et

$$(L \circ f)'(t_0) = L(f'(t_0)).$$

- (ii) Si f est dérivable, alors $L \circ f$ est dérivable et

$$(L \circ f)' = L \circ f'.$$

Notation

Parfois, la composée $L \circ f$ se notera abusivement $L(f)$.

Avec cette notation, on aura donc $\forall t \in I, L(f)(t) = L(f(t))$.

Propriété 18 (Composition avec une application bilinéaire)

Soient F_1, F_2, G trois \mathbb{K} -espaces vectoriels normés. Soit $f : I \rightarrow F_1, g : I \rightarrow F_2$ et soit $B : F_1 \times F_2 \rightarrow G$ une application bilinéaire.

- (i) Si f et g sont dérivables en $t_0 \in I$, alors $B(f, g) : t \mapsto B(f(t), g(t))$ est dérivable en t_0 et :

$$(B(f, g))'(t_0) = B(f'(t_0), g(t_0)) + B(f(t_0), g'(t_0)).$$

- (ii) Si f et g sont dérivables, alors $B(f, g) : t \mapsto B(f(t), g(t))$ est dérivable et :

$$(B(f, g))' = B(f', g) + B(f, g').$$

Propriété 19 (Composition avec une application multilinéaire)

Soient F_1, \dots, F_n, G des \mathbb{K} -espaces vectoriels normés de dimension finie, soit $f_1 : I \rightarrow F_1, \dots, f_n : I \rightarrow F_n$ des fonctions vectorielles et soit $M : F_1 \times \dots \times F_n \rightarrow G$ une application multilinéaire.

- (i) Si f_1, \dots, f_n sont dérivables en $t_0 \in I$, alors $M(f_1, \dots, f_n) : t \mapsto M(f_1(t), \dots, f_n(t))$ est dérivable en t_0 et

$$(M(f_1, \dots, f_n))'(t_0) = \sum_{i=1}^n M(f_1(t_0), \dots, f_{i-1}(t_0), f'_i(t_0), f_{i+1}(t_0), \dots, f_n(t_0)).$$

- (ii) Si f_1, \dots, f_n sont dérivables, alors $M(f_1, \dots, f_n) : t \mapsto M(f_1(t), \dots, f_n(t))$ est dérivable et

$$(M(f_1, \dots, f_n))' = \sum_{i=1}^n M(f_1, \dots, f_{i-1}, f'_i, f_{i+1}, \dots, f_n).$$

Théorème 20 (Dérivée d'une fonction composée)

Soit $f : I \rightarrow F$, et soit $\varphi : J \rightarrow I$, où J est un intervalle de \mathbb{R} .

- (i) Si φ est dérivable en $x_0 \in J$ et si f est dérivable en $\varphi(x_0)$, alors $f \circ \varphi$ est dérivable en x_0 et :

$$(f \circ \varphi)'(x_0) = \varphi'(x_0) f'(\varphi(x_0)).$$

- (ii) Si φ et f sont dérivables, alors $f \circ \varphi$ est dérivable et :

$$(f \circ \varphi)' = \varphi' \times (f' \circ \varphi).$$

3) Dérivées successives

Définition 21 (Fonction de classe \mathcal{C}^n)

Soit $f : I \rightarrow F$. On définit le fait que f soit de classe \mathcal{C}^n récursivement :

- (i) On dit que f est de classe \mathcal{C}^0 lorsqu'elle est continue.
- (ii) Pour tout entier $n \geq 1$, on dit que f est de classe \mathcal{C}^n lorsque f est dérivable et que f' est de classe \mathcal{C}^{n-1} .

On dira également que f est de classe \mathcal{C}^∞ lorsqu'elle est de classe \mathcal{C}^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Notation

On notera $\mathcal{C}^n(I, F)$ l'ensemble des fonctions $I \rightarrow F$ de classe \mathcal{C}^n , pour tout $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Pour $f \in \mathcal{C}^n(I, F)$, on notera (comme pour les fonctions à valeurs scalaires) :

$$f^{(0)} = f, \quad f^{(1)} = f', \quad \forall k \in [1, n], \quad f^{(k)} = (f^{(k-1)})'.$$

Propriété 22 (Classe \mathcal{C}^n et coordonnées)

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de F et soit $f : I \rightarrow F$.

Notons (f_1, \dots, f_p) les fonctions coordonnées de f dans \mathcal{B} .

Alors, f est de classe \mathcal{C}^n si et seulement si toutes les f_i sont de classe \mathcal{C}^n , et on a

$$\forall k \in [1, n], \quad f^{(k)} = \sum_{i=1}^p f_i^{(k)} e_i.$$

Propriété 23 (Opérations sur les fonctions de classe \mathcal{C}^n)

Avec les notations du paragraphe précédent :

- (i) Si $(f, g) \in \mathcal{C}^n(I, F)^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\lambda f + g \in \mathcal{C}^n(I, F)$ et $(\lambda f + g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + g^{(n)}$.
En particulier, $\mathcal{C}^n(I, F)$ et $\mathcal{C}^\infty(I, F)$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(I, F)$.
- (ii) Si $f \in \mathcal{C}^n(I, F)$ et $L : F \rightarrow G$ est linéaire, alors $L \circ f \in \mathcal{C}^n(I, G)$ et $(L \circ f)^{(n)} = L \circ f^{(n)}$.
- (iii) Si $f \in \mathcal{C}^n(I, F_1)$, $g \in \mathcal{C}^n(I, F_2)$ et si $B : F_1 \times F_2 \rightarrow G$ est bilinéaire, alors $B(f, g) \in \mathcal{C}^n(I, G)$
et

$$(B(f, g))^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B(f^{(k)}, g^{(n-k)}) \quad (\text{formule de Leibniz}).$$

- (iv) Si $f \in \mathcal{C}^n(I, F)$ et $\varphi \in \mathcal{C}^n(J, I)$, alors $f \circ \varphi \in \mathcal{C}^n(J, F)$.

III Intégration des fonctions vectorielles sur un segment

On va maintenant définir la notion d'intégrale sur un segment $I = [a, b]$ (avec $a < b$) pour une fonction à valeurs vectorielles.

1) Définitions

Définition 24 (Fonction vectorielle continue par morceaux)

Une fonction vectorielle $f : [a, b] \rightarrow F$ est dite **continue par morceaux** s'il existe une subdivision $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ de $[a, b]$ telle que pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$, la restriction $f|_{]t_k, t_{k+1}[}$ possède un prolongement continu sur $[t_k, t_{k+1}]$.

Notation

On notera $\mathcal{C}_{pm}^0([a, b], F)$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux $[a, b] \rightarrow F$.

Propriété 25 (Structure algébrique des fonctions continues par morceaux)

$\mathcal{C}_{pm}^0([a, b], F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}([a, b], F)$.

Propriété 26 (Continuité par morceaux et coordonnées)

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de F et soit $f : [a, b] \rightarrow F$.

Notons (f_1, \dots, f_p) les fonctions coordonnées de f dans \mathcal{B} .

Alors, f est continue par morceaux si et seulement si toutes les f_i sont continues par morceaux.

Théorème 27 (Définition de l'intégrale sur un segment d'une fonction vectorielle)

Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}^0([a, b], F)$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de F , et (f_1, \dots, f_p) les fonctions coordonnées

de f dans \mathcal{B} . Alors le vecteur $\sum_{i=1}^p \left(\int_a^b f_i(t) dt \right) e_i \in F$ ne dépend pas du choix de la base \mathcal{B} .

On l'appelle **intégrale de f sur $[a, b]$** .

Notation

Comme pour les fonctions à valeurs scalaires, on pourra noter l'intégrale $\int_a^b f$, ou $\int_{[a,b]} f$, ou encore

$\int_a^b f(t) dt$. On a donc, pour toute base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ de F :

$$\int_a^b f = \sum_{i=1}^p \left(\int_a^b f_i \right) e_i.$$

2) Propriétés de l'intégrale

Propriété 28 (Linéarité et relation de Chasles)

(i) L'intégrale $f \mapsto \int_a^b f$ est une application linéaire $\mathcal{C}_{pm}^0([a, b], F) \rightarrow F$.

(ii) Pour tout $c \in]a, b[$ et $f \in \mathcal{C}_{pm}^0([a, b], F)$, les restrictions de f aux segments $[a, c]$ et $[c, b]$ sont bien continues par morceaux, et on a

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Propriété 29 (Intégrale d'une composition linéaire)

Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}^0([a, b], F)$ et soit $L : F \rightarrow G$ linéaire. Alors $L(f) \in \mathcal{C}_{pm}^0([a, b], G)$ et $\int_a^b L(f) = L \left(\int_a^b f \right)$.

Définition 30 (Sommes de Riemann)

Soit $f : [a, b] \rightarrow F$ et $\sigma = (a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b)$ une subdivision de $[a, b]$. Etant donné des réels $(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}) \in [t_0, t_1] \times \dots \times [t_{n-1}, t_n]$, on appelle **somme de Riemann associée à f , σ et α** le vecteur :

$$R(f, \sigma, \alpha) = \sum_{k=0}^{n-1} (t_{k+1} - t_k) f(\alpha_k) \in F.$$

Théorème 31 (Convergence des sommes de Riemann)

Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}^0([a, b], F)$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour toute subdivision σ de pas inférieur à δ et pour tous points $(\alpha_k)_{0 \leq k \leq n-1} \in [t_0, t_1] \times \dots \times [t_{n-1}, t_n]$:

$$\left\| \int_a^b f - R(f, \sigma, \alpha) \right\| \leq \varepsilon.$$

En particulier, on a $R_n(f) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f$.

Propriété 32 (Inégalité triangulaire intégrale)

Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}^0([a, b], F)$. Alors $\|f\| \in \mathcal{C}_{pm}^0([a, b], \mathbb{R})$ et

$$\left\| \int_a^b f \right\| \leq \int_a^b \|f\|.$$

Corollaire 33 (Inégalité de la moyenne)

Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}^0([a, b], F)$. Alors, $\|f\| \in \mathcal{C}_{pm}^0([a, b], \mathbb{R})$ et

$$\left\| \int_a^b f \right\| \leq (b - a) \sup_{t \in [a, b]} \|f(t)\|.$$

3) Théorème fondamental de l'analyse**Notation (Notation polarisée de l'intégrale)**

Pour $f \in \mathcal{C}_{pm}^0([a, b], F)$ on pose

$$\int_b^a f = - \int_a^b f \text{ si } a < b, \quad \text{et} \quad \int_a^a f = 0 \text{ si } a = b.$$

Cette notation permet d'étendre la relation de Chasles à tout triplet de points (a, b, c) , quelque soient leur positions relatives. Par exemple, on aura

$$\int_1^0 f = \int_1^2 f + \int_2^0 f.$$

Théorème 34 (Théorème fondamental de l'analyse)

Soit I un intervalle de \mathbb{R} (non nécessairement un segment), soit $g : I \rightarrow F$ et $a \in I$.

Si g est continue, alors la fonction $G : x \mapsto \int_a^x g(t) dt$ est de classe \mathcal{C}^1 sur I , et $G' = g$.

Corollaire 35 (Formule fondamentale du calcul intégral)

Soit $g : I \rightarrow F$ une fonction continue et soit $G : I \rightarrow F$ une primitive quelconque de g . Alors :

$$\forall (a, b) \in I^2, \quad \int_a^b g(t) dt = G(b) - G(a).$$

Notation

On notera classiquement $[G]_a^b = G(b) - G(a)$.

4) Inégalité des accroissements finis

En revanche, le résultat suivant reste vrai pour les fonctions vectorielles :

Théorème 36 (Inégalité des accroissements finis)

Soit $f \in \mathcal{C}^1(I, F)$. Alors :

$$\forall (a, b) \in I^2, \quad \|f(b) - f(a)\| \leq |b - a| \sup_{t \in [a, b]} \|f'(t)\|.$$

IV Formules de Taylor pour les fonctions vectorielles

Théorème 37 (Formule de Taylor avec reste intégral)

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, F)$. Pour tout $(a, b) \in I^2$, on a :

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + R_n,$$

où $R_n = \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$

Corollaire 38 (Inégalité de Taylor-Lagrange)

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, F)$. Pour tout $(a, b) \in I^2$, on a :

$$\left\| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right\| = \|R_n\| \leq \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{t \in [a,b]} \|f^{(n+1)}(t)\|.$$

Théorème 39 (Formule de Taylor-Young)

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $f \in \mathcal{C}^n(I, F)$. Pour tout $a \in I$:

$$f(t) = \sum_{k=0}^n \frac{(t-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o_{t \rightarrow a}((t-a)^n).$$

V Suites et séries de fonctions vectorielles

Nous allons maintenant généraliser les résultats des chapitres 7 et 9 (suites et séries de fonctions) à des fonctions $f : A \subset E \rightarrow F$, où E et F sont deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension finie.

1) Généralités

Définition 40 (Types de convergence des suites de fonctions)

Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(A, F)^{\mathbb{N}}$, et soit $f \in \mathcal{F}(A, F)$.

- (i) On dit que la suite (f_n) **converge simplement** vers f et on note $f_n \xrightarrow{CS} f$ lorsque pour tout $t \in A$, la suite $(f_n(t))$ converge vers $f(t)$ dans F .
- (ii) On dit que la suite (f_n) **converge uniformément** vers f et on note $f_n \xrightarrow{CU} f$ lorsque les fonctions $f_n - f$ sont bornées à partir d'un certain rang et $\|f_n - f\|_{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, où l'on note $\|f_n - f\|_{\infty} = \sup_{t \in A} \|f_n(t) - f(t)\|_F$.

Définition 41 (Types de convergence des séries de fonctions)

Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(A, F)^{\mathbb{N}}$.

- (i) On dit que la série de fonctions $\sum_{k \geq 0} f_k$ **converge simplement** vers $S : A \rightarrow F$ lorsque la suite des sommes partielles $S_n = \sum_{k=0}^n f_k$ converge simplement vers S .
- (ii) On dit que la série de fonctions $\sum_{k \geq 0} f_k$ **converge uniformément** vers $S : A \rightarrow F$ lorsque la suite des sommes partielles $S_n = \sum_{k=0}^n f_k$ converge uniformément vers S .
- (iii) On dit que la série de fonctions $\sum_{k \geq 0} f_k$ **converge normalement** lorsque les f_k sont bornées sur A et la série $\sum_{k \geq 0} \|f_k\|_{\infty}$ converge.

Propriété 42 (Lien entre CVU et reste)

Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(A, F)^{\mathbb{N}}$. La série $\sum_{k \geq 0} f_k$ converge normalement si et seulement si elle converge simplement et la suite des restes $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k$ converge uniformément vers 0.

Propriété 43 (La convergence normale entraîne la convergence uniforme)

Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(A, F)^{\mathbb{N}}$. Si la série $\sum_{k \geq 0} f_k$ converge normalement, alors elle converge uniformément.

2) Continuité et double limite

Théorème 44 (Continuité de la limite d'une suite de fonctions)

Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(A, F)^{\mathbb{N}}$ et $f \in \mathcal{F}(A, F)$.

- (i) Soit $t_0 \in A$. Si les f_n sont continues en t_0 et si (f_n) converge uniformément vers f sur un voisinage de t_0 relatif à A , alors f est continue en t_0 .
- (ii) Si les f_n sont continues sur A et si pour tout $t_0 \in A$, (f_n) converge uniformément vers f sur un voisinage de t_0 relatif à A , alors f est continue sur A .

Théorème 45 (Continuité de la somme d'une série de fonctions)

Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(A, F)^{\mathbb{N}}$.

- (i) Soit $t_0 \in A$. Si les f_n sont continues en t_0 et si la série $\sum f_n$ converge uniformément sur un voisinage de t_0 relatif à A , alors la fonction somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue en t_0 .
- (ii) Si les f_n sont continues sur A et si pour tout $t_0 \in A$, la série $\sum f_n$ converge uniformément sur un voisinage de t_0 relatif à A , alors la fonction somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur A .

Théorème 46 (Théorème de la double limite pour les suites de fonctions)

Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(A, F)^{\mathbb{N}}$, soit $f \in \mathcal{F}(A, F)$ et $t_0 \in \bar{A}$. On suppose que :

- (i) La suite (f_n) converge uniformément vers f sur un voisinage de t_0 relatif à A .
- (ii) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(t) \xrightarrow{t \rightarrow t_0} \ell_n \in F$.

Alors, la suite (ℓ_n) converge vers $\ell \in F$ et $f(t) \xrightarrow{t \rightarrow t_0} \ell$, c'est-à-dire

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\lim_{t \rightarrow t_0} f_n(t) \right) = \lim_{t \rightarrow t_0} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) \right).$$

Théorème 47 (Théorème de la double limite pour les séries de fonctions)

Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(A, F)^{\mathbb{N}}$ et $t_0 \in \bar{A}$. On suppose que :

- (i) La série $\sum f_n$ converge uniformément sur un voisinage de t_0 relatif à A .
- (ii) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(t) \xrightarrow{t \rightarrow t_0} \ell_n \in F$.

Alors, la série $\sum \ell_n$ converge vers $\ell \in F$ et la fonction somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ vérifie $S(t) \xrightarrow{t \rightarrow t_0} \ell$, c'est-à-dire

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\lim_{t \rightarrow t_0} f_n(t) \right) = \lim_{t \rightarrow t_0} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right).$$

3) Intégration et dérivation**Propriété 48 (Convergence uniforme des primitives)**

Soit I un intervalle de \mathbb{R} , soit $(g_n) \in \mathcal{C}^0(I, F)^{\mathbb{N}}$.

Si (g_n) converge uniformément vers $g : I \rightarrow F$ sur tout segment de I , alors pour tout $a \in I$, la suite de fonctions (G_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, G_n(x) = \int_a^x g_n(t) dt$$

converge uniformément sur tout segment de I vers la fonction $G : I \rightarrow F$ définie par

$$G(x) = \int_a^x g(t) dt.$$

Théorème 49 (Interversion limite/intégrale sur un segment)

Soit (f_n) une suite de fonctions continues $[a, b] \rightarrow F$ qui converge uniformément vers $f : [a, b] \rightarrow F$. Alors

$$\int_a^b f_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt.$$

Propriété 50 (Convergence uniforme d'une série de primitives)

Soit $(g_n) \in \mathcal{F}(I, F)^{\mathbb{N}}$, où I est un intervalle de \mathbb{R} . On suppose que :

- (i) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, g_n est continue sur I .
- (ii) La série de fonctions $\sum g_n$ converge uniformément sur tout segment de I vers $S : I \rightarrow F$.

Pour tout $a \in I$, on note $G_n : x \mapsto \int_a^x g_n(t)dt$. Alors, la série de fonctions $\sum G_n$ converge uniformément vers $G : x \mapsto \int_a^x S(t)dt$ sur tout segment de I .

Théorème 51 (Théorème d'intégration terme à terme sur un segment)

Soit (f_n) une suite de fonctions continues $[a, b] \rightarrow F$. Si la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a, b]$, alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_a^b f_n(t)dt \right) = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right) dt.$$

Théorème 52 (Théorème de dérivation d'une limite de fonctions)

Soit I un intervalle de \mathbb{R} , soit $(f_n) \in \mathcal{F}(I, F)^{\mathbb{N}}$. On suppose que :

- (i) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe \mathcal{C}^1 sur I .
- (ii) La suite (f_n) converge simplement vers une fonction $f : I \rightarrow F$.
- (iii) La suite des dérivées (f'_n) converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction $g : I \rightarrow F$;

Alors, la suite (f_n) converge uniformément vers f sur tout segment de I , f est de classe \mathcal{C}^1 sur I , et $f' = g$. Autrement dit, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n = f' = \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n \right)'.$$

Théorème 53 (Théorème de dérivation terme à terme d'une série de fonctions)

Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(I, F)^{\mathbb{N}}$, où I est un intervalle de \mathbb{R} . On suppose que :

- (i) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \in \mathcal{C}^1(I, F)$.
- (ii) La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement vers $S : I \rightarrow F$ sur I .
- (iii) La série des dérivées $\sum f'_n$ converge uniformément sur tout segment de I vers $T : I \rightarrow F$.

Alors la série $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment de I , la fonction S est de classe \mathcal{C}^1 sur I , et $S' = T$. Autrement dit, on a

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n.$$