

# CH13 : Réduction des endomorphismes - Aspects euclidiens

Dans ce chapitre,  $E$  désigne un **espace euclidien**, c'est-à-dire un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie, muni d'un produit scalaire  $(\cdot|\cdot)$ . On supposera  $E$  non nul.

## I Adjoint d'un endomorphisme

### **Théorème 1 (Représentation des formes linéaires sur un espace euclidien)**

Soit  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  une forme linéaire. Alors il existe un unique vecteur  $a \in E$  tel que

$$\forall x \in E, f(x) = (a|x).$$

### **Théorème 2 (Existence et unicité de l'adjoint d'un endomorphisme)**

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Il existe un unique endomorphisme  $u^* \in \mathcal{L}(E)$  tel que

$$\forall (x, y) \in E^2, (u(x)|y) = (x|u^*(y)).$$

On dit que  $u^*$  est l'**adjoint** de  $u$ .

### **Propriété 3 (Propriétés de l'adjoint)**

Soient  $u, v \in \mathcal{L}(E)$ .

- (i) Pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $(\lambda Id_E)^* = \lambda Id_E$ .
- (ii) L'application  $u \mapsto u^*$  est linéaire de  $\mathcal{L}(E)$  dans  $\mathcal{L}(E)$ .
- (iii)  $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$  ;
- (iv)  $(u^*)^* = u$  ;
- (v) On a  $u \in GL(E) \iff u^* \in GL(E)$  et dans ce cas,  $(u^{-1})^* = (u^*)^{-1}$ .

### **Théorème 4 (Matrice de l'adjoint en base orthonormée)**

Soit  $\mathcal{B}$  une base orthonormée de  $E$ , et soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Alors  $Mat_{\mathcal{B}}(u^*) = Mat_{\mathcal{B}}(u)^{\top}$ .

### **Théorème 5 (Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable)**

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  stable par  $u$ . Alors  $F^{\perp}$  est stable par  $u^*$ .

## II Réduction des isométries vectorielles

### 1) Quelques propriétés supplémentaires des isométries

**Propriété 6 (Caractérisation des isométries avec l'adjoint)**

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Alors  $(u \in \mathcal{O}(E) \iff u \in GL(E) \text{ et } u^* = u^{-1})$ .

**Propriété 7 (Valeurs propres d'une isométrie / d'une matrice orthogonale)**

- (i) Si  $u \in \mathcal{O}(E)$ , alors  $Sp(u) \subset \{-1, 1\}$ .
- (ii) Si  $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ , alors  $Sp_{\mathbb{R}}(A) \subset \{-1, 1\}$ .

### 2) Isométries et sous-espaces stables

**Propriété 8 (Orthogonal d'un sous-espace stable par une isométrie)**

Soit  $F$  un sous-espace vectoriel non nul de  $E$ . Soit  $u \in \mathcal{O}(E)$ . Si  $F$  est stable par  $u$ , alors  $F^\perp$  est également stable par  $u$ . De plus, les endomorphismes induits  $u_F$  et  $u_{F^\perp}$  sont aussi des isométries vectorielles ( $u_F \in \mathcal{O}(F)$  et  $u_{F^\perp} \in \mathcal{O}(F^\perp)$ ).

**Lemme 9 (Existence d'une droite ou un plan stable)**

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -ev non nul de dimension finie, soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Alors, il existe au moins une droite vectorielle ou un plan vectoriel stable par  $u$ .

### 3) Réduction diagonale par blocs

**Théorème 10 (Réduction des isométries en base orthonormée)**

Si  $u \in \mathcal{O}(E)$ , alors il existe une base orthonormée  $\mathcal{B}$  de  $E$  dans laquelle la matrice de  $u$  est diagonale par blocs, avec blocs diagonaux de la forme

$$(1), \quad (-1), \quad R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \theta \neq 0 [\pi].$$

Autrement dit,  $E$  est la somme directe orthogonale de  $E_1(u)$ ,  $E_{-1}(u)$ , et de plans stables sur lesquels  $u$  opère comme une rotation différente de  $\pm Id_E$ .

#### 4) Réduction des isométries positives en dimension 3

On rappelle que  $\mathcal{SO}(E)$  désigne l'ensemble des isométries positives de  $E$ , c'est-à-dire les  $u \in \mathcal{O}(E)$  telles que  $\det(u) = 1$ .

##### **Théorème 11 (Forme réduite d'une isométrie positive en dim 3)**

Soit  $E$  un espace euclidien orienté de dimension 3 et soit  $u \in \mathcal{SO}(E)$ .

(i) Il existe une base orthonormée directe  $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  de  $E$  et un réel  $\theta$  tel que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

(ii) Dans toute base orthonormée directe de  $E$  qui commence par  $\vec{i}$ , la matrice de  $u$  est la même ( $\theta$  est unique à  $2\pi$  près dès que  $\vec{i}$  est construit).

##### **Définition 12 (Rotation dans l'espace)**

Soit  $E$  un espace euclidien orienté de dimension 3, soit un vecteur unitaire  $\vec{i}$ , et soit  $\theta \in \mathbb{R}$ .

Alors, on appelle **rotation d'axe orienté par  $\vec{i}$  et d'angle  $\theta$**  l'unique endomorphisme  $r_{\vec{i}, \theta}$  qui

a pour matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$  dans toute base orthonormée directe de  $E$  commençant par  $\vec{i}$ .

Parmi ces rotations, signalons un cas particulier intéressant :

##### **Définition 13 (Demi-tour)**

Soit  $\mathcal{D}$  une droite vectorielle de  $E$ . On appelle **demi-tour d'axe  $\mathcal{D}$**  (ou "retournement d'axe  $\mathcal{D}$ ") la rotation d'axe  $\mathcal{D}$  et d'angle  $\pi$ .

### III Réduction des endomorphismes auto-adjoints

#### 1) Définition et propriétés

**Définition 14 (Endomorphisme auto-adjoint)**

Un endomorphisme  $u \in \mathcal{L}(E)$  est dit **auto-adjoint** lorsque  $u^* = u$ , c'est-à-dire

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad (u(x)|y) = (x|u(y)).$$

**Propriété 15 (Matrice d'un auto-adjoint en base orthonormée)**

Soit  $\mathcal{B}$  une base orthonormée de  $E$ , et  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

Alors,  $u$  est auto-adjoint si et seulement si  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$  est symétrique.

**Vocabulaire**

Conformément au résultat précédent, les endomorphismes auto-adjoints sont également appelés **endomorphismes symétriques**, mais on évitera cette appellation pour ne pas confondre avec les symétries ( $u \circ u = \text{Id}_E$ )!

**Notation**

On notera  $\mathcal{S}(E)$  l'ensemble des endomorphismes auto-adjoints de  $E$ .

**Propriété 16 (Structure algébrique de  $\mathcal{S}(E)$ )**

L'ensemble  $\mathcal{S}(E)$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{L}(E)$ , isomorphe à  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  (l'espace vectoriel des matrices réelles symétriques), où  $n = \dim(E)$ . En particulier,  $\dim(\mathcal{S}(E)) = \frac{n(n+1)}{2}$ .

**Propriété 17 (Orthogonal d'un sous-espace stable par un auto-adjoint)**

Soit  $F$  un sous-espace vectoriel non nul de  $E$ . Soit  $u \in \mathcal{S}(E)$ . Si  $F$  est stable par  $u$ , alors  $F^\perp$  est également stable par  $u$ . De plus, les endomorphismes induits  $u_F$  et  $u_{F^\perp}$  sont également auto-adjoints ( $u_F \in \mathcal{S}(F)$  et  $u_{F^\perp} \in \mathcal{S}(F^\perp)$ ).

**Propriété 18 (Projecteurs auto-adjoints)**

Parmi les projecteurs de  $E$ , les projecteurs auto-adjoints sont exactement les projecteurs orthogonaux.

#### 2) Réduction des auto-adjoints, théorème spectral

Nous allons montrer la propriété qui caractérise les auto-adjoints : le fait d'être diagonalisable en base orthonormée. La preuve repose sur deux lemmes, ainsi que sur l'existence d'une droite ou d'un plan stable pour un endomorphisme, déjà montrée auparavant.

**Lemme 19 (Existence d'une valeur propre pour un auto-adjoint)**

Si  $u \in \mathcal{S}(E)$ , alors  $u$  possède au moins une valeur propre (réelle).

**Lemme 20 (Sous-espaces propres d'un auto-adjoint)**

Si  $u \in \mathcal{S}(E)$ , alors les sous-espaces propres de  $u$  sont deux à deux orthogonaux.

**Théorème 21 (Théorème spectral)**

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Alors :  $u$  est auto-adjoint si et seulement si  $u$  est diagonalisable en base orthonormée. En d'autres termes :  $u \in \mathcal{S}(E)$  ssi  $E$  est somme directe **orthogonale** des sous-espaces propres de  $u$ .

**Vocabulaire**

On parle dans ce cas d'endomorphisme "orthogonalement diagonalisable".

**Corollaire 22 (Théorème spectral matriciel)**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Alors :  $A$  est symétrique si et seulement si  $A$  est orthogonalement diagonalisable. En d'autres termes :  $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \iff \exists P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  telle que  $P^{-1}AP$  est diagonale.

**Méthode (Pour diagonaliser une matrice symétrique dans une base orthonormée)**

- Calculer une base de chaque sous-espace propre.
- Appliquer le procédé de Gram-Schmidt pour construire une base orthonormée de chaque sous-espace propre.
- Réunir toutes ces bases : on obtient une base orthonormée de  $\mathbb{R}^n$  qui diagonalise la matrice car les sous-espaces propres sont orthogonaux entre eux.

**3) Endomorphismes auto-adjoints positifs, définis positifs****Définition 23 (Endomorphisme auto-adjoint positif, défini positif)**

Soit  $u \in \mathcal{S}(E)$ .

- (i) On dit que  $u$  est **positif** lorsque  $\forall x \in E, (u(x)|x) \geq 0$ .
- (ii) On dit que  $u$  est **défini positif** lorsque  $u$  est positif et  $((u(x)|x) = 0 \implies x = 0_E)$ .

**Notation**

On notera  $\mathcal{S}^+(E)$  (resp.  $\mathcal{S}^{++}(E)$ ) l'ensemble des endomorphismes auto-adjoints positifs (resp. définis positifs) de  $E$ .

On va maintenant étendre cette notion de positivité aux matrices symétriques (qui sont les représentations en base orthonormée des auto-adjoints). Comme d'habitude, on identifie les matrices colonnes aux vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ .

**Définition 24 (Matrice symétrique positive, définie positive)**

Soit  $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  une matrice symétrique.

- (i) On dit que  $A$  est **positive** lorsque  $\forall X \in \mathbb{R}^n, X^\top AX \geq 0$ .
- (ii) On dit que  $A$  est **définie positive** lorsqu'elle est positive et  $(X^\top AX = 0 \implies X = 0)$ .

**Notation**

On notera  $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$  (resp.  $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ ) l'ensemble des matrices symétriques positives (resp. définies positives) de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

**Propriété 25 (Correspondance entre endomorphismes et matrices positifs)**

Soit  $\mathcal{B}$  une base orthonormée de  $E$  et soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . On note  $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ . Alors :

- (i)  $u \in \mathcal{S}^+(E) \iff A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$  ;
- (ii)  $u \in \mathcal{S}^{++}(E) \iff A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ .

**Théorème 26 (Caractérisation spectrale des auto-adjoints positifs et définis positifs)**

Soit  $u \in \mathcal{S}(E)$ . On a les équivalences :

- (i)  $u \in \mathcal{S}^+(E) \iff \text{Sp}(u) \subset \mathbb{R}^+$  ;
- (ii)  $u \in \mathcal{S}^{++}(E) \iff \text{Sp}(u) \subset \mathbb{R}^{+*}$ .

Et de même pour les matrices symétriques :

$$A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \iff \text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}^+, \quad A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \iff \text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}^{+*}.$$