CH13 : Réduction des endomorphismes - Aspects euclidiens

Dans ce chapitre, E désigne un **espace euclidien**, c'est-à-dire un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, muni d'un produit scalaire $(\,.\,|\,.\,)$. On supposera E non nul.

I Adjoint d'un endomorphisme

Théorème 1 (Représentation des formes linéaires sur un espace euclidien)
Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une forme linéaire. Alors il existe un unique vecteur $a \in E$ tel que

$$\forall x \in E,\ f(x) = (a|x).$$

Théorème 2 (Existence et unicité de l'adjoint d'un endomorphisme)
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Il existe un unique endomorphisme $u^* \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$\forall (x,y) \in E^2, \qquad (u(x)|y) = (x|u^*(y)).$$

On dit que u^* est **l'adjoint** *de u.*

Propriété 3 (Propriétés de l'adjoint)
Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$.

(i) Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $(\lambda Id_E)^* = \lambda Id_E$.

(ii) L'application $u \mapsto u^*$ est linéaire de $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathcal{L}(E)$.

(iii) $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$;

(iv) $(u^*)^* = u$;

(v) On a $u \in GL(E) \iff u^* \in GL(E)$ et dans ce cas, $(u^{-1})^* = (u^*)^{-1}$.

Théorème 4 (Matrice de l'adjoint en base orthonormée)
Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E, et soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors $Mat_{\mathcal{B}}(u^*) = Mat_{\mathcal{B}}(u)^\top$.

Théorème 5 (Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable)
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E stable par u. Alors $F^\perp$ est stable par u^*.

II Réduction des isométries vectorielles

1) Quelques propriétés supplémentaires des isométries

Propriété 6 (Caractérisation des isométries avec l'adjoint)
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. *Alors* ($u \in \mathcal{O}(E) \iff u \in GL(E)$ *et* $u^* = u^{-1}$).

Propriété 7 (Valeurs propres d'une isométrie / d'une matrice orthogonale)

(*i*) *Si* $u \in \mathcal{O}(E)$, *alors* $Sp(u) \subset \{-1, 1\}$.

(*ii*) *Si* $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, *alors* $Sp_{\mathbb{R}}(A) \subset \{-1, 1\}$.

2) Isométries et sous-espaces stables

Propriété 8 (Orthogonal d'un sous-espace stable par une isométrie)
Soit F *un sous-espace vectoriel non nul de* E. *Soit* $u \in \mathcal{O}(E)$. *Si* F *est stable par* u, *alors* $F^\perp$ *est également stable par* u. *De plus, les endomorphismes induits* u_F *et* $u_{F^\perp}$ *sont aussi des isométries vectorielles* ($u_F \in \mathcal{O}(F)$ *et* $u_{F^\perp} \in \mathcal{O}(F^\perp)$).

Lemme 9 (Existence d'une droite ou un plan stable)
Soit E *un* $\mathbb{R}$-*ev non nul de dimension finie, soit* $u \in \mathcal{L}(E)$. *Alors, il existe au moins une droite vectorielle ou un plan vectoriel stable par* u.

3) Réduction diagonale par blocs

Théorème 10 (Réduction des isométries en base orthonormée)
Si $u \in \mathcal{O}(E)$, *alors il existe une base orthonormée* $\mathcal{B}$ *de* E *dans laquelle la matrice de* u *est diagonale par blocs, avec blocs diagonaux de la forme*

$$(1), \quad (-1), \quad R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \qquad \theta \neq 0 \; [\pi].$$

Autrement dit, E *est la somme directe orthogonale de* $E_1(u)$, $E_{-1}(u)$, *et de plans stables sur lesquels* u *opère comme une rotation différente de* $\pm Id_E$..

4) Réduction des isométries positives en dimension 3

On rappelle que $\mathcal{SO}(E)$ désigne l'ensemble des isométries positives de E, c'est-à-dire les $u \in \mathcal{O}(E)$ telles que $\det(u) = 1$.

Théorème 11 (Forme réduite d'une isométrie positive en dim 3)
Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3 et soit $u \in \mathcal{SO}(E)$.

(i) *Il existe une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de E et un réel θ tel que*

$$Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

(ii) *Dans* **toute** *base orthonormée directe de E* **qui commence par $\vec{i}$**, *la matrice de u est la même (θ est unique à 2π près dès que $\vec{i}$ est construit).*

Définition 12 (Rotation dans l'espace)
Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3, soit un vecteur unitaire $\vec{i}$, et soit $\theta \in \mathbb{R}$. Alors, on appelle **rotation d'axe orienté par $\vec{i}$ et d'angle θ** *l'unique endomorphisme $r_{\vec{i},\theta}$ qui a pour matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ dans toute base orthonormée directe de E commençant par $\vec{i}$.*

Parmi ces rotations, signalons un cas particulier intéressant :

Définition 13 (Demi-tour)
Soit $\mathcal{D}$ une droite vectorielle de E. On appelle **demi-tour d'axe $\mathcal{D}$** *(ou "retournement d'axe $\mathcal{D}$") la rotation d'axe $\mathcal{D}$ et d'angle π.*

III Réduction des endomorphismes auto-adjoints

1) Définition et propriétés

Définition 14 (Endomorphisme auto-adjoint)
Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit **auto-adjoint** *lorsque $u^* = u$, c'est-à-dire*

$$\forall (x,y) \in E^2, \qquad (u(x)|y) = (x|u(y)).$$

Propriété 15 (Matrice d'un auto-adjoint en base orthonormée)
Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E, et $u \in \mathcal{L}(E)$.
Alors, u est auto-adjoint si et seulement si $Mat_{\mathcal{B}}(u)$ est symétrique.

Vocabulaire
Conformément au résultat précédent, les endomorphismes auto-adjoints sont également appelés **endomorphismes symétriques**, mais on évitera cette appellation pour ne pas confondre avec les symétries ($u \circ u = Id_E$) !

Notation
On notera $\mathcal{S}(E)$ l'ensemble des endomorphismes auto-adjoints de E.

Propriété 16 (Structure algébrique de $\mathcal{S}(E)$)
L'ensemble $\mathcal{S}(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$, isomorphe à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (l'espace vectoriel des matrices réelles symétriques), où $n = \dim(E)$. En particulier, $\dim(\mathcal{S}(E)) = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Propriété 17 (Orthogonal d'un sous-espace stable par un auto-adjoint)
Soit F un sous-espace vectoriel non nul de E. Soit $u \in \mathcal{S}(E)$. Si F est stable par u, alors $F^\perp$ est également stable par u. De plus, les endomorphismes induits u_F et $u_{F^\perp}$ sont également auto-adjoints ($u_F \in \mathcal{S}(F)$ et $u_{F^\perp} \in \mathcal{S}(F^\perp)$).

Propriété 18 (Projecteurs auto-adjoints)
Parmi les projecteurs de E, les projecteurs auto-adjoints sont exactement les projecteurs orthogonaux.

2) Réduction des auto-adjoints, théorème spectral

Nous allons montrer la propriété qui caractérise les auto-adjoints : le fait d'être diagonalisable en base orthonormée. La preuve repose sur deux lemmes, ainsi que sur l'existence d'une droite ou d'un plan stable pour un endomorphisme, déjà montrée auparavant.

Lemme 19 (Existence d'une valeur propre pour un auto-adjoint)
Si $u \in \mathcal{S}(E)$, alors u possède au moins une valeur propre (réelle).

Lemme 20 (Sous-espaces propres d'un auto-adjoint)
Si $u \in \mathcal{S}(E)$, alors les sous-espaces propres de u sont deux à deux orthogonaux.

Théorème 21 (Théorème spectral)
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors : u est auto-adjoint si et seulement si u est diagonalisable en base orthonormée.
En d'autres termes : $u \in \mathcal{S}(E)$ ssi E est somme directe **orthogonale** *des sous-espaces propres de u.*

Vocabulaire
On parle dans ce cas d'endomorphisme "orthogonalement diagonalisable".

Corollaire 22 (Théorème spectral matriciel)
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors : A est symétrique si et seulement si A est orthogonalement diagonalisable.
En d'autres termes : $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \iff \exists P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP$ est diagonale.

Méthode (Pour diagonaliser une matrice symétrique dans une base orthonormée)

- *Calculer une base de chaque sous-espace propre.*
- *Appliquer le procédé de Gram-Schmidt pour construire une base orthonormée de chaque sous-espace propre.*
- *Réunir toutes ces bases : on obtient une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ qui diagonalise la matrice* **car les sous-espaces propres sont orthogonaux entre eux**.

3) Endomorphismes auto-adjoints positifs, définis positifs

Définition 23 (Endomorphisme auto-adjoint positif, défini positif)
Soit $u \in \mathcal{S}(E)$.

(i) *On dit que u est* **positif** *lorsque $\forall x \in E,\ (u(x)|x) \geq 0$.*

(ii) *On dit que u est* **défini positif** *lorsque u est positif et $((u(x)|x) = 0 \implies x = 0_E)$.*

Notation
On notera $\mathcal{S}^+(E)$ (resp. $\mathcal{S}^{++}(E)$) l'ensemble des endomorphismes auto-adjoints positifs (resp. définis positifs) de E.

On va maintenant étendre cette notion de positivité aux matrices symétriques (qui sont les représentations en base orthonormée des auto-adjoints). Comme d'habitude, on identifie les matrices colonnes aux vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

Définition 24 (Matrice symétrique positive, définie positive)
Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique.

(i) *On dit que A est* **positive** *lorsque $\forall X \in \mathbb{R}^n,\ X^\top AX \geq 0$.*

(ii) *On dit que A est* **définie positive** *lorsqu'elle est positive et $(X^\top AX = 0 \implies X = 0)$.*

Notation
On notera $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$) l'ensemble des matrices symétriques positives (resp. définies positives) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Propriété 25 (Correspondance entre endomorphismes et matrices positifs)
Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E et soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On note $A = Mat_{\mathcal{B}}(u)$. Alors :

(i) $u \in \mathcal{S}^+(E) \iff A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$;

(ii) $u \in \mathcal{S}^{++}(E) \iff A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Théorème 26 (Caractérisation spectrale des auto-adjoints positifs et définis positifs)
Soit $u \in \mathcal{S}(E)$. On a les équivalences :

(i) $u \in \mathcal{S}^+(E) \iff Sp(u) \subset \mathbb{R}^+$;

(ii) $u \in \mathcal{S}^{++}(E) \iff Sp(u) \subset \mathbb{R}^{+*}$.

Et de même pour les matrices symétriques :

$$A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \iff Sp(A) \subset \mathbb{R}^+, \qquad A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \iff Sp(A) \subset \mathbb{R}^{+*}.$$