CH14 : Séries entières

I Généralités

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On rappelle que l'ensemble des suites (a_n) indexées par $\mathbb{N}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$ se note $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

1) Définition d'une série entière

Définition 1 (Série entière de la variable complexe)
Soit $(a_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Pour $z \in \mathbb{C}$, la série numérique $\sum a_n z^n$ est appelée **série entière de la variable z**.

Définition 2 (Domaine de cv., fonction somme d'une série entière)
Etant donnée une série entière $\sum a_n z^n$:

(*i*) *L'ensemble $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C}$ tels que la série $\sum a_n z^n$ converge $\}$ est appelé le* **domaine de convergence de la série entière**.

(*ii*) *La* **fonction somme** *est la fonction $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.*

2) Etude d'exemples

3) Rayon de convergence

On étudie maintenant le cas général. On va mettre en évidence une propriété géométrique importante des séries entières : l'existence d'un "rayon de convergence" et d'un "disque ouvert de convergence".

Lemme 3 (Lemme d'Abel)
Soit $r > 0$ tel que la suite complexe $\boldsymbol{(a_n r^n)}$ **est bornée**. *Alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$:*
$$|z| < r \implies \sum a_n z^n \text{ converge absolument.}$$

Lemme 4 (Intervalle de bornage)
L'ensemble $I = \{r \in \mathbb{R}^+,\ (a_n r^n)$ est bornée$\}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ ayant pour plus petit élément 0.

Ces deux lemmes nous permettent alors de définir le "rayon de convergence" :

Définition 5 (Rayon de convergence d'une série entière)
On considère une série entière $\sum a_n z^n$. On pose :
$$R = \sup(I) = \sup\{r \in \mathbb{R}_+,\ \text{la suite } (a_n r^n) \text{ est bornée}\}$$
(avec la convention $R = +\infty$ si l'intervalle de bornage I n'est pas majoré).
Cet élément $R \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ est appelé **le rayon de convergence** *de $\sum a_n z^n$.*

Théorème 6 (Propriétés fondamentales du rayon de convergence)
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.

(*i*) *Alors pour tout $z \in \mathbb{C}$:*
$$\begin{cases} |z| < R \implies \sum a_n z^n \text{ converge absolument} \\ |z| > R \implies \sum a_n z^n \text{ diverge grossièrement} \end{cases}.$$
De plus, R est le seul élément de $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ vérifiant cette propriété.

(*ii*) *Enfin, la série entière $\sum a_n z^n$ converge normalement sur tout disque fermé $\overline{\mathcal{D}(O,r)}$ avec $0 \leq r < R$.*

Définition 7 (Disque ouvert de convergence, cercle d'incertitude)
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $\boldsymbol{R} \in]\mathbf{0}, +\boldsymbol{\infty}[$ (non nul et fini). On appelle :

- **disque ouvert de convergence** *le disque ouvert de centre O et de rayon R, c'est-à-dire l'ensemble $\mathcal{D}(O,R) := \{z \in \mathbb{C},\ |z| < R\}$.*
- **cercle d'incertitude** *le cercle de centre O et de rayon R, c'est-à-dire l'ensemble $\mathcal{C}(O,R) := \{z \in \mathbb{C},\ |z| = R\}$.*

4) Détermination pratique du rayon de convergence

On donne ici plusieurs techniques pour déterminer le rayon de convergence R d'une série entière.

a) Tests de valeurs

Méthode (Détermination de R par des tests de valeurs)
Cette méthode est basée sur l'utilisation de la propriété fondamentale du rayon (prop. 6) : pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$, on a :

$$\begin{cases} |z_0| < R \implies \sum |a_n||z_0|^n \text{ converge } \implies \sum a_n z_0^n \text{ converge} \\ |z_0| > R \implies \sum a_n z_0^n \text{ diverge grossièrement } \implies \sum a_n z_0^n \text{ diverge} \end{cases},$$

donc on en déduit facilement :

- $\sum a_n z_0^n$ *diverge* $\implies R \leq |z_0|$;
- $\sum |a_n||z_0|^n$ *diverge* $\implies R \leq |z_0|$;
- $\sum a_n z_0^n$ *converge* $\implies R \geq |z_0|$;
- $\sum |a_n||z_0|^n$ *converge* $\implies R \geq |z_0|$;
- $\sum a_n z_0^n$ *diverge non grossièrement* $\implies R = |z_0|$;
- $\sum a_n z_0^n$ *est semi-convergente* $\implies R = |z_0|$.

b) Par comparaison

Propriété 8 (Comparaison des rayons de convergence)
Soient deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$, de rayons de convergence respectifs $R_a, R_b \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$. Si $|a_n| \leq |b_n|$ à partir d'un certain rang, ou si $a_n = O(b_n)$, ou encore si $a_n = o(b_n)$, alors $R_a \geq R_b$.

c) Par équivalence

Propriété 9 (Séries entières à coefficients de module équivalents)
Soient deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$, de rayons de convergence respectifs $R_a, R_b \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$. Si $|a_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} |b_n|$, alors $R_a = R_b$.

d) Utilisation du critère de d'Alembert

Méthode (Détermination de R avec le critère de d'Alembert)
Pour déterminer le rayon de convergence R d'une série entière $\sum a_n z^n$ à l'aide du critère de d'Alembert, on n'applique pas le critère de d'Alembert à la suite $a_n z^n$ (elle n'est pas strictement positive !), mais plutôt à la suite $u_n = |a_n z^n|$ (si $a_n \neq 0$).
Une rédaction très détaillée est attendue aux concours.

- *On fixe $z \in \mathbb{C}^*$ et on pose $u_n =$ le module du terme général de la série.*
  On vérifie que $u_n > 0$ à partir d'un certain rang.
- *On calcule $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ (si elle existe). Plusieurs cas possibles :*
  - *si $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0$, alors pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série $\sum |a_n z^n|$ est convergente et donc $R = +\infty$;*
  - *si $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = +\infty$, alors pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, la série $\sum |a_n z^n|$ est divergente et donc $R = 0$;*
  - *si $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$ dépend de $|z|$, alors, en cherchant les valeurs de z pour lesquelles $\ell < 1$, on trouve des conditions sur z pour savoir si la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente ou grossièrement divergente et on en déduit donc le rayon de convergence (toujours d'après la propriété fondamentale du rayon de convergence).*

Si aucune de ces méthodes ne fonctionne, on peut toujours revenir à la définition du rayon de convergence : on cherche les $r \geq 0$ tels que la suite $(a_n r^n)$ est bornée, on obtient un intervalle I, et on a $R = \sup(I)$.

5) Opérations algébriques sur les séries entières

Propriété 10 (Somme de deux séries entières)
Soient deux séries entières $\sum a_n z^n$ *et* $\sum b_n z^n$*, de rayons de convergence respectifs* $R_a, R_b \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$*. Alors :*

(i) *La série entière* $\sum (a_n + b_n) z^n$ *a un rayon de convergence* $R \geq \min(R_a, R_b)$*, et pour tout* $z \in \mathbb{C}$ *tel que* $|z| < \min(R_a, R_b)$*, on a*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n;$$

(ii) *Si* $R_a \neq R_b$*, alors* $R = \min(R_a, R_b)$*.*

Propriété 11 (Multiplication par n^α)
Pour toute suite $(a_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ *et pour tout* $\alpha \in \mathbb{R}$*, les séries entières* $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ *et* $\displaystyle\sum_{n\geq 0} n^\alpha a_n z^n$ *ont* **le même rayon de convergence***.*

Définition 12 (Produit de Cauchy de deux séries entières)
On appelle **produit de Cauchy** *des séries entières* $\sum a_n z^n$ *et* $\sum b_n z^n$ *la série entière* $\sum c_n z^n$*, avec*

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Propriété 13 (Convergence du produit de Cauchy)
Si R_a *et* R_b *sont les rayons de convergence respectifs des séries entières* $\sum a_n z^n$ *et* $\sum b_n z^n$*, alors le rayon de convergence de la série entière produit* $\sum c_n z^n$ *vérifie*

$$R \geq \min(R_a, R_b).$$

De plus, pour tout $z \in \mathbb{C}$ *tel que* $|z| < \min(R_a, R_b)$*, on a*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right).$$

II Propriétés de la somme d'une série entière

1) Continuité

Théorème 14 (Continuité de la somme d'une série entière)
Soit $\sum a_n z^n$ *une série entière de rayon de convergence* $R \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$*. Alors la fonction somme* $f : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ *est continue sur le disque ouvert de convergence* $\mathcal{D}(O, R)$*.*

2) Restriction à l'axe réel

A partir de maintenant, on va se limiter à des séries entières **de la variable réelle**.

Définition 15 (Intervalle ouvert de convergence)
Soit $\sum a_n z^n$ *une série entière de rayon de convergence* $R \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$*.*
L'intervalle $]-R, R[$ *est appelé* **intervalle ouvert de convergence***.*

Définition 16 (Domaine réel de convergence)
Soit une série entière $\sum a_n z^n$*. On appelle* **domaine réel de convergence** *de cette série entière l'ensemble des* $x \in \mathbb{R}$ *tels que* $\sum a_n x^n$ *converge. Ce domaine est un intervalle* I *vérifiant*

$$]-R, R[\subset I \subset [-R, R],$$

où R *est le rayon de convergence.*

Théorème 17 (Continuité sur l'intervalle ouvert de convergence)
Soit $\sum a_n z^n$ *une série entière de rayon de convergence* $R > 0$*.*
Alors, la fonction $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *est continue sur* $]-R; R[$*.*

Lorsqu'on ne dispose pas de la convergence uniforme au voisinage de R (ou de $-R$), on dispose tout de même du théorème suivant :

Théorème 18 (Théorème d'Abel radial)
Soit $\sum a_n z^n$ *une série entière de rayon de convergence* $R > 0$*.*
Si $\sum a_n R^n$ *converge, alors* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \underset{x \to R^-}{\longrightarrow} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n$*.*
En d'autres termes, la fonction somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *est continue en* R*.*

Corollaire 19 (Continuité sur le domaine réel de convergence)
Avec les notations précédentes, la fonction somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *est donc continue sur tout son domaine réel de convergence.*

3) Intégration terme à terme

Définition 20 (Série entière primitive)
On appelle **série entière primitive** *de* $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ *la série entière* $\sum_{n \geq 0} a_n \frac{z^{n+1}}{n+1}$*.*

Propriété 21 (Rayon de convergence de la série entière primitive)
Les séries entières $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ *et* $\sum_{n \geq 0} a_n \frac{z^{n+1}}{n+1}$ *ont le même rayon de convergence.*

Théorème 22 (Intégration terme à terme d'une série entière)
Soit $\sum a_n z^n$ *une série entière, de rayon de convergence* $R \neq 0$. *Alors :*

$$\forall x \in]-R;R[, \quad \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

En d'autres termes, $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ *est la primitive nulle en* 0 *de* $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *sur* $]-R,R[$.

4) Dérivation terme à terme

Définition 23 (Série entière dérivée)
On appelle **série entière dérivée de** $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ *la série entière* $\sum_{n\geq 1} n a_n z^{n-1}$.

Propriété 24 (Rayon de convergence d'une série dérivée)
Les séries entières $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ *et* $\sum_{n\geq 1} n a_n z^{n-1}$ *ont le même rayon de convergence.*

Théorème 25 (Dérivation terme à terme d'une série entière)
Soit $\sum a_n z^n$ *une série entière, de rayon de convergence* $R \neq 0$.
Alors, la fonction somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $]-R,R[$ *et*

$$\forall x \in \ ]-R,R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n.$$

Corollaire 26 (Dérivation itérée terme à terme)
Soit $\sum a_n z^n$ *une série entière, de rayon de convergence* $R \neq 0$. *Alors*

(i) la fonction somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $]-R;R[$ *;*

(ii) pour tout $x \in]-R;R[$ *et pour tout* $k \in \mathbb{N}$, *on a*

$$S^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d^k}{dx^k}(a_n x^n) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k}.$$

5) Expression des coefficients

Théorème 27 (Expression des coefficients d'une série entière)
Soit $\sum a_n z^n$ *une série entière, de rayon de convergence* $R \neq 0$.
On note $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \in \mathcal{C}^\infty(]-R;R[, \mathbb{K})$ *la fonction somme.*
Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, *on a* $a_n = \dfrac{S^{(n)}(0)}{n!}$.

Corollaire 28 (Unicité des coefficients d'une série entière)
S'il existe $\alpha > 0$ *tel que* $\forall x \in]0,\alpha]$, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$, *alors* $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = b_n$.

III Fonctions développables en série entière

Dans cette section, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ qui est voisinage de 0.

1) Généralités

Définition 29 (Fonction développable en série entière sur un intervalle)
Une fonction f de la variable réelle est dite **développable en série entière sur $]-r,r[$** *s'il existe une suite $(a_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telle que*

$$\forall x \in]-r,r[, \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

(avec convergence de la série).
De même, on dit qu'une fonction f de la variable complexe est **développable en série entière sur le disque ouvert $\mathcal{D}(0,r)$** *s'il existe une suite $(a_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telle que*

$$\forall z \in \mathcal{D}(0,r), \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

(avec convergence de la série).

Définition 30 (Fonction développable en série entière en 0)
On dit que $f : I \to \mathbb{K}$ est **développable en série entière en 0** *s'il existe $r > 0$ tel que f est développable en série entière sur $]-r,r[$.*

Notation
On abrège souvent « développable en série entière »(et aussi « développement en série entière ») par « DSE ».

Théorème 31 (Propriétés d'une fonction développable en série entière)
Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction DSE sur $]-r,r[$. Alors :

(i) f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-r,r[$;

(ii) Le développement en série entière de f est unique : il s'agit de

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n, \qquad \forall x \in]-r,r[.$$

Définition 32 (Série de Taylor en 0)
Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$. On appelle **série de Taylor** *de f en 0 la série entière $\displaystyle\sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.*

Propriété 33 (Cas d'une fonction paire ou impaire)
Soit f une fonction DSE sur $]-r,r[$:

$$\forall x \in]-r,r[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

(i) Si f est paire, alors $\forall k \in \mathbb{N},\ a_{2k+1} = 0$, donc $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_{2k} x^{2k}$.

(ii) Si f est impaire, alors $\forall k \in \mathbb{N},\ a_{2k} = 0$, donc $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_{2k+1} x^{2k+1}$.

2) Développements en série entière usuels

On peut légitimement se demander si les fonctions « usuelles »(exp, cos, sin, ...) sont développables en série entière. En général, la réponse est « oui », mais le développement en série entière n'est pas nécessairement valable sur tout l'ensemble de définition de la fonction (par exemple, $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ est définie sur $\mathbb{R}$ mais son développement en série entière n'est valable que sur $]-1;1[$).

a) Famille de la série géométrique

Théorème 34 (DSE issus de la série géométrique)
Pour tout $x \in]-1;1[$, on a :

(i) $\displaystyle \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \cdots$

(ii) $\displaystyle \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \cdots$

(iii) $\displaystyle \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \cdots$
Et ceci reste valable en $x = 1$.

(iv) $\displaystyle -\ln(1-x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^6}{6} + \cdots$
Et ceci reste valable en $x = -1$.

(v) $\displaystyle \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10} + \cdots$

(vi) $\displaystyle \arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{11}}{11} + \cdots$
Et ceci reste valable en $x = 1$ et $x = -1$.

Toutes ces séries entières ont pour rayon de convergence $R = 1$.

Méthode
Cette démonstration illustre des méthodes classiques utilisées pour calculer le développement en série entière d'une fonction donnée :

- *Intégrer ou dériver terme à terme un développement en série entière usuel.*
- *Changer de variable dans un développement en série entière usuel.*

b) Famille de l'exponentielle

Théorème 35 (DSE issus de la fonction exponentielle)
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

(i) $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$

(ii) $\mathrm{ch}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \frac{x^{10}}{10!} + \cdots$

(iii) $\mathrm{sh}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \frac{x^{11}}{11!} + \cdots$

(iv) $e^{ix} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n x^n}{n!} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - i\frac{x^7}{7!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots$

(v) $\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \cdots$

(vi) $\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \cdots$

Toutes ces séries entières ont pour rayon de convergence $R = +\infty$.

Méthode
Cette démonstration illustre encore une des méthodes existantes pour montrer qu'une fonction f de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0 est développable en série entière. On peut procéder ainsi :

- *Calculer sa série de Taylor* $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ *(en calculant les dérivées $k^{\text{ième}}$ de f par récurrence).* *Rappelons que c'est le seul développement en série entière possible.*

- *Montrer que pour x fixé dans un certain intervalle,* $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = f(x)$.
  Pour cela, à x fixé, on majore l'écart $\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right|$ *par* $\varepsilon_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
  On peut, par exemple, utiliser la **formule de Taylor avec reste intégral**.

c) Développement en série entière de $(1+x)^\alpha$

Théorème 36 (DSE de $(1+x)^\alpha$)
Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Pour tout $x \in]-1;1[$, on a

$$\begin{aligned}(1+x)^\alpha &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n, \\ &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \cdots\end{aligned}$$

Le rayon de convergence de cette série entière est $R = 1$ si $\alpha \notin \mathbb{N}$ et $R = +\infty$ si $\alpha \in \mathbb{N}$ (dans ce cas, on a simplement la formule du binôme).

Méthode
Cette démonstration donne encore une nouvelle méthode pour montrer qu'une fonction donnée est développable en série entière : l'écrire comme solution d'une équation différentielle.

3) Exemples de calculs de DSE

4) Exemples de calculs de sommes à partir des DSE

À partir de la liste des développements en série entière usuels, **qu'il faut connaître par cœur**, on peut souvent calculer explicitement des sommes de séries entières.

Méthode
Pour calculer une somme de série entière, on peut :

- *transformer la somme à calculer à l'aide d'un changement d'indice ou une factorisation, et se ramener à un développement en série entière connu ;*
- *dériver ou intégrer terme à terme la somme à calculer, et reconnaître ainsi un développement en série entière usuel.*

IV Fonction exponentielle complexe

Dans le cours de MP2I, on a défini **dans cet ordre** :

— **la fonction logarithme népérien** comme la primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0,+\infty[$ qui s'annule en $x=1$ (*via* le théorème fondamental de l'analyse qui dit que toute fonction continue possède des primitives). On a alors facilement la propriété algébrique fondamentale du logarithme :

$$\forall (x,x') \in]0,+\infty[^2, \qquad \ln(xx') = \ln(x) + \ln(x').$$

— **la fonction exponentielle réelle** $\exp : \mathbb{R} \to]0,+\infty[$, comme la réciproque de la bijection $\ln :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$. Cela permet de montrer que $\exp' = \exp$, que $\exp(0)=1$ et que

$$\forall (x,x') \in \mathbb{R}^2, \qquad e^{x+x'} = e^x \times e^{x'}.$$

— **la fonction exponentielle imaginaire** $x \mapsto e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$, qui va de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Grâce aux formules de trigonométrie $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ et $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$, on montre que

$$\forall (x,x') \in \mathbb{R}^2, \qquad e^{i(x+x')} = e^{ix} \times e^{ix'}.$$

— **la fonction exponentielle complexe** $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ en **posant**, pour tout nombre complexe $z = x+iy$

$$e^z = e^x \times e^{iy} = e^x \times (\cos y + i \sin y).$$

Avec cette définition, la propriété algébrique fondamentale de l'exponentielle se prolonge directement à $\mathbb{C}$:

$$\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2, \qquad e^{z+z'} = e^z \times e^{z'}.$$

Enfin, il se trouve que le développement en série entière de la fonction exponentielle réelle se prolonge également à $\mathbb{C}$.

Théorème 37 (DSE de l'exponentielle complexe)
Pour tout $z \in \mathbb{C}$*, on a* $e^z = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$.