CH15 : Séries et fonctions vectorielles

Table des matières

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Dans ce chapitre, on va généraliser des notions déjà connues :

- la notion de série, déjà connue pour les suites numériques $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.
  On va définir les "séries vectorielles" à partir des suites de vecteurs d'un EVN de dim finie.
- les notions de dérivée et d'intégrale, déjà connues pour les fonctions numériques (c'est-à-dire à valeurs dans $\mathbb{K}$). On va définir la dérivée et l'intégrale des "fonctions vectorielles" (c'est-à-dire les fonctions à valeurs dans un EVN de dim finie).

Tout ceci est possible grâce à la notion générale de limite dans un espace vectoriel normé (cf. cours de topologie).

I Séries vectorielles

E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé non nul de dimension finie.

1) Convergence absolue

Définition 1 (Convergence absolue d'une série vectorielle)
Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie.
Etant donné une suite $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$, on dit que la série $\sum u_n$ est **absolument convergente** *lorsque la série numérique $\sum \|u_n\|$ converge.*

Propriété 2 (Indépendance de la convergence absolue vis-à-vis de la norme)
Le fait qu'une série soit absolument convergente ne dépend pas de la norme $\|.\|$ choisie sur E.

Preuve
Soit $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$. Si $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ sont deux normes sur E, alors elles sont équivalentes, puisque E est de dimension finie. Donc il existe deux constantes $C_1, C_2 > 0$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \|u_n\|_1 \leq C_1 \|u_n\|_2, \qquad \|u_n\|_2 \leq C_2 \|u_n\|_1.$$

Par comparaison de séries à termes positifs, on en déduit alors que

$$\sum \|u_n\|_1 \text{ converge } \iff \sum \|u_n\|_2 \text{ converge }.$$

Théorème 3 (La convergence absolue entraîne la convergence en dimension finie)
Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie. Si $\sum u_n$ est absolument convergente, alors $\sum u_n$ est convergente.

Preuve
Fixons une base $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_p)$ de E et travaillons avec la norme $\|.\|_{\infty,\mathcal{B}}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$u_n = \sum_{i=1}^{p} u_{n,i} e_i.$$

On a donc $\|u_n\|_{\infty,\mathcal{B}} = \max_{1 \leq i \leq p} |u_{n,i}|$.
Si $\sum u_n$ est absolument convergente, alors $\sum \|u_n\|_{\infty,\mathcal{B}}$ converge, donc puisque $|u_{n,i}| \leq \|u_n\|_{\infty,\mathcal{B}}$ pour tout $(n, i) \in \mathbb{N} \times \{1, \cdots, p\}$, on en déduit par comparaison de séries à termes positifs que $\sum_{n \geq 0} |u_{n,i}|$ converge pour tout $i \in \{1, \cdots, p\}$. Ainsi, la série numérique $\sum_{n \geq 0} u_{n,i}$ converge dans $\mathbb{K}$ (puisque elle converge absolument). Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{i=1}^{p} u_{k,i} e_i \right) = \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{k=0}^{n} u_{k,i} \right) e_i,$$

on en déduit que les suites coordonnées de (S_n) convergent, donc (S_n) converge.

Propriété 4 (Inégalité triangulaire infinie en dimension finie)
Soit $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$*.* **Si $\sum u_n$ converge absolument, alors** *on a l'inégalité suivante :*

$$\left\| \sum_{k=0}^{+\infty} u_k \right\| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \|u_k\|.$$

Preuve
La même que dans le cas des séries numériques, en remplaçant le module par la norme sur E.

2) Séries géométriques matricielles

On se place ici dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, où $n \in \mathbb{N}^*$.
La convergence absolue va nous permettre de définir des séries de matrices.

Lemme 5 (Normes matricielles)
Pour toute norme N sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2, \qquad N(AB) \leq C N(A) N(B).$$

Remarque
Lorsque $C = 1$ dans l'inégalité précédente, on parle de **norme sous-multiplicative**.
On sait par exemple que la norme triple $|||\ .\ |||$ définie par

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \qquad |||A||| = \sup_{X \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}} \frac{\|AX\|}{\|X\|}$$

est une norme sous-multiplicative sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (où $\|\ .\ \|$ désigne n'importe quelle norme sur $\mathbb{K}^n$).

Preuve
Soit N une norme quelconque sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et soit N' une norme sous-multiplicative sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (par exemple une norme triple). Ces deux normes sont équivalentes, donc il existe deux constantes $C_1, C_2 > 0$ telles que

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \qquad N(A) \leq C_1 N'(A), \qquad N'(A) \leq C_2 N(A).$$

Pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a donc

$$N(AB) \leq C_1 N'(AB) \leq C_1 N'(A) N'(B) \leq C_1 C_2^2 N(A) N(B),$$

d'où le résultat avec $C = C_1 C_2^2$.

Exemple
La norme $\|A\|_\infty = \max\limits_{1 \leq i,j \leq n} |a_{i,j}|$ vérifie

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2, \qquad \|AB\|_\infty = \max_{1 \leq i,j \leq n} \left|\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}\right| \leq n \|A\|_\infty \|B\|_\infty,$$

et cette constante $C = n$ est optimale (atteinte lorsque $A = B$ est la matrice dont tous les coefficients valent 1).

Propriété 6 (Série géométrique matricielle)
Soit $\|\ .\ \|$ une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et soit $C > 0$ telle que $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\|AB\| \leq C\|A\|\|B\|$.
Alors pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\|A\| < \dfrac{1}{C}$, la série $\sum\limits_{k \geq 0} A^k$ converge absolument, donc converge.
De plus, $I_n - A$ est inversible et $(I_n - A)^{-1} = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} A^k$.

Preuve
Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a par récurrence triviale :

$$\|A^k\| \leq C^{k-1}\|A\|^k = \frac{1}{C}(C\|A\|)^k.$$

Si $\|A\| < \frac{1}{C}$, la série géométrique réelle $\sum \frac{1}{C}(C\|A\|)^k$ converge, donc $\sum \|A^k\|$ converge par comparaison de séries à termes positifs. On en déduit que $\sum A^k$ converge absolument, donc converge.
En outre, pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$\left(\sum_{k=0}^{N} A^k\right)(I_n - A) = \sum_{k=0}^{N} A^k - \sum_{k=0}^{N} A^{k+1} = I_n - A^{N+1}$$

(par téléscopage), donc

$$\left(\sum_{k=0}^{N} A^k\right)(I_n - A) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} I_n,$$

puisque $\|A^{N+1}\| \leq \frac{1}{C}(C\|A\|)^{N+1}$.
Mais par continuité du produit matriciel, on a aussi

$$\left(\sum_{k=0}^{N} A^k\right)(I_n - A) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} A^k\right)(I_n - A),$$

donc par unicité de la limite :

$$\left(\sum_{k=0}^{+\infty} A^k\right)(I_n - A) = I_n.$$

On montre de même que

$$(I_n - A)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} A^k\right) = I_n,$$

d'où le résultat.

Remarque
Remarquer l'analogie entre les formules $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} A^k = (I_n - A)^{-1}$ *et* $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = (1-q)^{-1}$.

3) Exponentielle de matrice

Théorème 7 (Série exponentielle matricielle)
Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la série $\displaystyle\sum_{k\geq 0} \frac{A^k}{k!}$ *converge absolument, donc converge.*
Sa somme est notée $\displaystyle e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$ *et appelée* **exponentielle de la matrice** *A.*

Preuve
Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la preuve précédente (avec les mêmes notations) montre que :

$$\left\|\frac{A^k}{k!}\right\| \leq \frac{C^{k-1}}{k!}\|A\|^k = \frac{1}{C}\frac{(C\|A\|)^k}{k!},$$

et on sait que la série $\sum \frac{(C\|A\|)^k}{k!}$ converge (série exponentielle). D'où le résultat.

Remarque
- *L'exponentielle de matrice sera notamment utilisée dans la résolution des systèmes différentiels linéaires.*

- *On peut aussi considérer des séries d'endomorphismes* $u \in \mathcal{L}(E)$ *et définir* $e^u = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{u^k}{k!}$ *(où* $u^k = u \circ u \cdots u$*).*
  En effet, $\mathcal{L}(E)$ *est de dimension finie si* E *l'est, et il existe des normes sous-multiplicatives sur* $\mathcal{L}(E)$ *(les normes triples !), donc la série* $\sum \frac{u^k}{k!}$ *converge absolument.*

II Dérivabilité des fonctions vectorielles

I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide, et F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé non nul de dimension finie (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On notera $p = \dim(F) \in \mathbb{N}^*$.
On considère des fonctions $f : I \to F$.

ATTENTION !
Ces fonctions sont **à valeurs vectorielles**, mais ce sont quand même des fonctions **d'une variable réelle**, puisque $I \subset \mathbb{R}$.
Lorsque $f : A \subset E \to F$, où E et F sont deux espaces vectoriels normés, les notions de dérivée et d'intégrale sont plus difficiles à généraliser. La généralisation de la notion de dérivée à de telles fonctions sera l'objet du dernier chapitre (Calcul différentiel).

1) Dérivabilité en un point

Définition 8 (Dérivabilité en un point)
Soit $f : I \to F$ et $t_0 \in I$. On dit que f est **dérivable en t_0** *si la fonction*

$$\phi_{t_0} : \begin{cases} I \setminus \{t_0\} & \longrightarrow & F \\ t & \longmapsto & \dfrac{1}{t - t_0}(f(t) - f(t_0)) \end{cases}$$

possède une limite finie $\ell \in F$ en t_0.
Dans ce cas, cette limite est appelée **le vecteur dérivé de f en t_0** *(ou plus simplement la dérivée de f en t_0), et on note*

$$f'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h} \in F.$$

Remarque (Interprétation cinématique du vecteur dérivé)
Dans le cas où $F = \mathbb{R}^2$ ou $F = \mathbb{R}^3$, une fonction vectorielle $f : I \to F$ peut-être imaginée comme le déplacement d'un point dans le plan ou l'espace F, en fonction du paramètre t (qui peut se représenter comme le temps). C'est pourquoi on dit aussi que lorsqu'il existe, $f'(t_0)$ est le **vecteur vitesse** *à l'instant t_0.*

Propriété 9 (Expression en coordonnées)
Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_p)$ une base de F et soit $f : I \to F$. Notons $(f_1, \cdots, f_p)$ les fonctions coordonnées de f dans $\mathcal{B}$, c'est-à-dire que

$$\forall t \in I, \qquad f(t) = \sum_{i=1}^{p} f_i(t) e_i,$$

avec $f_i : I \to \mathbb{K}$ pour tout $i \in [\![1, p]\!]$. Alors :

(i) La fonction f est dérivable en $t_0 \in I$ si et seulement si toutes les f_i sont dérivables en t_0.

(ii) Dans ce cas, $f'(t_0) = \sum_{i=1}^{p} f_i'(t_0) e_i$.

Définition 10 (Négligeabilité d'une fonction vectorielle devant une fonction scalaire)
On suppose que $t_0 \in \overline{I}$. Etant données une fonction vectorielle $f : I \to F$ et une fonction scalaire $g : I \to \mathbb{K}$, on dit que f est **négligeable** *devant g au voisinage de t_0 et on note $f(t) = \underset{t \to t_0}{o}(g(t))$ lorsque qu'il existe un voisinage V de t_0 relatif à I et une fonction vectorielle $\varepsilon : V \to F$ telle que $\varepsilon(t) \underset{t \to t_0}{\longrightarrow} 0_F$ et pour tout $t \in V$, $f(t) = g(t)\varepsilon(t)$.*

Exemple

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f(t) = \underset{t \to 0}{o}(t^k)$ signifie qu'au voisinage de 0, f est de la forme

$$f(t) = t^k \varepsilon(t),$$

avec $\varepsilon(t) \underset{t \to 0}{\longrightarrow} 0_F$.

Remarque

(i) Si g ne s'annule pas au voisinage de t_0, alors

$$f(t) = \underset{t \to t_0}{o}(g(t)) \iff \frac{1}{g(t)} f(t) \underset{t \to t_0}{\longrightarrow} 0_F \iff \frac{\|f(t)\|}{|g(t)|} \underset{t \to t_0}{\longrightarrow} 0 \iff \|f(t)\| = \underset{t \to t_0}{o}(|g(t)|).$$

(ii) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a l'équivalence :

$$f(t) = \underset{t \to t_0}{o}((t - t_0)^k) \iff f(t_0 + h) = \underset{h \to 0}{o}(h^k).$$

Propriété 11 (Equivalence entre dérivabilité et DL d'ordre 1)
Une fonction $f : I \to F$ est dérivable en $t_0 \in I$ si et seulement si il existe $\alpha \in F$ tel que

$$f(t_0 + h) = f(t_0) + h\alpha + \underset{h \to 0}{o}(h).$$

Dans ce cas, $f'(t_0) = \alpha$.

Corollaire 12 (La dérivabilité entraîne la continuité)
Si $f : I \to F$ est dérivable en $t_0 \in I$, alors f est continue en t_0.

Définition 13 (Dérivabilité à droite et à gauche)
Avec les notations de la définition 8 :

(i) Si t_0 n'est pas la borne inférieure de I, on dit que f est **dérivable à gauche en t_0** *lorsque la fonction ϕ_{t_0} possède une limite $\ell \in F$ quand $t \to t_0^-$.*
La dérivée à gauche est notée $f'_g(t_0) = \lim_{t \to t_0^-} \phi_{t_0}(t)$.

(ii) Si t_0 n'est pas la borne supérieure de I, on dit que f est **dérivable à droite en t_0** *lorsque la fonction ϕ_{t_0} possède une limite $\ell \in F$ quand $t \to t_0^+$.*
La dérivée à droite est notée $f'_d(t_0) = \lim_{t \to t_0^+} \phi_{t_0}(t)$.

Définition 14 (Fonction dérivée, fonction de classe $\mathcal{C}^1$)
Soit $f : I \to F$.

(i) On dit que f est **dérivable** *si elle est dérivable en tout point $t_0 \in I$. On appelle alors* **fonction dérivée de f** *la fonction vectorielle* $f' : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & F \\ t & \longmapsto & f'(t) \end{array} \right.$.

(ii) On dit que f est **de classe $\mathcal{C}^1$** *lorsqu'elle est dérivable et que sa fonction dérivée f' est continue.*

Propriété 15 (Fonction de dérivée nulle sur un intervalle)
Soit $f : I \to F$ une fonction dérivable. Alors, f' est nulle sur I si et seulement si f est constante sur I.

ATTENTION !
Dans ce cadre des fonctions vectorielles, cela n'a aucun sens de parler du "signe de f'" et des "variations de f".

2) Opérations

Propriété 16 (Opérations linéaires)
Pour toutes fonctions dérivables $f : I \to F$ et $g : I \to F$, et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, la combinaison linéaire $\lambda f + g$ est dérivable, et on a

$$(\lambda f + g)' = \lambda f' + g'.$$

L'ensemble des fonctions dérivables $I \to F$ est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I, F)$.

Remarque
C'est même un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0(I, F)$.

Propriété 17 (Composition avec une application linéaire)
Soit $f : I \to F$, et soit $L : F \to G$ une application linéaire, où G est un autre $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie.

(i) Si f est dérivable en t_0, alors $L \circ f$ est dérivable en t_0 et

$$(L \circ f)'(t_0) = L(f'(t_0)).$$

(ii) Si f est dérivable, alors $L \circ f$ est dérivable et

$$(L \circ f)' = L \circ f'.$$

Notation
Parfois, la composée $L \circ f$ se notera abusivement $L(f)$.
Avec cette notation, on aura donc $\forall t \in I,\ L(f)(t) = L(f(t))$.

Exemple
Si $f : I \to \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ est dérivable, alors en composant avec $L = tr : \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, on obtient bien que

$$(L \circ f)'(t) = \frac{d}{dt}(tr(f(t))) = \frac{d}{dt}(a_{1,1}(t) + a_{2,2}(t)) = a'_{1,1}(t) + a'_{2,2}(t) = tr(f'(t)) = (L \circ f')(t).$$

Propriété 18 (Composition avec une application bilinéaire)
Soient F_1, F_2, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés. Soit $f : I \to F_1$, $g : I \to F_2$ et soit $B : F_1 \times F_2 \to G$ une application bilinéaire.

(i) Si f et g sont dérivables en $t_0 \in I$, alors $B(f, g) : t \mapsto B(f(t), g(t))$ est dérivable en t_0 et :

$$(B(f, g))'(t_0) = B(f'(t_0), g(t_0)) + B(f(t_0), g'(t_0)).$$

(ii) Si f et g sont dérivables, alors $B(f, g) : t \mapsto B(f(t), g(t))$ est dérivable et :

$$(B(f, g))' = B(f', g) + B(f, g').$$

Exemple
Si F est un espace euclidien, alors si $f : I \to F$ et $g : I \to F$ sont dérivables, le produit scalaire $(f|g)$ est dérivable et

$$(f|g)' = (f'|g) + (f|g').$$

En particulier :

$$(\|f\|^2)' = 2(f'|f).$$

Propriété 19 (Composition avec une application multilinéaire)
Soient $F_1, \cdots, F_n, G$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés de dimension finie, soit $f_1 : I \to F_1, \cdots,$ $f_n : I \to F_n$ des fonctions vectorielles et soit $M : F_1 \times \cdots \times F_n \to G$ une application multilinéaire.

(i) *Si $f_1, \cdots, f_n$ sont dérivables en $t_0 \in I$, alors $M(f_1, \cdots, f_n) : t \mapsto M(f_1(t), \cdots, f_n(t))$ est dérivable en t_0 et*

$$(M(f_1, \cdots, f_n))'(t_0) = \sum_{i=1}^{n} M(f_1(t_0), \cdots, f_{i-1}(t_0), f_i'(t_0), f_{i+1}(t_0), \cdots, f_n(t_0)).$$

(ii) *Si $f_1, \cdots, f_n$ sont dérivables, alors $M(f_1, \cdots, f_n) : t \mapsto M(f_1(t), \cdots, f_n(t))$ est dérivable et*

$$(M(f_1, \cdots, f_n))' = \sum_{i=1}^{n} M(f_1, \cdots, f_{i-1}, f_i', f_{i+1}, \cdots, f_n).$$

Exemple
Si F est de dimension n et si $f_1 : I \to F, \cdots, f_n : I \to F$ sont dérivables, alors $\Phi : t \mapsto \det(f_1(t), \cdots, f_n(t))$ est dérivable et

$$\forall t \in I, \qquad \Phi'(t) = \sum_{i=1}^{n} \det(f_1(t), \cdots, f_{i-1}(t), f_i'(t), f_{i+1}(t), \cdots, f_n(t)).$$

Théorème 20 (Dérivée d'une fonction composée)
Soit $f : I \to F$, et soit $\varphi : J \to I$, où J est un intervalle de $\mathbb{R}$.

(i) *Si φ est dérivable en $x_0 \in J$ et si f est dérivable en $\varphi(x_0)$, alors $f \circ \varphi$ est dérivable en x_0 et :*

$$(f \circ \varphi)'(x_0) = \varphi'(x_0) f'(\varphi(x_0)).$$

(ii) *Si φ et f sont dérivables, alors $f \circ \varphi$ est dérivable et :*

$$(f \circ \varphi)' = \varphi' \times (f' \circ \varphi).$$

ATTENTION !
Dans le produit $\varphi' \times (f' \circ \varphi)$, la fonction φ' est à valeurs réelles ou complexes, alors que $f' \circ \varphi$ est à valeurs vectorielles.

3) Dérivées successives

Définition 21 (Fonction de classe $\mathcal{C}^n$)
Soit $f : I \to F$. On définit le fait que f soit **de classe $\mathcal{C}^n$** *récursivement :*

(i) *On dit que f est de classe $\mathcal{C}^0$ lorsqu'elle est continue.*

(ii) *Pour tout entier $n \geq 1$, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^n$ lorsque f est dérivable et que f' est de classe $\mathcal{C}^{n-1}$.*

On dira également que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ lorsqu'elle est de classe $\mathcal{C}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Notation
On notera $\mathcal{C}^n(I, F)$ l'ensemble des fonctions $I \to F$ de classe $\mathcal{C}^n$, pour tout $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.
Pour $f \in \mathcal{C}^n(I, F)$, on notera (comme pour les fonctions à valeurs scalaires) :

$$f^{(0)} = f, \qquad f^{(1)} = f', \qquad \forall k \in [\![1, n]\!],\ f^{(k)} = (f^{(k-1)})'.$$

Propriété 22 (Classe $\mathcal{C}^n$ et coordonnées)
Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_p)$ une base de F et soit $f : I \to F$.
Notons $(f_1, \cdots, f_p)$ les fonctions coordonnées de f dans $\mathcal{B}$.
Alors, f est de classe $\mathcal{C}^n$ si et seulement si toutes les f_i sont de classe $\mathcal{C}^n$, et on a

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \qquad f^{(k)} = \sum_{i=1}^{p} f_i^{(k)} e_i.$$

Propriété 23 (Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^n$)
Avec les notations du paragraphe précédent :

(i) *Si $(f, g) \in \mathcal{C}^n(I, F)^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\lambda f + g \in \mathcal{C}^n(I, F)$ et $(\lambda f + g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + g^{(n)}$. En particulier, $\mathcal{C}^n(I, F)$ et $\mathcal{C}^\infty(I, F)$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(I, F)$.*

(ii) *Si $f \in \mathcal{C}^n(I, F)$ et $L : F \to G$ est linéaire, alors $L \circ f \in \mathcal{C}^n(I, G)$ et $(L \circ f)^{(n)} = L \circ f^{(n)}$.*

(iii) *Si $f \in \mathcal{C}^n(I, F_1), g \in \mathcal{C}^n(I, F_2)$ et si $B : F_1 \times F_2 \to G$ est bilinéaire, alors $B(f, g) \in \mathcal{C}^n(I, G)$ et*

$$(B(f, g))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B(f^{(k)}, g^{(n-k)}) \qquad \textit{(formule de Leibniz)}.$$

(iv) *Si $f \in \mathcal{C}^n(I, F)$ et $\varphi \in \mathcal{C}^n(J, I)$, alors $f \circ \varphi \in \mathcal{C}^n(J, F)$.*

Remarque
Il n'y a pas de formule simple pour exprimer $(f \circ \varphi)^{(n)}$.

III Intégration des fonctions vectorielles sur un segment

On va maintenant définir la notion d'intégrale sur un segment $I = [a, b]$ (avec $a < b$) pour une fonction à valeurs vectorielles.

1) Définitions

Définition 24 (Fonction vectorielle continue par morceaux)
Une fonction vectorielle $f : [a, b] \to F$ *est dite* **continue par morceaux** *s'il existe une subdivision* $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ *de* $[a, b]$ *telle que pour tout* $k \in \{0, \cdots, n-1\}$*, la restriction* $f_{|]t_k, t_{k+1}[}$ *possède un prolongement continu sur* $[t_k, t_{k+1}]$.

Notation
On notera $\mathcal{C}^0_{pm}([a, b], F)$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux $[a, b] \to F$.

Propriété 25 (Structure algébrique des fonctions continues par morceaux)
$\mathcal{C}^0_{pm}([a, b], F)$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathcal{F}([a, b], F)$.

Propriété 26 (Continuité par morceaux et coordonnées)
Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_p)$ *une base de* F *et soit* $f : [a, b] \to F$.
Notons $(f_1, \cdots, f_p)$ *les fonctions coordonnées de* f *dans* $\mathcal{B}$.
Alors, f *est continue par morceaux si et seulement si toutes les* f_i *sont continues par morceaux.*

Théorème 27 (Définition de l'intégrale sur un segment d'une fonction vectorielle)
Soit $f \in \mathcal{C}^0_{pm}([a, b], F)$*. Soit* $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_p)$ *une base de* F*, et* $(f_1, \cdots, f_p)$ *les fonctions coordonnées de* f *dans* $\mathcal{B}$*. Alors le vecteur* $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \left(\int_a^b f_i(t)dt \right) e_i \in F$ *ne dépend pas du choix de la base* $\mathcal{B}$.
On l'appelle **intégrale de f sur $[a, b]$**.

Notation
Comme pour les fonctions à valeurs scalaires, on pourra noter l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$, ou $\displaystyle\int_{[a,b]} f$, ou encore $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$. On a donc, pour **toute** base $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_p)$ de F :

$$\int_a^b f = \sum_{i=1}^{p} \left(\int_a^b f_i \right) e_i.$$

Remarque
Cette définition de l'intégrale "par coordonnées" avait déjà été utilisée pour définir l'intégrale d'une fonction à valeurs complexes, via la base $(1, i)$ *du* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel* $F = \mathbb{C}$ *:*

$$\forall f \in \mathcal{C}^0_{pm}([a, b], \mathbb{C}), \qquad \int_a^b f = \left(\int_a^b Re(f) \right) + i \left(\int_a^b Im(f) \right).$$

2) Propriétés de l'intégrale

Propriété 28 (Linéarité et relation de Chasles)

(i) *L'intégrale* $f \mapsto \displaystyle\int_a^b f$ *est une application linéaire* $\mathcal{C}^0_{pm}([a, b], F) \to F$.

(ii) *Pour tout* $c \in]a, b[$ *et* $f \in \mathcal{C}^0_{pm}([a, b], F)$*, les restrictions de* f *aux segments* $[a, c]$ *et* $[c, b]$ *sont bien continues par morceaux, et on a*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Propriété 29 (Intégrale d'une composition linéaire)
Soit $f \in \mathcal{C}^0_{pm}([a,b],F)$ *et soit* $L : F \to G$ *linéaire. Alors* $L(f) \in \mathcal{C}^0_{pm}([a,b],G)$ *et* $\int_a^b L(f) = L\left(\int_a^b f\right)$.

Définition 30 (Sommes de Riemann)
Soit $f : [a,b] \to F$ *et* $\sigma = (a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b)$ *une subdivision de* $[a,b]$*. Etant donnés des réels* $(\alpha_0, \cdots, \alpha_{n-1}) \in [t_0,t_1] \times \cdots \times [t_{n-1},t_n]$*, on appelle* **somme de Riemann associée à $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{\sigma}$ et $\boldsymbol{\alpha}$** *le vecteur :*

$$R(f,\sigma,\alpha) = \sum_{k=0}^{n-1} (t_{k+1} - t_k) f(\alpha_k) \in F.$$

Exemple (Méthode des rectangles à gauche)
Si on considère une subdivision régulière de $[a,b]$:

$$\sigma = (t_0, \cdots, t_n), \qquad \forall k \in [\![0,n]\!], \quad t_k = a + k\frac{b-a}{n},$$

et les points $\alpha_k = t_k$, alors la somme de Riemann correspondante sera notée :

$$R_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right).$$

Théorème 31 (Convergence des sommes de Riemann)
Soit $f \in \mathcal{C}^0_{pm}([a,b],F)$*. Alors pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe* $\delta > 0$ *tel que pour toute subdivision* σ *de pas inférieur à* δ *et pour tous points* $(\alpha_k)_{0 \le k \le n-1} \in [t_0,t_1] \times \cdots \times [t_{n-1},t_n]$ *:*

$$\left\| \int_a^b f - R(f,\sigma,\alpha) \right\| \le \varepsilon.$$

En particulier, on a $R_n(f) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f$.

Propriété 32 (Inégalité triangulaire intégrale)
Soit $f \in \mathcal{C}^0_{pm}([a,b],F)$*. Alors* $\|f\| \in \mathcal{C}^0_{pm}([a,b],\mathbb{R})$ *et*

$$\left\| \int_a^b f \right\| \le \int_a^b \|f\|.$$

Corollaire 33 (Inégalité de la moyenne)
Soit $f \in \mathcal{C}^0_{pm}([a,b],F)$*. Alors,* $\|f\| \in \mathcal{C}^0_{pm}([a,b],\mathbb{R})$ *et*

$$\left\| \int_a^b f \right\| \le (b-a) \sup_{t \in [a,b]} \|f(t)\|.$$

3) Théorème fondamental de l'analyse

Notation (Notation polarisée de l'intégrale)
Pour $f \in \mathcal{C}^0_{pm}([a,b],F)$ on pose

$$\int_b^a f = -\int_a^b f \text{ si } a < b, \quad \text{ et } \quad \int_b^a f = 0 \text{ si } a = b.$$

Cette notation permet d'étendre la relation de Chasles à tout triplet de points (a,b,c), quelque soient leur positions relatives. Par exemple, on aura

$$\int_1^0 f = \int_1^2 f + \int_2^0 f.$$

Théorème 34 (Théorème fondamental de l'analyse)
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ (non nécessairement un segment), soit $g : I \to F$ et $a \in I$.
Si g est continue, alors la fonction $G : x \mapsto \displaystyle\int_a^x g(t)dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, et $G' = g$.

Remarque
$G : x \mapsto \displaystyle\int_a^x g(t)dt$ est donc l'unique primitive de g qui s'annule en $x = a$.
Ainsi, toute fonction vectorielle continue sur un intervalle I possède des primitives sur I, et elles sont toutes égales à une constante près (puisque $G' = H' \implies (G - H)' = 0 \implies G - H$ constante).

Corollaire 35 (Formule fondamentale du calcul intégral)
Soit $g : I \to F$ une fonction continue et soit $G : I \to F$ une primitive **quelconque** *de g. Alors :*

$$\forall (a, b) \in I^2, \qquad \int_a^b g(t)dt = G(b) - G(a).$$

Notation
On notera classiquement $[G]_a^b = G(b) - G(a)$.

4) Inégalité des accroissements finis

ATTENTION !
Pour une fonction vectorielle $f : I \to F$, le théorème de Rolle et l'égalité des accroissements finis ne sont plus vrais !

Exemple
La fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & e^{it} \end{array} \right.$ est dérivable, vérifie $f(0) = f(2\pi) = 1$, mais la dérivée $f' : t \mapsto ie^{it}$ ne s'annule jamais.

En revanche, le résultat suivant reste vrai pour les fonctions vectorielles :

Théorème 36 (Inégalité des accroissements finis)
Soit $f \in \mathcal{C}^1(I, F)$. Alors :

$$\forall (a, b) \in I^2, \qquad \|f(b) - f(a)\| \leq |b - a| \sup_{t \in [a,b]} \|f'(t)\|.$$

Remarque
L'inégalité des accroissements finis pour les fonctions vectorielles reste vraie si f est seulement dérivable (résultat hors programme), mais la démonstration est bien plus compliquée.

IV Formules de Taylor pour les fonctions vectorielles

Théorème 37 (Formule de Taylor avec reste intégral)
Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, F)$. Pour tout $(a, b) \in I^2$, on a :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + R_n,$$

où $R_n = \displaystyle\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$.

Corollaire 38 (Inégalité de Taylor-Lagrange)
Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, F)$. Pour tout $(a, b) \in I^2$, on a :

$$\left\| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right\| = \|R_n\| \leq \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{t \in [a,b]} \|f^{(n+1)}(t)\|.$$

Théorème 39 (Formule de Taylor-Young)
Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $f \in \mathcal{C}^{n}(I, F)$. Pour tout $a \in I$:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(t-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \underset{t \to a}{o}((t-a)^n).$$

Remarque
Cela s'écrit aussi : pour tout $a \in I$,

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(a) + \underset{h \to 0}{o}(h^n).$$

<u>ATTENTION !</u>
La formule de Taylor avec reste intégral et l'inégalité de Taylor-Lagrange sont des formules **globales**, c'est-à-dire qu'elles donnent des informations sur les valeurs de f dans tout l'intervalle I.
En revanche, la formule de Taylor-Young est une formule **locale**, c'est-à-dire qu'elle ne donne des informations sur f qu'au voisinage d'un point $a \in I$.

V Suites et séries de fonctions vectorielles

Nous allons maintenant généraliser les résultats des chapitres 7 et 9 (suites et séries de fonctions) à des fonctions $f : A \subset E \to F$, où E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.

1) Généralités

Définition 40 (Types de convergence des suites de fonctions)
Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(A,F)^{\mathbb{N}}$, et soit $f \in \mathcal{F}(A,F)$.

- (i) *On dit que la suite (f_n)* **converge simplement** *vers f et on note $f_n \underset{CS}{\to} f$ lorsque pour tout $t \in A$, la suite $(f_n(t))$ converge vers $f(t)$ dans F.*
- (ii) *On dit que la suite (f_n)* **converge uniformément** *vers f et on note $f_n \underset{CU}{\to} f$ lorsque les fonctions $f_n - f$ sont bornées à partir d'un certain rang et $\|f_n - f\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, où l'on note $\|f_n - f\|_\infty = \sup_{t\in A} \|f_n(t) - f(t)\|_F$.*

Remarque
Ces deux notions ne dépendent pas du choix de la norme sur F (puisqu'elles sont toutes équivalentes).

Définition 41 (Types de convergence des séries de fonctions)
Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(A,F)^{\mathbb{N}}$.

- (i) *On dit que la série de fonctions $\sum_{k\geq 0} f_k$* **converge simplement** *vers $S : A \to F$ lorsque la suite des sommes partielles $S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$ converge simplement vers S.*
- (ii) *On dit que la série de fonctions $\sum_{k\geq 0} f_k$* **converge uniformément** *vers $S : A \to F$ lorsque la suite des sommes partielles $S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$ converge uniformément vers S.*
- (iii) *On dit que la série de fonctions $\sum_{k\geq 0} f_k$* **converge normalement** *lorsque les f_k sont bornées sur A et la série $\sum_{k\geq 0} \|f_k\|_\infty$ converge.*

Propriété 42 (Lien entre CVU et reste)
Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(A,F)^{\mathbb{N}}$. La série $\sum_{k\geq 0} f_k$ converge normalement si et seulement si elle converge simplement et la suite des restes $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k$ converge uniformément vers 0.

Propriété 43 (La convergence normale entraîne la convergence uniforme)
Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(A,F)^{\mathbb{N}}$. Si la série $\sum_{k\geq 0} f_k$ converge normalement, alors elle converge uniformément.

2) Continuité et double limite

Théorème 44 (Continuité de la limite d'une suite de fonctions)
Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(A,F)^{\mathbb{N}}$ et $f \in \mathcal{F}(A,F)$.

- (i) *Soit $t_0 \in A$. Si les f_n sont continues en t_0 et si (f_n) converge uniformément vers f sur un voisinage de t_0 relatif à A, alors f est continue en t_0.*
- (ii) *Si les f_n sont continues sur A et si pour tout $t_0 \in A$, (f_n) converge uniformément vers f sur un voisinage de t_0 relatif à A, alors f est continue sur A.*

Théorème 45 (Continuité de la somme d'une série de fonctions)
Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(A, F)^{\mathbb{N}}$.

(i) *Soit* $t_0 \in A$. *Si les* f_n *sont continues en* t_0 *et si la série* $\sum f_n$ *converge uniformément sur un voisinage de* t_0 *relatif à* A, *alors la fonction somme* $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ *est continue en* t_0.

(ii) *Si les* f_n *sont continues sur* A *et si pour tout* $t_0 \in A$, *la série* $\sum f_n$ *converge uniformément sur un voisinage de* t_0 *relatif à* A, *alors la fonction somme* $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ *est continue sur* A.

Théorème 46 (Théorème de la double limite pour les suites de fonctions)
Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(A, F)^{\mathbb{N}}$, *soit* $f \in \mathcal{F}(A, F)$ *et* $t_0 \in \overline{A}$. *On suppose que :*

(i) *La suite* (f_n) *converge uniformément vers* f *sur un voisinage de* t_0 *relatif à* A.

(ii) *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $f_n(t) \underset{t \to t_0}{\longrightarrow} \ell_n \in F$.

Alors, la suite (ℓ_n) *converge vers* $\ell \in F$ *et* $f(t) \underset{t \to t_0}{\longrightarrow} \ell$, *c'est-à-dire*

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\lim_{t \to t_0} f_n(t) \right) = \lim_{t \to t_0} \left(\lim_{n \to +\infty} f_n(t) \right).$$

Théorème 47 (Théorème de la double limite pour les séries de fonctions)
Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(A, F)^{\mathbb{N}}$ *et* $t_0 \in \overline{A}$. *On suppose que :*

(i) *La série* $\sum f_n$ *converge uniformément sur un voisinage de* t_0 *relatif à* A.

(ii) *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $f_n(t) \underset{t \to t_0}{\longrightarrow} \ell_n \in F$.

Alors, la série $\sum \ell_n$ *converge vers* $\ell \in F$ *et la fonction somme* $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ *vérifie* $S(t) \underset{t \to t_0}{\longrightarrow} \ell$, *c'est-à-dire*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\lim_{t \to t_0} f_n(t) \right) = \lim_{t \to t_0} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right).$$

3) Intégration et dérivation

Propriété 48 (Convergence uniforme des primitives)
Soit I *un intervalle de* $\mathbb{R}$, *soit* $(g_n) \in \mathcal{C}^0(I, F)^{\mathbb{N}}$.
Si (g_n) *converge uniformément vers* $g : I \to F$ *sur tout segment de* I, *alors pour tout* $a \in I$, *la suite de fonctions* (G_n) *définie par*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in I,\ G_n(x) = \int_a^x g_n(t)dt$$

converge uniformément sur tout segment de I *vers la fonction* $G : I \to F$ *définie par*

$$G(x) = \int_a^x g(t)dt.$$

Théorème 49 (Interversion limite/intégrale sur un segment)
Soit (f_n) *une suite de fonctions continues* $[a, b] \to F$ *qui converge uniformément vers* $f : [a, b] \to F$. *Alors*

$$\int_a^b f_n(t)dt \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(t)dt.$$

Propriété 50 (Convergence uniforme d'une série de primitives)
Soit $(g_n) \in \mathcal{F}(I,F)^{\mathbb{N}}$, *où* I *est un intervalle de* $\mathbb{R}$. *On suppose que :*

(i) *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, g_n *est continue sur* I.

(ii) *La série de fonctions* $\sum g_n$ *converge uniformément sur tout segment de* I *vers* $S : I \to F$.

Pour tout $a \in I$, *on note* $G_n : x \mapsto \displaystyle\int_a^x g_n(t)dt$. *Alors, la série de fonctions* $\sum G_n$ *converge uniformément vers* $G : x \mapsto \displaystyle\int_a^x S(t)dt$ *sur tout segment de* I.

Théorème 51 (Théorème d'intégration terme à terme sur un segment)
Soit (f_n) *une suite de fonctions continues* $[a,b] \to F$. *Si la série* $\sum f_n$ *converge uniformément sur* $[a,b]$, *alors*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_a^b f_n(t)dt \right) = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right) dt.$$

Théorème 52 (Théorème de dérivation d'une limite de fonctions)
Soit I *un intervalle de* $\mathbb{R}$, *soit* $(f_n) \in \mathcal{F}(I,F)^{\mathbb{N}}$. *On suppose que :*

(i) *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, f_n *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* I.

(ii) *La suite* (f_n) *converge simplement vers une fonction* $f : I \to F$.

(iii) *La suite des dérivées* (f_n') *converge uniformément sur tout segment de* I *vers une fonction* $g : I \to F$;

Alors, la suite (f_n) *converge uniformément vers* f *sur tout segment de* I, f *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* I, *et* $f' = g$. *Autrement dit, on a*

$$\lim_{n\to+\infty} f_n' = f' = \left(\lim_{n\to+\infty} f_n \right)'.$$

Théorème 53 (Théorème de dérivation terme à terme d'une série de fonctions)
Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(I,F)^{\mathbb{N}}$, *où* I *est un intervalle de* $\mathbb{R}$. *On suppose que :*

(i) *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $f_n \in \mathcal{C}^1(I,F)$.

(ii) *La série de fonctions* $\sum f_n$ *converge simplement vers* $S : I \to F$ *sur* I.

(iii) *La série des dérivées* $\sum f_n'$ *converge uniformément sur tout segment de* I *vers* $T : I \to F$.

Alors la série $\sum f_n$ *converge uniformément sur tout segment de* I, *la fonction* S *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* I, *et* $S' = T$. *Autrement dit, on a*

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'.$$