CH14 : Séries entières

Table des matières

I Généralités

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On rappelle que l'ensemble des suites (a_n) indexées par $\mathbb{N}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$ se note $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

1) Définition d'une série entière

Définition 1 (Série entière de la variable complexe)
Soit $(a_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Pour $z \in \mathbb{C}$, la série numérique $\sum a_n z^n$ est appelée **série entière de la variable z**.

Définition 2 (Domaine de cv., fonction somme d'une série entière)
Etant donnée une série entière $\sum a_n z^n$:

(i) *L'ensemble $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C}$ tels que la série $\sum a_n z^n$ converge $\}$ est appelé le* **domaine de convergence de la série entière**.

(ii) *La* **fonction somme** *est la fonction $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.*

Remarque • *Les sommes partielles d'une série entière sont des polynômes :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n \in \mathbb{C}_n[z].$$

Les séries entières sont donc des limites de suites de polynômes, mais ce ne sont pas des polynômes en général !

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k = \lim_{n \to +\infty} P_n(z).$$

- *Les fonctions polynômes de $\mathbb{C}[z]$ sont des séries entières particulières (celles vérifiant $a_n = 0$ à partir d'un certain rang).*
- *$z = 0$ est toujours dans le domaine de convergence car la série $\sum\limits_{n \geq 0} a_n 0^n$ converge (les sommes partielles sont constantes égales à a_0).*

ATTENTION !

On adopte la **convention** suivante : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n 0^n = a_0 \quad ("0^0 = 1").$

C'est la même convention que pour les polynômes : en effet, X^0 désigne le polynôme constant égal à 1 : la fonction associée $x \mapsto x^0$ vaut donc 1 pour tout réel x, même $x = 0$.

2) Etude d'exemples

Exemple (Une série géométrique)
Déterminer le domaine de convergence $\mathcal{D}$ de la série entière $\displaystyle\sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^n} z^n$ ainsi que sa fonction somme.

Il s'agit de la série entière $\sum a_n z^n$ avec $a_n = (1/2)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
C'est une série géométrique de raison $\frac{z}{2}$, donc elle converge si et seulement si $\left|\frac{z}{2}\right| < 1$, c'est-à-dire $|z| < 2$.
Le domaine de convergence est donc le disque **ouvert** de centre O et de rayon 2, noté $\mathcal{D}(O; 2)$.
De plus, la fonction somme vaut :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{z}{2}} = \frac{2}{2 - z}, \qquad \forall z \in \mathcal{D}(O; 2) := \{z \in \mathbb{C},\ |z| < 2\}.$$

Exemple (Une série "à la Riemann")

Déterminer le domaine de convergence $\mathcal{D}$ de la série entière $\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n^2}$.

Cette série converge si et seulement si $|z| \leq 1$. En effet :

- Si $|z| \leq 1$, alors $\left|\frac{z^n}{n^2}\right| = \frac{|z|^n}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$, donc la série $\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n^2}$ converge absolument (d'après le critère de comparaison pour les séries à termes positifs et parce que la série de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge).
- Si $|z| > 1$, alors la suite polynomiale (n^2) est négligeable devant la suite géométrique $(|z|^n)$ lorsque $n \to +\infty$, d'où $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{z^n}{n^2}\right| = +\infty$, ce qui montre que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n^2}$ diverge grossièrement (son terme général ne tend pas vers 0, puisque le module ne tend pas vers 0).

Le domaine de convergence est donc le disque **fermé** de centre O et de rayon 1, noté $\overline{\mathcal{D}}(O;1)$.
Mais on ne sait pas *a priori* expliciter la fonction somme :

$$f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n^2}, \qquad \forall z \in \overline{\mathcal{D}}(O;1) := \{z \in \mathbb{C},\ |z| \leq 1\}.$$

Exemple (Une série "lacunaire")
La série $\sum_{n\geq 0} \frac{z^{2n}}{n+1} = 1 + \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{3} + \frac{z^6}{4} + \frac{z^8}{5} + \cdots$ est une série entière, car

$$\sum_{n\geq 0} \frac{z^{2n}}{n+1} = \sum_{k\geq 0} a_k z^k, \text{ avec } a_{2n} = \frac{1}{n+1} \text{ et } a_{2n+1} = 0, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Puisqu'une infinité de coefficients a_k sont nuls, on parle de "série lacunaire" (il lui "manque" une infinité de coefficients).
Déterminons le domaine de convergence $\mathcal{D}$ de cette série entière.

- Si $|z| < 1$, alors la série $\sum_{n\geq 0} \frac{z^{2n}}{n+1}$ converge absolument, puisque

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \left|\frac{z^{2n}}{n+1}\right| \leq |z^2|^n,$$

  et la série géométrique $\sum |z^2|^n$ converge (puisque $0 \leq |z^2| < 1$).
- Si $|z| > 1$, alors la série $\sum_{n\geq 0} \frac{z^{2n}}{n+1}$ diverge grossièrement, puisque le terme général ne tend pas vers 0 lorsque $n \to +\infty$ (le module tend vers $+\infty$ par croissances comparées).
- Si $|z| = 1$, c'est le cas difficile : on a $z = e^{i\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$. La série $\sum_{n\geq 0} \frac{z^{2n}}{n+1} = \sum_{n\geq 0} \frac{e^{i2n\theta}}{n+1}$ n'est pas absolument convergente, il faut donc étudier sa semi-convergence.

  On utilise pour cela la **transformation d'Abel** (voir sujet CCP MP 2014, math 1, cette technique est hors programme mais indispensable ici), en réécrivant les sommes partielles :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{e^{i2k\theta}}{k+1} = \sum_{k=0}^{n} a_k b_k,$$

  où la suite $(a_k) = (\frac{1}{k+1})$ est décroissante de limite nulle, et la suite géométrique $(b_k) = ((e^{i2\theta})^k)$ a ses sommes partielles bornées lorsque $e^{i2\theta} \neq 1$, c'est-à-dire $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$, puisque dans ce cas :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |B_n| = \left|\sum_{k=0}^{n} b_k\right| = \left|\frac{1 - e^{i2(n+1)\theta}}{1 - e^{i2\theta}}\right| \leq \frac{2}{|1 - e^{i2\theta}|} := M_\theta.$$

  La transformation d'Abel consiste alors à réécrire les sommes partielles en exploitant la relation

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad b_k = B_k - B_{k-1},$$

(avec la convention $B_{-1} = 0$) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{k=0}^{n} a_k b_k = \sum_{k=0}^{n} a_k (B_k - B_{k-1}) = \sum_{k=0}^{n} a_k B_k - \sum_{k=-1}^{n-1} a_{k+1} B_k = \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n.$$

On a alors $|a_n B_n| \leq M_\theta a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et la série $\sum_{k\geq 0}(a_k - a_{k+1})B_k$ converge absolument puisque $|(a_k - a_{k+1})B_k| \leq M_\theta(a_k - a_{k+1})$ et puisque la série téléscopique $\sum M_\theta(a_k - a_{k+1})$ converge vers $M_\theta a_0$ (examiner ses sommes partielles). Par somme, on en déduit que les sommes partielles $\sum_{k=0}^{n} a_k b_k$ ont une limite finie lorsque $n \to +\infty$, donc la série étudiée converge.

La série $\sum_{n\geq 0} \frac{e^{i2n\theta}}{n+1}$ est donc semi-convergente si $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$, et divergente si $\theta \in \pi\mathbb{Z}$ (c'est alors la série harmonique puisque $e^{i2\theta} = 1$).

Finalement, lorsque $|z| = 1$, la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{z^{2n}}{n+1}$ converge si et seulement si $z \neq \{-1, 1\}$.

(cas particuliers intéressants : $z = \pm i$, dans ces deux cas, on a la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1}$, qui converge par le critère spécial des séries alternées).

On voit donc que sur cet exemple, le domaine de convergence $\mathcal{D}$ **n'est ni un disque ouvert, ni un disque fermé**, il vérifie :

$$\mathcal{D}(O;1) \subsetneq \mathcal{D} \subsetneq \overline{\mathcal{D}}(O;1),$$

puisque $\mathcal{D} = \overline{\mathcal{D}}(O;1) \setminus \{-1, 1\}$.

3) Rayon de convergence

On étudie maintenant le cas général. On va mettre en évidence une propriété géométrique importante des séries entières : l'existence d'un "rayon de convergence" et d'un "disque ouvert de convergence".

Lemme 3 (Lemme d'Abel)
Soit $r > 0$ tel que la suite complexe $\boldsymbol{(a_n r^n)}$ **est bornée**. *Alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$:*

$$|z| < r \implies \sum a_n z^n \text{ converge absolument.}$$

Preuve
Il suffit d'écrire

$$a_n z^n = (a_n r^n) \times \left(\frac{z}{r}\right)^n.$$

Par hypothèse, il existe une constante $M > 0$ telle que $|a_n r^n| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |a_n z^n| \leq M \left|\frac{z}{r}\right|^n,$$

et on conclut par le critère de comparaison des séries à termes positifs, puisque la série $\sum M \left|\frac{z}{r}\right|^n$ converge (étant donné que $\left|\frac{z}{r}\right| = \frac{|z|}{r} < 1$).

Lemme 4 (Intervalle de bornage)
L'ensemble $I = \{r \in \mathbb{R}^+,\ (a_n r^n) \text{ est bornée}\}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ ayant pour plus petit élément 0.

Preuve
- Déjà, 0 est un minorant de I par définition de I. Et $0 \in I$, puisque la suite $(a_n 0^n) = (a_0, 0, 0, 0, \cdots)$ est bornée. Donc 0 est bien le minimum de l'ensemble I.
- Ensuite, si on fixe $r \in I$, et un réel $\tilde{r}$ tel que $0 \leq \tilde{r} \leq r$, alors $\tilde{r} \in I$, puisque $|a_n \tilde{r}^n| = |a_n| \times \tilde{r}^n \leq |a_n| \times r^n = |a_n r^n|$, et $(a_n r^n)$ est bornée. L'ensemble I est donc bien un intervalle.

Remarque
Trois cas de figure se présentent donc :
- *L'intervalle I est majoré et fermé, et donc $I = [0, R]$ avec $R = \sup(I) \in I$.*

- *L'intervalle I est majoré et ouvert, et donc $I = [0, R[$, avec $R = \sup(I) \notin I$.*
- *L'intervalle I n'est pas majoré, et donc $I = [0, +\infty[$.*

Ces deux lemmes nous permettent alors de définir le "rayon de convergence" :

Définition 5 (Rayon de convergence d'une série entière)
On considère une série entière $\sum a_n z^n$. On pose :
$$R = \sup(I) = \sup\{r \in \mathbb{R}_+,\ \textit{la suite } (a_n r^n) \textit{ est bornée}\}$$
(avec la convention $R = +\infty$ si l'intervalle de bornage I n'est pas majoré).
Cet élément $R \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ est appelé **le rayon de convergence** *de $\sum a_n z^n$.*

<u>ATTENTION !</u>
Le rayon de convergence d'une série entière peut valoir $+\infty$!

Théorème 6 (Propriétés fondamentales du rayon de convergence)
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.

(i) *Alors pour tout $z \in \mathbb{C}$:*
$$\begin{cases} |z| < R \implies \sum a_n z^n \textit{ converge absolument} \\ |z| > R \implies \sum a_n z^n \textit{ diverge grossièrement} \end{cases}.$$
De plus, R est le seul élément de $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ vérifiant cette propriété.

(ii) *Enfin, la série entière $\sum a_n z^n$ converge normalement sur tout disque fermé $\overline{\mathcal{D}(O, r)}$ avec $0 \leq r < R$.*

Preuve

(i) Fixons $z \in \mathbb{C}$.

- Si $|z| < R$, alors fixons un réel r tel que $|z| < r < R$ (c'est possible).
Puisque l'ensemble $I = \{r \in \mathbb{R}^+,\ (a_n r^n) \text{ est bornée}\}$ est un intervalle de borne supérieure R (d'après le lemme 3 et la définition 4), on en déduit que la suite $(a_n r^n)$ est bornée (attention, pas nécessairement la suite $(a_n R^n)$, puisque R n'appartient pas nécessairement à I). Vu que $|z| < r$, on conclut par le lemme d'Abel que $\sum a_n z^n$ converge absolument.
- Si $|z| > R$, alors la suite $(a_n |z|^n)$ est non bornée (puisque $|z| > \sup(I)$), donc la suite $(a_n z^n)$ n'est pas bornée non plus, ce qui implique qu'elle ne tend pas vers 0 lorsque $n \to +\infty$. La série $\sum a_n z^n$ est donc grossièrement divergente.
- Unicité : soit R_1 et R_2 deux éléments de $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ vérifiant la propriété fondamentale :
$$\forall i \in \{1; 2\}, \qquad \begin{cases} |z| < R_i \implies \sum a_n z^n \text{ converge absolument} \\ |z| > R_i \implies \sum a_n z^n \text{ diverge grossièrement} \end{cases}$$
Si $R_1 \neq R_2$, par exemple $R_1 < R_2$, alors il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que $R_1 < |z| < R_2$, et donc d'après la propriété vérifiée par R_1 et R_2, on aurait la série $\sum a_n z^n$ qui converge (puisque $|z| < R_2$) et qui diverge (puisque $|z| > R_1$). C'est absurde, donc $R_1 = R_2$.

(ii) Soit $0 \leq r < R$. On a $\|z \mapsto a_n z^n\|_{\infty, \overline{\mathcal{D}(O,r)}} = |a_n r^n|$, et $\sum |a_n r^n|$ converge par le point (i), donc $\sum \|z \mapsto a_n z^n\|_{\infty, \overline{\mathcal{D}(O,r)}}$ converge, ce qui montre la convergence normale voulue.

<u>ATTENTION !</u> • Si $|z| = R$, alors on ne peut pas conclure quant à la convergence de la série $\sum a_n z^n$. Cela va dépendre des coefficients (a_n), il faut donc faire du cas par cas.

- Il n'y a pas nécessairement convergence normale sur tout le disque ouvert $\mathcal{D}(O, R)$ (seulement sur les sous-disques fermés).

Remarque
Deux cas extrêmes :

- *Si $R = +\infty$, alors la série $\sum a_n z^n$ converge absolument pour tout $z \in \mathbb{C}$, puisque la condition "$|z| > R$" est impossible.*

- *Si $R = 0$, alors la série $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ (et converge pour $z = 0$ bien sûr), puisque la condition "$|z| < R$" est impossible.*

Exemple
La série géométrique $\sum z^n$ a pour rayon de convergence $R = 1$, puisqu'elle converge absolument pour $|z| < 1$ et diverge grossièrement pour $|z| > 1$.

Définition 7 (Disque ouvert de convergence, cercle d'incertitude)
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $\boldsymbol{R} \in]\boldsymbol{0}, +\boldsymbol{\infty}[$ (non nul et fini). On appelle :

- **disque ouvert de convergence** *le disque ouvert de centre O et de rayon R, c'est-à-dire l'ensemble $\mathcal{D}(O, R) := \{z \in \mathbb{C},\ |z| < R\}$.*
- **cercle d'incertitude** *le cercle de centre O et de rayon R, c'est-à-dire l'ensemble $\mathcal{C}(O, R) := \{z \in \mathbb{C},\ |z| = R\}$.*

Remarque
Si on reformule en ces termes la propriété fondamentale du rayon de convergence, cela donne :

- *la série entière $\sum a_n z^n$ converge absolument en tout point du disque ouvert de convergence $\mathcal{D}(O, R)$,*
- *diverge grossièrement en dehors du disque fermé $\overline{\mathcal{D}}(O, R)$.*
- *sur le cercle d'incertitude, il n'y a pas nécessairement convergence, tout peut se produire (voir les exemples).*

ATTENTION !
Le **disque ouvert de convergence** est inclus dans **le domaine de convergence**, mais pas nécessairement égal : ne pas les confondre !
En notant $\mathcal{D}$ le domaine de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ et R son rayon de convergence, on a donc

$$\mathcal{D}(O, R) \subset \mathcal{D} \subset \overline{\mathcal{D}}(O, R),$$

et les deux inclusions peuvent être strictes (voir les exemples précédents).

4) Détermination pratique du rayon de convergence

On donne ici plusieurs techniques pour déterminer le rayon de convergence R d'une série entière.

a) Tests de valeurs

Méthode (Détermination de R par des tests de valeurs)
Cette méthode est basée sur l'utilisation de la propriété fondamentale du rayon (prop. 6) : pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$, on a :

$$\begin{cases} |z_0| < R \implies \sum |a_n||z_0|^n \text{ converge } \implies \sum a_n z_0^n \text{ converge} \\ |z_0| > R \implies \sum a_n z_0^n \text{ diverge grossièrement } \implies \sum a_n z_0^n \text{ diverge} \end{cases},$$

donc on en déduit facilement :

- $\sum a_n z_0^n$ *diverge* $\implies R \leq |z_0|$;
- $\sum |a_n||z_0|^n$ *diverge* $\implies R \leq |z_0|$;
- $\sum a_n z_0^n$ *converge* $\implies R \geq |z_0|$;
- $\sum |a_n||z_0|^n$ *converge* $\implies R \geq |z_0|$;
- $\sum a_n z_0^n$ *diverge non grossièrement* $\implies R = |z_0|$;
- $\sum a_n z_0^n$ *est semi-convergente* $\implies R = |z_0|$.

ATTENTION !
A chaque fois, on obtient des inégalités **larges** sur R, jamais strictes !

Exemple
Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n}$.
Cette série diverge en $z_0 = 1$ mais pas grossièrement (en effet, la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge mais son terme général $\frac{1}{n}$ tend quand même vers 0), donc son rayon de convergence est $R = 1$.

b) Par comparaison

Propriété 8 (Comparaison des rayons de convergence)
Soient deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$, de rayons de convergence respectifs $R_a, R_b \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$. Si $|a_n| \leq |b_n|$ à partir d'un certain rang, ou si $a_n = O(b_n)$, ou encore si $a_n = o(b_n)$, alors $R_a \geq R_b$.

Preuve
Si $a_n = O(b_n)$, alors il existe un entier naturel n_0 et une constante $M > 0$ tel que $\forall n \geq n_0$, $\forall r \geq 0$, $|a_n r^n| \leq M|b_n r^n|$. On a donc, pour tout $r \geq 0$, $(b_n r^n)$ bornée $\implies$ $(a_n r^n)$ bornée, et donc

$$I_b := \{r \geq 0,\ (b_n r^n) \text{est bornée}\} \subset I_a := \{r \geq 0,\ (a_n r^n) \text{est bornée}\}.$$

Ceci entraîne que $\sup(I_b) \leq \sup(I_a)$, i.e. $R_b \leq R_a$.

c) Par équivalence

Propriété 9 (Séries entières à coefficients de module équivalents)
Soient deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$, de rayons de convergence respectifs $R_a, R_b \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$. Si $|a_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} |b_n|$, alors $R_a = R_b$.

Preuve
Par hypothèse, il existe un entier naturel n_0 tel que $\forall n \geq n_0$, $\frac{1}{2}|b_n| \leq |a_n| \leq \frac{3}{2}|b_n|$. On en déduit facilement que pour tout $r \geq 0$:

$$(a_n r^n) \text{ est bornée } \iff (b_n r^n) \text{ est bornée }.$$

Les intervalles de bornage I_a et I_b sont donc égaux, ce qui entraîne l'égalité de leurs bornes supérieures :

$$R_b = \sup(I_b) = \sup(I_a) = R_a.$$

d) Utilisation du critère de d'Alembert

Rappel (Critère de d'Alembert)
Si $u_n > 0$ à partir d'un certain rang et si $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, alors :

- $\ell < 1 \implies$ la série $\sum u_n$ converge.
- $\ell > 1 \implies$ la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.
- $\ell = 1$ est un cas indéterminé.

Remarque
On peut avoir $\ell = +\infty$ dans le cas $\ell > 1$.

ATTENTION !
Dans le cas où $\ell = 1$, on ne peut pas dire *a priori* si la série $\sum u_n$ converge ou diverge.

Méthode (Détermination de R avec le critère de d'Alembert)
Pour déterminer le rayon de convergence R d'une série entière $\sum a_n z^n$ à l'aide du critère de d'Alembert, on n'applique pas le critère de d'Alembert à la suite $a_n z^n$ (elle n'est pas strictement positive !), mais plutôt à la suite $u_n = |a_n z^n|$ (si $a_n \neq 0$).
Une rédaction très détaillée est attendue aux concours.

- *On fixe $z \in \mathbb{C}^*$ et on pose $u_n =$ le module du terme général de la série. On vérifie que $u_n > 0$ à partir d'un certain rang.*
- *On calcule $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ (si elle existe). Plusieurs cas possibles :*
  * *si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 0$, alors pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série $\sum |a_n z^n|$ est convergente et donc $R = +\infty$;*
  * *si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = +\infty$, alors pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, la série $\sum |a_n z^n|$ est divergente et donc $R = 0$;*
  * *si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$ dépend de $|z|$, alors, en cherchant les valeurs de z pour lesquelles $\ell < 1$, on trouve des conditions sur z pour savoir si la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente ou grossièrement divergente et on en déduit donc le rayon de convergence (toujours d'après la propriété fondamentale du rayon de convergence).*

Exemple
Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{z^n}{n!}$.
Fixons $z \in \mathbb{C}^*$ et posons $u_n = \left|\frac{z^n}{n!}\right|$. On a $u_n > 0$ pour tout $n \geq 0$ et

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{|z|}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 < 1,$$

donc la série $\sum u_n$ converge d'après le critère de d'Alembert.
Ainsi, la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{z^n}{n!}$ converge absolument pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ (mais aussi pour $z = 0$), donc son rayon de convergence est $R = +\infty$.

Exemple
Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{z^{2n}}{3^n+1}$.
Fixons $z \in \mathbb{C}^*$ et posons $u_n = \left|\frac{z^{2n}}{3^n+1}\right|$. On a $u_n > 0$ pour tout $n \geq 0$ et

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3^n+1}{3^{n+1}+1}|z|^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{|z|^2}{3}.$$

On utilise le critère de d'Alembert. Deux cas se présentent :
— si $\frac{|z|^2}{3} < 1$ (c'est-à-dire $|z| < \sqrt{3}$), alors $\sum u_n$ converge ;
— si $\frac{|z|^2}{3} > 1$ (c'est-à-dire $|z| > \sqrt{3}$), alors $\sum u_n$ diverge grossièrement.
Ainsi, la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{z^{2n}}{3^n+1}$ converge absolument pour tout z tel que $|z| < \sqrt{3}$ et diverge grossièrement pour tout z tel que $|z| > \sqrt{3}$, donc son rayon de convergence est $R = \sqrt{3}$.

Si aucune de ces méthodes ne fonctionne, on peut toujours revenir à la définition du rayon de convergence : on cherche les $r \geq 0$ tels que la suite $(a_n r^n)$ est bornée, on obtient un intervalle I, et on a $R = \sup(I)$.

5) Opérations algébriques sur les séries entières

Propriété 10 (Somme de deux séries entières)
Soient deux séries entières $\sum a_n z^n$ *et* $\sum b_n z^n$*, de rayons de convergence respectifs* $R_a, R_b \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$*. Alors :*

(i) *La série entière* $\sum (a_n + b_n) z^n$ *a un rayon de convergence* $R \geq \min(R_a, R_b)$*, et pour tout* $z \in \mathbb{C}$ *tel que* $|z| < \min(R_a, R_b)$*, on a*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n;$$

(ii) *Si* $R_a \neq R_b$*, alors* $R = \min(R_a, R_b)$*.*

Preuve

(i) Soit $|z| < \min(R_a, R_b)$. Les deux séries $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ convergent absolument donc $\sum (a_n + b_n) z^n$ converge absolument (puisque $|(a_n + b_n) z^n| \leq |a_n z^n| + |b_n z^n|$). Il y a donc convergence absolue de la série $\sum (a_n + b_n) z^n$ dans le disque ouvert de rayon $\min(R_a, R_b)$, ce qui montre que $R \geq \min(R_a, R_b)$. De plus, par linéarité :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$$

(car les deux séries du membre de droite convergent).

(ii) Sans perte de généralité, on peut supposer $R_a < R_b$. Par le point précédent, on a $R \geq R_a$. Si $R_a < |z| < R_b$, la série $\sum (a_n + b_n) z^n$ diverge, car $\sum a_n z^n$ diverge et $\sum b_n z^n$ converge. Donc $R \leq R_a$, et finalement $R = R_a = \min(R_a, R_b)$.

ATTENTION !
Si $R_a = R_b$, on peut avoir $R > \min(R_a, R_b)$ (par exemple, si $a_n = -b_n$ et si $R_a = R_b < +\infty$, alors $\sum (a_n + b_n) z^n$ est la série nulle, donc $R = +\infty$).

Propriété 11 (Multiplication par n^α)
Pour toute suite $(a_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ *et pour tout* $\alpha \in \mathbb{R}$*, les séries entières* $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ *et* $\sum_{n \geq 0} n^\alpha a_n z^n$ *ont* **le même rayon de convergence***.*

Preuve
Le résultat est trivial pour $\alpha = 0$.
Supposons $\alpha > 0$.
On note respectivement R_1 et R_2 les rayons de convergence de $\sum a_n z^n$ et $\sum n^\alpha a_n z^n$.

- Vu que $|a_n| \leq |n^\alpha a_n|$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $R_1 \geq R_2$ (d'après la prop. 8).
- Supposons que $R_1 > R_2$, et fixons un réel r tels que $0 \leq R_2 < r < R_1$.
  Par définition de R_1, la suite $(a_n r^n)$ est bornée. On en déduit que pour tout réel $\rho \in]R_2, r[$, la suite $(n^\alpha a_n \rho^n)$ est bornée, puisque :
  $$|n^\alpha a_n \rho^n| = |a_n r^n| \times n^\alpha \left(\frac{\rho}{r}\right)^n \leq M \times n^\alpha \left(\frac{\rho}{r}\right)^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$
  (par croissances comparées).
  Mais ceci est contradictoire, car $\rho > R_2 = \sup\{t \geq 0,\ (n^\alpha a_n t^n) \text{ est bornée}\}$.
  Donc $R_2 = R_1$.

Si $\alpha < 0$, alors le résultat s'obtient en inversant les rôles des deux suites.

Exemple
Pour tout réel α, la série entière $\sum n^\alpha z^n$ a pour rayon de convergence $R = 1$.

Définition 12 (Produit de Cauchy de deux séries entières)
On appelle **produit de Cauchy** *des séries entières* $\sum a_n z^n$ *et* $\sum b_n z^n$ *la série entière* $\sum c_n z^n$, *avec*

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Propriété 13 (Convergence du produit de Cauchy)
Si R_a *et* R_b *sont les rayons de convergence respectifs des séries entières* $\sum a_n z^n$ *et* $\sum b_n z^n$, *alors le rayon de convergence de la série entière produit* $\sum c_n z^n$ *vérifie*

$$R \geq \min(R_a, R_b).$$

De plus, pour tout $z \in \mathbb{C}$ *tel que* $|z| < \min(R_a, R_b)$, *on a*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right).$$

Preuve
Fixons $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \min(R_a, R_b)$. Vu que les séries numériques $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ convergent absolument, le produit de Cauchy de ces deux séries converge absolument (cf. CH. 1 sur les familles sommables), et

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}(a_k z^k)(b_{n-k} z^{n-k})\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)}_{=c_n} z^n.$$

La série entière $\sum c_n z^n$ converge donc absolument sur tout le disque ouvert de rayon $\min(R_a, R_b)$, ce qui montre que son rayon de convergence vérifie $R \geq \min(R_a, R_b)$.

Exemple
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \geq 1$.
Posons $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ et considérons la série entière $\sum S_n z^n$.
Déterminer son rayon de convergence et calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} S_n z^n$ en fonction de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.
Il suffit de remarquer que $\sum S_n z^n$ est le produit de Cauchy des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum z^n$, puisque

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \times 1 = S_n.$$

Puisque $\sum z^n$ est de rayon 1, la série $\sum S_n z^n$ est de rayon $\geq \min(R, 1) = 1$, et on a

$$|z| < 1 \implies \sum_{n=0}^{+\infty} S_n z^n = \frac{1}{1-z} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

II Propriétés de la somme d'une série entière

1) Continuité

Théorème 14 (Continuité de la somme d'une série entière)
Soit $\sum a_n z^n$ *une série entière de rayon de convergence* $R \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$*. Alors la fonction somme* $f : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ *est continue sur le disque ouvert de convergence* $\mathcal{D}(O, R)$*.*

Preuve
La série de fonctions $\sum a_n z^n$ converge normalement, donc uniformément sur tout disque fermé $\overline{\mathcal{D}(O,r)}$ avec $0 \leq r < R$ et toutes les fonctions $z \mapsto a_n z^n$ sont continues sur $\mathbb{C}$, car polynomiales, donc (par le théorème de continuité d'une série de fonctions) la somme f est continue sur tout disque fermé $\overline{\mathcal{D}(O,r)}$, donc continue sur $\mathcal{D}(O, R)$.

ATTENTION !
Ce théorème **ne dit pas** que f est continue sur tout le **domaine** de convergence, seulement sur le **disque ouvert** de convergence.

2) Restriction à l'axe réel

A partir de maintenant, on va se limiter à des séries entières **de la variable réelle**.

Définition 15 (Intervalle ouvert de convergence)
Soit $\sum a_n z^n$ *une série entière de rayon de convergence* $R \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$*.*
L'intervalle $]-R, R[$ *est appelé* **intervalle ouvert de convergence***.*

Remarque

- *L'intervalle ouvert de convergence est l'intersection du disque ouvert de convergence avec l'axe réel.*
- *Cet intervalle est vide si* $R = 0$*, et c'est* $\mathbb{R}$ *tout entier si* $R = +\infty$*.*

Définition 16 (Domaine réel de convergence)
Soit une série entière $\sum a_n z^n$*. On appelle* **domaine réel de convergence** *de cette série entière l'ensemble des* $x \in \mathbb{R}$ *tels que* $\sum a_n x^n$ *converge. Ce domaine est un intervalle* I *vérifiant*

$$]-R, R[\subset I \subset [-R, R],$$

où R *est le rayon de convergence.*

Remarque
Le domaine réel de convergence I *est donc exactement* **l'ensemble de définition** *de la fonction d'une variable réelle*

$$S : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \end{array} \right. .$$

ATTENTION !
Il ne faut pas confondre **intervalle ouvert de convergence** et **domaine réel de convergence** : lorsque $0 < R < +\infty$, on peut avoir

$$I =]-R; R[, \text{ ou } I = [-R; R[, \text{ ou } I =]-R; R], \text{ ou } I = [-R; R].$$

Ca dépend s'il y a convergence de la série pour $x = R$ et $x = -R$.

Exemple

On considère la série entière $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}$. Déterminer son intervalle ouvert de convergence et son domaine réel de convergence. Sont-ils égaux ?
En $x=1$, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge mais non grossièrement, donc son rayon de convergence est $R=1$. L'intervalle ouvert de convergence est donc $]-1;1[$.
Reste à étudier la convergence aux bords de cet intervalle ouvert :

- En $x=1$, c'est déjà fait, la série diverge.
- En $x=-1$, la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge par le critère spécial des séries alternées.

Finalement, le domaine réel de convergence est $I=[-1;1[$, alors que l'intervalle ouvert de convergence n'est que $]-1;1[$. Il n'y a donc pas égalité.

Théorème 17 (Continuité sur l'intervalle ouvert de convergence)
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R>0$.
Alors, la fonction $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est continue sur $]-R;R[$.

Preuve
$\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ est une série de fonctions continues (car polynomiales) sur $]-R,R[$ qui converge normalement sur tout segment $[-r,r] \subset]-R,R[$, donc $S \in \mathcal{C}^0(]-R,R[,\mathbb{K})$.

<u>ATTENTION !</u>
Ce résultat donne la continuité de la somme sur l'intervalle **ouvert** de convergence, pas sur le domaine réel de convergence. Si on veut étudier la continuité aux bords de l'intervalle (donc en R et $-R$), il faut utiliser d'autres arguments que la convergence normale (qui n'est pas vraie sur $[-R,R]$ en général).

Exemple
Etudier la continuité de la fonction $S : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n+1} x^n$ sur son domaine de définition.
On obtient facilement que le rayon de convergence de cette série entière est $R=1$, donc S est continue sur $]-1,1[$. De plus, S n'est pas définie en $x=-1$ (car $S(-1)$ est une série harmonique divergente), et S est définie en $x=1$ (car $S(1)$ est une série convergente par le critère spécial des séries alternées), donc S est définie sur $I=]-1,1]$.
Reste à étudier la continuité de S en 1.
Pour cela, on montre la convergence uniforme de la série sur $[0,1]$ en majorant les restes : pour tout $x \in [0,1]$, le CSSA s'applique (car la suite $k \mapsto \frac{x^k}{2k+1}$ est décroissante et de limite nulle) et donne

$$\forall x \in [0,1], \qquad |R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k+1} x^k \right| \leq \frac{x^{n+1}}{2n+3} \leq \frac{1}{2n+3},$$

donc $\|R_n\|_{\infty,[0,1]} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Puisque $x \mapsto \frac{(-1)^{n-1}}{2n+1} x^n$ est continue sur $[0,1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la convergence uniforme sur $[0,1]$ de la série entraîne que S est continue sur $[0,1]$.
Finalement, S est continue sur son domaine de définition $I=]-1,1]$.

Lorsqu'on ne dispose pas de la convergence uniforme au voisinage de R (ou de $-R$), on dispose tout de même du théorème suivant :

Théorème 18 (Théorème d'Abel radial)
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R>0$.
Si $\sum a_n R^n$ converge, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \underset{x\to R^-}{\longrightarrow} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n$.
En d'autres termes, la fonction somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est continue en R.

Remarque • *Si on suppose que $\sum a_n R^n$ converge* **absolument***, alors la continuité en R est évidente, puisque dans ce cas, la série entière converge normalement sur $[0,R]$, donc uniformément au voisinage de R (étant donné que $\|x \mapsto a_n x^n\|_{\infty,[0,R]} = |a_n|R^n$ est sommable).*

- *Ce théorème fonctionne aussi en $x=-R$, si $\sum a_n(-R)^n$ converge (il suffit de considérer la série entière $\sum(-1)^n a_n x^n$ en $x=R$).*

Preuve (traitée en MPI*)
Montrons que $S(x) \to S(R)$ lorsque $x \to R^-$.

Par hypothèse, la suite $A_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k R^k$ converge vers $S(R) \in \mathbb{C}$ lorsque $n \to +\infty$.

Effectuons une transformation d'Abel sur les sommes partielles, en introduisant les sommes partielles A_n : pour tout $x \in]-R,R[$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \sum_{k=0}^{n} a_k R^k (x/R)^k = \sum_{k=0}^{n} (A_k - A_{k-1})(x/R)^k$$

(avec la convention $A_{-1}=0$). Par changement d'indice :

$$S_n(x) = \left(1-\frac{x}{R}\right)\sum_{k=0}^{n-1} A_k (x/R)^k + A_n (x/R)^n.$$

Puisque $S_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} S(x)$, $A_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} S(R)$ et $(x/R)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on obtient par passage à la limite que

$$\forall x \in]-R,R[, \qquad S(x) = \left(1-\frac{x}{R}\right)\sum_{k=0}^{+\infty} A_k (x/R)^k.$$

Ensuite, on fixe un réel $\varepsilon > 0$, et on majore $|S(x)-S(R)|$. A partir d'un certain rang k_0, on a par hypothèse $|A_k - S(R)| \le \varepsilon/2$. Donc, pour tout $x \in]-R,R[$:

$$\begin{aligned}
|S(x)-S(R)| &= \left|\left(1-\frac{x}{R}\right)\sum_{k=0}^{+\infty} A_k (x/R)^k - \left(1-\frac{x}{R}\right)\sum_{k=0}^{+\infty} S(R)(x/R)^k\right| \\
&\le \left(1-\frac{x}{R}\right)\sum_{k=0}^{+\infty} |A_k - S(R)|(x/R)^k \\
&\le \left(1-\frac{x}{R}\right)\sum_{k=0}^{k_0} |A_k - S(R)|\underbrace{(x/R)^k}_{\le 1} + \left(1-\frac{x}{R}\right)\sum_{k=k_0+1}^{+\infty} (\varepsilon/2)(x/R)^k \quad . \\
&\le \underbrace{\left(1-\frac{x}{R}\right)\sum_{k=0}^{k_0} |A_k - S(R)|}_{=C_{k_0}} + \frac{\varepsilon}{2}\underbrace{\left(1-\frac{x}{R}\right)\sum_{k=0}^{+\infty}(x/R)^k}_{=1} \\
&\le \left(1-\frac{x}{R}\right)C_{k_0} + \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

Il reste à faire tendre x vers R^- : vu que $\lim\limits_{x\to R^-} \left(1-\frac{x}{R}\right)C_{k_0} = 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$x \in]R-\delta, R[\implies \left(1-\frac{x}{R}\right)C_{k_0} \le \frac{\varepsilon}{2} \implies |S(x)-S(R)| \le \varepsilon,$$

ce qui prouve bien que $S(x) \underset{x\to R^-}{\longrightarrow} S(R)$.

Corollaire 19 (Continuité sur le domaine réel de convergence)
Avec les notations précédentes, la fonction somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est donc continue sur tout son domaine réel de convergence.

Preuve
S est toujours continue sur $]-R,R[$ (d'après le théorème 17). De plus, le théorème d'Abel radial fournit la continuité de S en R lorsqu'elle y est définie, et idem en $-R$.

3) Intégration terme à terme

Définition 20 (Série entière primitive)
On appelle **série entière primitive** *de* $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ *la série entière* $\sum_{n\geq 0} a_n \dfrac{z^{n+1}}{n+1}$.

Propriété 21 (Rayon de convergence de la série entière primitive)
Les séries entières $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ *et* $\sum_{n\geq 0} a_n \dfrac{z^{n+1}}{n+1}$ *ont le même rayon de convergence.*

Preuve
La multiplication par $z \in \mathbb{C}^*$ ne change pas la convergence, donc $\sum_{n\geq 0} a_n \dfrac{z^{n+1}}{n+1}$ a même rayon que $\sum_{n\geq 0} a_n \dfrac{z^n}{n+1}$, qui (par équivalence des termes généraux), a même rayon que $\sum_{n\geq 0} a_n \dfrac{z^n}{n}$.
Enfin, $\sum_{n\geq 0} a_n \dfrac{z^n}{n}$ a même rayon que $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ d'après la prop. 11.

Théorème 22 (Intégration terme à terme d'une série entière)
Soit $\sum a_n z^n$ *une série entière, de rayon de convergence* $R \neq 0$. *Alors :*

$$\forall x \in]-R; R[, \qquad \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n\right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

En d'autres termes, $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ *est la primitive nulle en* 0 *de* $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *sur* $]-R, R[$.

ATTENTION !
Ca ne marche pas pour $x = \pm R$ en général ! (on ne peut pas intégrer jusqu'au bord de l'intervalle de convergence).

Preuve
Si $x \in]-R, R[$, la série entière $\sum a_n x^n$ converge normalement sur le segment $[0, x]$ (ou $[x, 0]$), donc on a une série de fonctions continues qui converge uniformément sur un segment, ce qui permet d'intégrer terme à terme (cf. CH.11 sur les séries de fonctions) :

$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n\right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^x a_n t^n dt\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

ATTENTION !
Les séries entières $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ et $\sum_{n\geq 0} \dfrac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ ont même rayon de convergence mais elles peuvent **se comporter différemment aux bords** de l'intervalle de convergence.
Par exemple, considérons la série entière $\sum_{n\geq 1} \dfrac{x^{n-1}}{n}$ (de rayon de convergence $R = 1$) :
Elle diverge pour $x = 1$ (c'est la série harmonique), mais sa série primitive $\sum_{n\geq 1} \dfrac{x^n}{n^2}$ converge pour $x = 1$ (série de Riemann d'exposant > 1).

4) Dérivation terme à terme

Définition 23 (Série entière dérivée)
On appelle **série entière dérivée de** $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ *la série entière* $\sum_{n \geq 1} n a_n z^{n-1}$.

Remarque
La série entière dérivée s'écrit aussi $\sum_{n \geq 0} (n+1) a_{n+1} z^n$ *(par changement d'indice).*

ATTENTION !
Eviter d'écrire $\sum_{n \geq 0} n a_n z^{n-1}$ car le premier terme $0 * a_0 * z^{-1}$ pose problème pour $z = 0$ (en effet 0^{-1} n'est pas défini). Mais toutefois, on pourrait convenir que $n a_n z^{n-1} = 0$ si $n = 0$ et $z = 0$.

Propriété 24 (Rayon de convergence d'une série dérivée)
Les séries entières $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ *et* $\sum_{n \geq 1} n a_n z^{n-1}$ *ont le même rayon de convergence.*

Preuve
L'une est la série entière primitive de l'autre !

Théorème 25 (Dérivation terme à terme d'une série entière)
Soit $\sum a_n z^n$ *une série entière, de rayon de convergence* $R \neq 0$.
Alors, la fonction somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $]-R, R[$ *et*

$$\forall x \in \,]-R, R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n.$$

Preuve
Les fonctions $u_n : x \mapsto a_n x^n$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-R, R[$, la série $\sum u_n$ converge simplement sur $]-R, R[$ (car il y a convergence absolue sur l'intervalle ouvert de convergence), et la série $\sum u_n'$ converge uniformément sur tout segment $[-r, r] \subset]-R, R[$ (puisque R est aussi le rayon de convergence de la série dérivée $\sum u_n'$). Donc d'après le théorème de dérivation terme à terme des séries de fonctions, on en déduit que $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-R, R[$ et $S' = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n'$, ce qui donne bien le résultat car $u_n' : x \mapsto a_n x^{n-1}$ pour $n \geq 1$ et $u_0' = 0$.

ATTENTION !
La fonction somme f n'est **pas nécessairement dérivable aux bords** de l'intervalle de convergence (en $x = \pm R$), même quand elle y est définie !

Exemple
Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} n x^n$ pour tout $x \in]-1; 1[$.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n x^n = x \times \left(\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} \right) = x \times \frac{d}{dx} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right) = x \times \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1-x} \right) = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Corollaire 26 (Dérivation itérée terme à terme)
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière, de rayon de convergence $R \neq 0$. Alors

(i) la fonction somme $S : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R;R[$;

(ii) pour tout $x \in]-R;R[$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$S^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d^k}{dx^k}(a_n x^n) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k}.$$

Remarque
La formule est simple à conjecturer car

$$\frac{d^k}{dx^k}(a_n x^n) = \begin{cases} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n x^{n-k} & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}.$$

Preuve
On prouve par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$, S est k-fois dérivable sur $]-R;R[$ et que $\forall x \in]-R;R[$, $S^{(k)}(x) = \displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k}$.

- C'est vrai pour $k = 0$ trivialement car S est définie sur $]-R;R[$ et

$$\forall x \in]-R;R[, \quad S^{(0)}(x) = f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

- Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que S est k-fois dérivable sur $]-R;R[$ et que

$$\forall x \in]-R;R[, \quad S^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+k)!}{n!} a_{n+k} x^n.$$

  On applique alors le théorème 25 à la série entière $T : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+k)!}{n!} a_{n+k} x^n$ (qui a pour rayon de convergence R, en tant que série dérivée k^e de $\sum a_n x^n$), qui montre que $S^{(k)}$ est dérivable sur son intervalle ouvert de convergence $]-R;R[$ et

$$S^{(k+1)}(x) = T'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n \frac{(n+k)!}{n!} a_{n+k} x^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+k)!}{(n-1)!} a_{n+k} x^{n-1},$$

  c'est-à-dire

$$S^{(k+1)}(x) = \sum_{n=k+1}^{+\infty} \frac{n!}{(n-(k+1))!} a_n x^{n-(k+1)}.$$

5) Expression des coefficients

Théorème 27 (Expression des coefficients d'une série entière)
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière, de rayon de convergence $R \neq 0$.
On note $S : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \in \mathcal{C}^\infty(]-R;R[, \mathbb{K})$ la fonction somme.
Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a_n = \dfrac{S^{(n)}(0)}{n!}$.

Preuve
On reprend l'expression des dérivées k^e obtenue au corollaire précédent (valable pour $-R < x < R$) et on évalue en $x = 0$:

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad S^{(k)}(0) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n 0^{n-k} = \frac{k!}{(k-k)!} a_k = k! a_k.$$

Corollaire 28 (Unicité des coefficients d'une série entière)
S'il existe $\alpha > 0$ *tel que* $\forall x \in]0, \alpha]$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$, *alors* $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = b_n$.

Preuve
Notons $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $T(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$, qui convergent et sont égales pour $x \in]0, \alpha]$. Ces deux séries entières ont des rayons de convergence au moins égaux à α, elles sont donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\alpha, \alpha[$. Par continuité de S et T et toutes leurs dérivées en 0, cela entraîne (d'après la proposition précédente) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!} = \frac{T^{(n)}(0)}{n!} = b_n.$$

III Fonctions développables en série entière

Dans cette section, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ qui est voisinage de 0.

1) Généralités

Définition 29 (Fonction développable en série entière sur un intervalle)
Une fonction f de la variable réelle est dite **développable en série entière sur $]-r, r[$** *s'il existe une suite $(a_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telle que*

$$\forall x \in]-r, r[, \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

(avec convergence de la série).
De même, on dit qu'une fonction f de la variable complexe est **développable en série entière sur le disque ouvert $\mathcal{D}(0, r)$** *s'il existe une suite $(a_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telle que*

$$\forall z \in \mathcal{D}(0, r), \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

(avec convergence de la série).

Remarque
Dans ce cas, la série entière qui représente f a un rayon de convergence $R \geq r$.

Exemple
Soit $f : x \mapsto \frac{1}{1-x}$ définie sur $I =]-\infty, 1[$.

La fonction f est développable en série entière sur $]-1, 1[$ car $\forall x \in]-1, 1[$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$.

Exemple
Soit $g : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ définie sur $I =]-\infty, +\infty[$.

La fonction g est développable en série entière sur $]-1, 1[$ car $\forall x \in]-1, 1[$, $g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$

(en posant $u = -x^2$ dans le développement en série entière précédent).

Exemple

La fonction $x \mapsto e^x$ est définie et développable en série entière sur $\mathbb{R}$ car $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$

(cf. CH.11 sur les séries de fonctions).

Définition 30 (Fonction développable en série entière en 0)
On dit que $f : I \to \mathbb{K}$ est **développable en série entière en 0** *s'il existe $r > 0$ tel que f est développable en série entière sur $]-r, r[$.*

Notation
On abrège souvent « développable en série entière »(et aussi « développement en série entière ») par « DSE ».

Exemple

Montrer que la fonction $x \mapsto f(x) = \dfrac{1}{2x+1}$ est développable en série entière en 0.

On a $f(x) = \dfrac{1}{1-(-2x)} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-2x)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(-2)^n x^n$ pour tout x réel tel que $|-2x| < 1$, c'est-à-dire $x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$. Donc f est bien DSE en 0.

Théorème 31 (Propriétés d'une fonction développable en série entière)
Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction DSE sur $]-r, r[$. Alors :

(i) f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-r, r[$;

(ii) Le développement en série entière de f est unique : il s'agit de

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n, \qquad \forall x \in]-r, r[.$$

Preuve
Ces propriétés de la somme d'une série entière ont été montrées dans la partie II.

Définition 32 (Série de Taylor en 0)
Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$. On appelle **série de Taylor** *de f en 0 la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.*

Remarque

- *Ainsi, le seul DSE* **possible** *de f est sa série de Taylor.*
- *Similitude avec la formule de Taylor-Young : lorsque f est DSE en 0, il suffit de tronquer le DSE de f pour obtenir son développement limité ("DL") en 0 à l'ordre voulu :*

$$\forall x \in]-r, r[,\ f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \implies \forall n \in \mathbb{N},\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \underset{x\to 0}{o}(x^n).$$

En effet, le reste vérifie :

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = x^{n+1} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(n+1+k)}(0)}{(n+1+k)!} x^k = x^{n+1} g(x),$$

avec g continue en 0, donc bornée au voisinage de 0, d'où $R_n(x) = \underset{x\to 0}{O}(x^{n+1}) \subset \underset{x\to 0}{o}(x^n)$.

ATTENTION !
L'implication « f est DSE en 0 $\implies$ f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un voisinage de 0 » est vraie **mais pas la réciproque !**
Il est possible que f soit $\mathcal{C}^\infty$, que sa série de Taylor diverge, ou qu'elle converge vers autre chose que $f(x)$.
Voir les exercices pour un exemple de fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0 mais pas DSE en 0.

ATTENTION !
Ne pas confondre DL en 0 et DSE ! Pour une fonction $\mathcal{C}^\infty$:

- Un DL_n en 0 est une formule **locale** : elle signifie juste que le reste de Taylor-Young est de la forme $x^n\varepsilon(x)$, avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$, elle ne donne aucun renseignement global (comme des majorations, etc...).
- Un DSE est une formule **globale**, c'est-à-dire que c'est une égalité valable sur un intervalle tout entier.

Propriété 33 (Cas d'une fonction paire ou impaire)
Soit f une fonction DSE sur $]-r,r[$:

$$\forall x \in]-r,r[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

(i) Si f est paire, alors $\forall k \in \mathbb{N}$, $a_{2k+1} = 0$, donc $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{2k} x^{2k}$.

(ii) Si f est impaire, alors $\forall k \in \mathbb{N}$, $a_{2k} = 0$, donc $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{2k+1} x^{2k+1}$.

Preuve
Traitons le cas où f est paire (l'autre cas est similaire) : en remplaçant x par $-x$, on a

$$\forall x \in]-r,r[, \quad f(-x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (-x)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n x^n.$$

Mais $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in]-r,r[$ par hypothèse, donc

$$\forall x \in]-r,r[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Par unicité d'un développement en série entière, on en déduit que les coefficients sont égaux :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (-1)^n a_n = a_n,$$

et cette dernière égalité implique $a_n = 0$ si n est impair.

2) Développements en série entière usuels

On peut légitimement se demander si les fonctions « usuelles »(exp, cos, sin, ...) sont développables en série entière. En général, la réponse est « oui », mais le développement en série entière n'est pas nécessairement valable sur tout l'ensemble de définition de la fonction (par exemple, $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ est définie sur $\mathbb{R}$ mais son développement en série entière n'est valable que sur $]-1;1[$).

a) Famille de la série géométrique

Théorème 34 (DSE issus de la série géométrique)
Pour tout $x \in]-1;1[$, on a :

(i) $\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \cdots$

(ii) $\dfrac{1}{1+x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \cdots$

(iii) $\ln(1+x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \cdots$
Et ceci reste valable en $x = 1$.

(iv) $-\ln(1-x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^6}{6} + \cdots$
Et ceci reste valable en $x = -1$.

(v) $\dfrac{1}{1+x^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10} + \cdots$

(vi) $\arctan(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{11}}{11} + \cdots$
Et ceci reste valable en $x = 1$ et $x = -1$.

Toutes ces séries entières ont pour rayon de convergence $R = 1$.

Preuve (i) Pour tout $x \in]-1;1[$, on a

$$\forall N \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{n=0}^{N} x^n = \frac{1-x^{N+1}}{1-x},$$

donc en faisant tendre $N \to +\infty$, la série géométrique de raison x converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} x^n = \lim_{N\to+\infty} \frac{1-x^{N+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x.}$$

(ii) En remplaçant x par $-x$ dans le DSE (i), on obtient le DSE de $\dfrac{1}{1+x}$.

(iii) $x \mapsto \ln(1+x)$ est la primitive de $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ qui s'annule en 0, donc il suffit d'intégrer terme à terme le DSE (ii). Pour le prolongement en $x = 1$, cela résulte du théorème d'Abel radial : la série $\sum (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ converge pour $x = 1$ (d'après le critère spécial des séries alternées), donc sa somme se prolonge continûment en $x = 1$. Vu que d'autre part, $\ln(1+x) \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} \ln(2)$, on obtient par unicité de la limite la relation

$$\ln(2) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}.$$

(iv) Changer x en $-x$ dans le DSE précédent.

(v) Utiliser le DSE de $u \mapsto \frac{1}{1+u}$ avec $u = x^2$.

(vi) $x \mapsto \arctan(x)$ est la primitive de $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ qui s'annule en 0, donc il suffit d'intégrer terme à terme le DSE (v). Le prolongement en $x = 1$ s'obtient par le théorème d'Abel radial, et celui en $x = -1$ s'obtient par imparité de arctan.

Méthode

Cette démonstration illustre des méthodes classiques utilisées pour calculer le développement en série entière d'une fonction donnée :

- *Intégrer ou dériver terme à terme un développement en série entière usuel.*
- *Changer de variable dans un développement en série entière usuel.*

b) Famille de l'exponentielle

Théorème 35 (DSE issus de la fonction exponentielle)
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

(i) $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$

(ii) $\operatorname{ch}(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \frac{x^{10}}{10!} + \cdots$

(iii) $\operatorname{sh}(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \frac{x^{11}}{11!} + \cdots$

(iv) $e^{ix} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n x^n}{n!} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - i\frac{x^7}{7!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots$

(v) $\cos(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \cdots$

(vi) $\sin(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \cdots$

Toutes ces séries entières ont pour rayon de convergence $R = +\infty$.

Preuve *(i)* En posant $f(x) = e^x$, on a $f^{(k)}(x) = e^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $k \in \mathbb{N}$.
S'il existe, le développement en série entière de f est donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Montrons que cette série converge bien vers $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$: d'après la formule de Taylor avec reste intégral appliquée à f entre les points $a = 0$ et $b = x$, on a

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}, \qquad e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n e^t dt.$$

Majorons cette quantité en valeur absolue :

- si $x \geq 0$, alors la fonction $t \mapsto (x-t)^n e^t$ est positive sur $[0; x]$, donc

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| = \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n e^t dt \leq \frac{e^x}{n!} \int_0^x (x-t)^n dt = \frac{x^{n+1} e^x}{(n+1)!}.$$

- si $x < 0$, alors la fonction $t \mapsto (t-x)^n e^t$ est positive sur $[x; 0]$,

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{1}{n!} \int_x^0 \left| (x-t)^n e^t \right| dt = \frac{1}{n!} \int_x^0 (t-x)^n e^t dt.$$

Vu que $e^t \leq e^0 = 1$ pour $t \in [x; 0]$, on en déduit la majoration :

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{1}{n!} \int_x^0 (t-x)^n dt = \frac{(-x)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

En regroupant les deux cas, on a donc

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}, \qquad \left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leq \max(e^x, 1) \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Par croissances comparées, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$, ce qui montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| = 0$, d'où la conclusion :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = e^x.$$

(ii) et *(iii)*
On peut séparer le DSE de e^x en ses termes pairs et impairs par le théorème de sommation par paquets (cf. CH.01), qui s'applique car la famille $(\frac{x^k}{k!})_{k\in\mathbb{N}}$ est sommable, vu que la série $\sum \frac{x^k}{k!}$ converge absolument pour tout $x \in \mathbb{R}$. On a donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

(avec convergence absolue des deux séries), où la fonction $x \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ est paire, et $x \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ est impaire. On peut donc identifier les parties paire et impaire de $x \mapsto e^x$ (rappelons que toute fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s'écrit de façon unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire), ce qui donne les DSE de ch et sh annoncés.

(iv) On procède comme pour l'exponentielle réelle : en posant $f(x) = e^{ix}$, on a $f^{(k)}(x) = i^k e^{ix}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $k \in \mathbb{N}$, donc d'après la formule de Taylor avec reste intégral :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}, \qquad e^{ix} - \sum_{k=0}^{n} \frac{i^k x^k}{k!} = \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n i^{n+1} e^{it} dt.$$

Puisque $|(x-t)^n i^{n+1} e^{it}| = |x-t|^n$ pour tout réels t, x, on obtient la majoration :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}, \qquad \left| e^{ix} - \sum_{k=0}^{n} \frac{i^k x^k}{k!} \right| \leq \frac{1}{n!} \left| \int_0^x |x-t|^n dt \right|,$$

et en distinguant les cas $x < 0$ et $x \geq 0$, on obtient finalement

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}, \qquad \left| e^{ix} - \sum_{k=0}^{n} \frac{i^k x^k}{k!} \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!},$$

ce qui permet de conclure comme dans la proposition précédente.

(v) et *(iv)* On prend les parties réelle et imaginaire du développement en série entière de e^{ix} précédemment obtenu : pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$i^n = \begin{cases} (-1)^k & \text{si } n = 2k \\ (-1)^k i & \text{si } n = 2k+1 \end{cases},$$

donc

$$\cos(x) = \Re(e^{ix}) = \Re\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n}{n!} x^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\Re\left(\frac{i^n}{n!} x^n\right)}_{=0 \text{ si } n \text{ impair}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k};$$

$$\sin(x) = \Im(e^{ix}) = \Im\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n}{n!} x^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\Im\left(\frac{i^n}{n!} x^n\right)}_{=0 \text{ si } n \text{ pair}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}.$$

Signalons quand même que les applications $\Re$ et $\Im$ (parties réelle et imaginaire) commutent avec la somme infinie car ce sont des applications linéaires continues $\mathbb{C} \to \mathbb{R}$ (la continuité vient du fait que toute application linéaire en dimension finie est continue, voir le CH.07 sur la topologie).

Méthode

Cette démonstration illustre encore une des méthodes existantes pour montrer qu'une fonction f de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0 est développable en série entière. On peut procéder ainsi :

- *Calculer sa série de Taylor* $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$ *(en calculant les dérivées $k^{\text{ième}}$ de f par récurrence). Rappelons que c'est le seul développement en série entière possible.*
- *Montrer que pour x fixé dans un certain intervalle,* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = f(x)$.
  Pour cela, à x fixé, on majore l'écart $\displaystyle\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k \right|$ *par* $\varepsilon_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
  On peut, par exemple, utiliser la **formule de Taylor avec reste intégral**.

ATTENTION !

La subtilité réside dans la seconde étape : on montre que la série de Taylor de f converge bien **vers f**. Il ne suffit pas de montrer qu'elle converge « tout court » : en effet, il y a des **contre-exemples** où la série de Taylor **converge vers autre chose que f** (voir dans les exercices la fonction $f : x \mapsto e^{-\frac{1}{x^2}}$ prolongée en 0 par $f(0) = 0$).

c) Développement en série entière de $(1 + x)^\alpha$

Théorème 36 (DSE de $(1 + x)^\alpha$)
Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Pour tout $x \in]-1; 1[$, on a

$$\begin{aligned}(1+x)^\alpha &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n,\\ &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots\end{aligned}$$

Le rayon de convergence de cette série entière est $R = 1$ si $\alpha \notin \mathbb{N}$ et $R = +\infty$ si $\alpha \in \mathbb{N}$ (dans ce cas, on a simplement la formule du binôme).

Remarque

Le coefficient de ce DSE s'écrit aussi $\displaystyle a_n = \frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}(\alpha - k)$ *pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec la convention habituelle* $\displaystyle a_0 = \prod_{k=0}^{-1}(\alpha - k) = 1$ *(un produit vide vaut 1).*

Preuve

Ici, l'utilisation de la formule de Taylor-Lagrange avec reste intégral est délicate.
On va plutôt utiliser la théorie des équations différentielles : la fonction $f : x \mapsto (1 + x)^\alpha$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1; +\infty[$ et vérifie :

$$\forall x \in]-1; +\infty[, \qquad f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} = \frac{\alpha}{1+x}f(x),$$

ainsi que la condition initiale $f(0) = 1$. C'est donc l'unique solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y' - \frac{\alpha}{1+x}y = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

sur l'intervalle $]-1; +\infty[$ (voir le cours de première année).

Montrons maintenant que la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est solution du même problème de Cauchy (où l'on a posé $a_n = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(\alpha - k)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$).

- Montrons d'abord que $g \in \mathcal{C}^\infty(]-1;1[,\mathbb{R})$:
  - * si $\alpha \in \mathbb{N}^*$, alors $a_n = 0$ dès que $n \geq \alpha + 1$, donc la série $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ converge pour tout réel x (c'est en fait une somme finie). Son rayon de convergence est donc $R = +\infty$.
  - * si $\alpha \in \mathbb{R}^* \setminus \mathbb{N}^*$, alors $a_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \frac{\frac{1}{(n+1)!}\prod_{k=0}^{n}|\alpha - k|}{\frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}|\alpha - k|}|x| = \frac{|\alpha - n|}{n+1}|x| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |x|.$$

    Donc, d'après le critère de d'Alembert, la série $\sum a_n x^n$ est absolument convergente si $|x| < 1$ et grossièrement divergente si $|x| > 1$, ce qui montre que son rayon de convergence est $R = 1$.

  Dans tous les cas, la fonction somme est de classe $\mathcal{C}^\infty$ au moins sur l'intervalle $]-1;1[$.

- Ensuite, par le théorème de dérivation terme à terme des séries entières, on a

$$\forall x \in]-1;1[, \quad g'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1},$$

  donc, en développant :

$$(1+x)g'(x) \quad = \quad \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n.$$

  En faisant un changement d'indice dans la première somme, on obtient

$$\begin{aligned}
(1+x)g'(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n = a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty}((n+1)a_{n+1} + n a_n)x^n \\
&= \alpha + \textstyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n+1}{(n+1)!}\prod_{k=0}^{n}(\alpha - k) + \frac{n}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}(\alpha - k)\right)x^n \\
&= \alpha + \textstyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\prod_{k=0}^{n-1}(\alpha - k)}{n!}\left((\alpha - n) + n\right)x^n \\
&= \alpha(1 + \textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n) = \alpha g(x)
\end{aligned}$$

  Enfin, $g(0) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n 0^n = a_0 = 1$ (produit vide), donc g vérifie le même problème de Cauchy que f sur l'intervalle $]-1;1[$. Vu qu'il y a unicité de la solution, les fonctions f et g coïncident sur $]-1;1[$, ce qui montre l'égalité voulue.

Méthode
Cette démonstration donne encore une nouvelle méthode pour montrer qu'une fonction donnée est développable en série entière : l'écrire comme solution d'une équation différentielle.

3) Exemples de calculs de DSE

Exemple (Développement en série entière d'une fraction rationnelle)
Montrer que la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2 + x - 2}$ est développable en série entière et déterminer son développement.
L'idée est de décomposer la fraction rationnelle en éléments simples : on détermine a, b réels tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2;1\}, \quad f(x) = \frac{1}{x^2 + x - 2} = \frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+2}.$$

En identifiant les numérateurs, cela équivaut à $(a+b)x+(2a-b)=1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire $\begin{cases} a+b=0 \\ 2a-b=1 \end{cases}$. En résolvant ce système, on obtient $(a,b)=\left(\frac{1}{3};-\frac{1}{3}\right)$, d'où

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-2;1\}, \quad f(x)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}\right).$$

On remarque alors que les fonctions $x \mapsto \frac{1}{x-1}$ et $x \mapsto \frac{1}{x+2}$ sont développables en série entière. En effet, on peut se ramener à un développement en série entière de référence :

$$\forall x \in]-1;1[, \quad \frac{1}{x-1}=-\frac{1}{1-x}=-\sum_{n=0}^{+\infty} x^n;$$

$$\forall x \in]-2;2[, \quad \frac{1}{x+2}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{1-\left(-\frac{x}{2}\right)}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{x}{2}\right)^n,$$

(ce deuxième développement en série entière converge car $|x|<2 \implies \left|-\frac{x}{2}\right|=\frac{|x|}{2}<1$).
En prenant **l'intersection** des domaines de validité de ces deux développements en série entière, on a donc

$$\forall x \in]-1;1[, \quad f(x)=\frac{1}{3}\left(-\sum_{n=0}^{+\infty} x^n-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{x}{2}\right)^n\right)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$$

en posant $a_n=\frac{1}{3}\left(-1+\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Cette écriture montre que f est développable en série entière.

Exemple (Développement en série entière d'un polynôme trigonométrique)
Montrer que la fonction $g : x \mapsto \cos(x)\sin^2(x)$ est développable en série entière et déterminer son développement.
Ici, la technique est de linéariser l'expression : à l'aide des formules d'Euler, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x)=-\frac{1}{8}(e^{ix}+e^{-ix})(e^{ix}-e^{-ix})^2=\frac{1}{4}(\cos(x)-\cos(3x))$$

(après développement et simplifications).

On utilise alors le développement en série entière de la fonction cos : $\forall u \in \mathbb{R},\ \cos(u)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n u^{2n}}{(2n)!}$ avec $u=x$ puis $u=3x$. On obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x)=\frac{1}{4}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(3x)^{2n}}{(2n)!}\right)=\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^{2n},$$

en posant $b_n=\frac{(-1)^n}{4\times(2n)!}(1-3^{2n})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Ceci se réécrit : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x)=\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ avec $a_{2n}=b_n$ et $a_{2n+1}=0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui montre que g est développable en série entière.

4) Exemples de calculs de sommes à partir des DSE

À partir de la liste des développements en série entière usuels, **qu'il faut connaître par cœur**, on peut souvent calculer explicitement des sommes de séries entières.

Méthode
Pour calculer une somme de série entière, on peut :

- *transformer la somme à calculer à l'aide d'un changement d'indice ou une factorisation, et se ramener à un développement en série entière connu ;*

- *dériver ou intégrer terme à terme la somme à calculer, et reconnaître ainsi un développement en série entière usuel.*

Exemple
Calculer la somme $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}$ (qui converge pour tout $x \in \mathbb{R}$).

En effectuant un changement d'indice, on a $S(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n!}$.

Ensuite, en multipliant par x, on obtient $xS(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$, et on reconnaît là le développement en série entière (incomplet) de e^x :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad xS(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} - 1 - x = e^x - 1 - x,$$

ce qui donne $S(x) = \frac{e^x - 1 - x}{x}$ pour $x \neq 0$. En outre, on a $S(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{0^n}{(n+1)!} = 0$.

Exemple
Calculer la somme $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^n$ (qui converge pour $x \in]-1;1[$).

On sait déjà (voir précédemment l'exemple qui suit le théorème de dérivation terme à terme) que

$$\forall x \in]-1;1[, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Essayons d'exprimer S en fonction de cette somme. Tout d'abord, en factorisant par x, on a

$$\forall x \in]-1;1[, \quad S(x) = x\left(\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^{n-1}\right) = x\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d}{dx}(nx^n)\right) = x\,\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n\right),$$

d'après le théorème de dérivation terme à terme. On en déduit que

$$\forall x \in]-1;1[, \quad S(x) = x\,\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right) = x\left(\frac{1+x}{(1-x)^3}\right) = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}.$$

IV Fonction exponentielle complexe

Dans le cours de MP2I, on a défini **dans cet ordre** :

— **la fonction logarithme népérien** comme la primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0,+\infty[$ qui s'annule en $x=1$ (*via* le théorème fondamental de l'analyse qui dit que toute fonction continue possède des primitives). On a alors facilement la propriété algébrique fondamentale du logarithme :
$$\forall (x,x') \in]0,+\infty[^2, \qquad \ln(xx') = \ln(x) + \ln(x').$$

— **la fonction exponentielle réelle** $\exp : \mathbb{R} \to]0,+\infty[$, comme la réciproque de la bijection $\ln :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$. Cela permet de montrer que $\exp' = \exp$, que $\exp(0)=1$ et que
$$\forall (x,x') \in \mathbb{R}^2, \qquad e^{x+x'} = e^x \times e^{x'}.$$

— **la fonction exponentielle imaginaire** $x \mapsto e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$, qui va de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Grâce aux formules de trigonométrie $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ et $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$, on montre que
$$\forall (x,x') \in \mathbb{R}^2, \qquad e^{i(x+x')} = e^{ix} \times e^{ix'}.$$

— **la fonction exponentielle complexe** $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ en **posant**, pour tout nombre complexe $z = x+iy$
$$e^z = e^x \times e^{iy} = e^x \times (\cos y + i \sin y).$$
Avec cette définition, la propriété algébrique fondamentale de l'exponentielle se prolonge directement à $\mathbb{C}$:
$$\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2, \qquad e^{z+z'} = e^z \times e^{z'}.$$

Enfin, il se trouve que le développement en série entière de la fonction exponentielle réelle se prolonge également à $\mathbb{C}$.

Théorème 37 (DSE de l'exponentielle complexe)
Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $e^z = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$.

Preuve
Soit $z = x+iy \in \mathbb{C}$.
En effectuant le produit de Cauchy des deux DSE de e^x et e^{iy} (qui convergent absolument), on a :
$$e^z = e^x e^{iy} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n y^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k (iy)^{n-k}}{k!(n-k)!}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (iy)^{n-k}\right).$$
Avec la formule du binôme, on obtient alors :
$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x+iy)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Remarque
Cette construction de la fonction exponentielle complexe à partir des fonctions trigonométriques est un peu bancale (mathématiquement parlant) car les fonctions cos *et* sin *n'ont été définies "que" géométriquement, pas de façon complètement rigoureuse.*
Mais grâce aux séries entières, nous pouvons donner une construction "autonome", qui ne s'appuie pas sur des notions géométriques :

- *on prend la formule $\forall z \in \mathbb{C},\ e^z = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ comme une* **définition** *de la fonction* $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *(et non plus comme une propriété).*
- *on* **définit** *les fonctions* cos *et* sin *comme les parties réelle et imaginaire de e^{it} pour $t \in \mathbb{R}$, donc comme des développements en série entière (du coup, on peut même parler de* $\cos(z)$ *et* $\sin(z)$ *pour $z \in \mathbb{C}$).*
- *on démontre toutes les propriétés de l'exponentielle et des fonctions trigonométriques avec des calculs sur ces DSE (produit de Cauchy notamment pour montrer que $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$).*