CH13 : Réduction des endomorphismes - Aspects euclidiens

Table des matières

Dans ce chapitre, E désigne un **espace euclidien**, c'est-à-dire un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, muni d'un produit scalaire $(\,.\,|\,.\,)$. On supposera E non nul.

I Adjoint d'un endomorphisme

Théorème 1 (Représentation des formes linéaires sur un espace euclidien)
Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une forme linéaire. Alors il existe un unique vecteur $a \in E$ tel que

$$\forall x \in E,\ f(x) = (a|x).$$

Preuve
L'application $\Psi : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathcal{L}(E, \mathbb{R}) \\ a & \longmapsto & (\,a\,|\,.\,) = (x \mapsto (a|x)) \end{array} \right.$ est linéaire et injective (si $a \in Ker(\Psi)$, alors $(a|x) = 0$ pour tout $x \in E$, donc en particulier $(a|a) = 0$, ce qui implique $a = 0_E$), et $\dim(E) = \dim(\mathcal{L}(E, \mathbb{R}))$, donc c'est un isomorphisme. Ainsi, pour tout $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$, il existe un unique $a \in E$ tel que $\Psi(a) = f$.

Remarque
En particulier, on a :

- $(\forall x \in E,\ (a|x) = (b|x)) \implies a = b$.
- $(\forall x \in E,\ (a|x) = 0) \implies a = 0_E$ *(un vecteur orthogonal à tout l'espace E est nul).*

Théorème 2 (Existence et unicité de l'adjoint d'un endomorphisme)
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Il existe un unique endomorphisme $u^* \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$\forall (x, y) \in E^2, \qquad (u(x)|y) = (x|u^*(y)).$$

On dit que u^* est **l'adjoint** *de u.*

Preuve
Soit $y \in E$. On considère la forme linéaire $f_y : x \mapsto (u(x)|y)$. D'après le théorème de représentation, il existe un unique vecteur de E noté $u^*(y)$ tel que

$$\forall x \in E, \qquad (u(x)|y) = (u^*(y)|x) = (x|u^*(y)).$$

Cela définit une application $u^* : E \to E$. Reste à montrer qu'elle est linéaire. Etant donnés $(y_1, y_2, \lambda) \in E^2 \times \mathbb{K}$, on a par définition de u^* :

$$\forall x \in E, \qquad (x|u^*(\lambda y_1 + y_2)) = (u(x)|\lambda y_1 + y_2) = \lambda(u(x)|y_1) + (u(x)|y_2) = \lambda(x|u^*(y_1)) + (x|u^*(y_2)),$$

c'est-à-dire

$$\forall x \in E, \qquad (x|u^*(\lambda y_1 + y_2) - \lambda u^*(y_1) - u^*(y_2)) = 0,$$

et donc $u^*(\lambda y_1 + y_2) - \lambda u^*(y_1) - u^*(y_2) = 0_E$, ce qui montre bien que $u^* \in \mathcal{L}(E)$.

Propriété 3 (Propriétés de l'adjoint)
Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$.

(*i*) *Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $(\lambda Id_E)^* = \lambda Id_E$.*

(*ii*) *L'application $u \mapsto u^*$ est linéaire de $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathcal{L}(E)$.*

(*iii*) $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$;

(*iv*) $(u^*)^* = u$;

(*v*) *On a $u \in GL(E) \iff u^* \in GL(E)$ et dans ce cas, $(u^{-1})^* = (u^*)^{-1}$.*

Preuve

(i) Pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $(x,y) \in E^2$, on a :

$$(\lambda Id_E(x)|y) = \lambda(x|y) = (x|(\lambda Id_E)(y)),$$

donc par définition et unicité de l'adjoint, on en déduit $(\lambda Id_E)^* = \lambda Id_E$.

(ii) Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Pour tout $(x,y) \in E^2$, on a

$$((\lambda u + v)(x)|y) = \lambda(u(x)|y) + (v(x)|y) = \lambda(x|u^*(y)) + (x|v^*(y)) = (x|(\lambda u^* + v^*)(y)),$$

donc par définition et unicité de l'adjoint, on en déduit $(\lambda u + v)^* = \lambda u^* + v^*$.

(iii) Pour tout $(x,y) \in E^2$, on a, par définition de u^* et v^* :

$$((u \circ v)(x)|y) = (u(v(x))|y) = (v(x)|u^*(y)) = (x|v^*(u^*(y)) = (x|(v^* \circ u^*)(y)),$$

donc par définition et unicité de l'adjoint, $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$.

(iv) Résulte de l'égalité :

$$\forall (x,y) \in E^2, \qquad (x|(u^*)^*(y)) = (u^*(x)|y) = (x|u(y)).$$

(v) Si $u \in GL(E)$, alors $u \circ u^{-1} = u^{-1} \circ u = Id_E$, donc en passant aux adjoints, on obtient par (ii) :

$$(u^{-1})^* \circ u^* = u^* \circ (u^{-1})^* = Id_E^* = Id_E,$$

donc $u^* \in GL(E)$ et $(u^*)^{-1} = (u^{-1})^*$.
Enfin, si $u^* \in GL(E)$, alors par ce qui précède, $(u^*)^* \in GL(E)$, c'est-à-dire $u \in GL(E)$.

Théorème 4 (Matrice de l'adjoint en base orthonormée)
Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E, et soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors $Mat_{\mathcal{B}}(u^*) = Mat_{\mathcal{B}}(u)^\top$.

Preuve
Notons $A = Mat_{\mathcal{B}}(u)$ et $A^* = Mat_{\mathcal{B}}(u^*)$. Puisque $\mathcal{B}$ est orthonormée, on a pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$:

$$A[i,j] = (u(e_j)|e_i) = (e_j|u^*(e_i)) = (u^*(e_i)|e_j) = A^*[j,i],$$

donc $A^* = A^\top$.

Théorème 5 (Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable)
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E stable par u. Alors $F^\perp$ est stable par u^*.

Preuve
Soit $x \in F^\perp$, montrons que $u^*(x) \in F^\perp$. Pour tout $y \in F$, on a

$$(u^*(x)|y) = (x|u(y)) = 0,$$

car $x \in F^\perp$ et $u(y) \in u(F) \subset F$.

II Réduction des isométries vectorielles

Rappel
Une isométrie vectorielle est un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ qui conserve la norme (i.e. $\forall x \in E,\ \|u(x)\| = \|x\|$), ou de façon équivalente, qui conserve le produit scalaire (i.e. $\forall (x, y) \in E^2,\ (u(x)|u(y)) = (x|y)$).
Les isométries vectorielles sont exactement les endomorphismes dont les matrices dans des bases orthonormées sont orthogonales (i.e. $A^\top A = I_n$, ou de façon équivalente, les colonnes de A forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ pour le produit scalaire canonique).
$\mathcal{O}(E)$ désigne l'ensemble des isométries vectorielles de E. C'est un sous-groupe de $(GL(E), \circ)$, appelé groupe orthogonal de E.
De même, $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. C'est un sous-groupe de $(GL_n(\mathbb{R}), \times)$.

1) Quelques propriétés supplémentaires des isométries

Propriété 6 (Caractérisation des isométries avec l'adjoint)
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors ($u \in \mathcal{O}(E) \iff u \in GL(E)$ et $u^* = u^{-1}$).

Preuve (1)
Résulte des équivalences :

$$u \in \mathcal{O}(E) \iff \forall (x, y) \in E^2,\ (u(x)|u(y)) = (x|y) \iff \forall (x, y) \in E^2,\ (x|u^*(u(y))) = (x|y)$$

$$\iff \forall y \in E,\ u^*(u(y)) = y \iff u^* \circ u = Id_E,$$

et du fait que si E est de dimension finie, tout endomorphisme inversible à gauche est inversible à droite.

Preuve (2)
Fixons une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E. En notant $A = Mat_{\mathcal{B}}(u)$, on a

$$u \in \mathcal{O}(E) \iff A^\top A = I_n \iff u^* \circ u = Id_E,$$

puisque $A^\top = Mat_{\mathcal{B}}(u^*)$.

Propriété 7 (Valeurs propres d'une isométrie / d'une matrice orthogonale)
(i) *Si $u \in \mathcal{O}(E)$, alors $Sp(u) \subset \{-1, 1\}$.*
(ii) *Si $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, alors $Sp_{\mathbb{R}}(A) \subset \{-1, 1\}$.*

ATTENTION !

- Puisque E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$), on parle bien de valeurs propres **réelles** pour une isométrie vectorielle $u \in \mathcal{O}(E)$.
- En revanche, une matrice $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ peut posséder des valeurs propres complexes, **si on la considère comme une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.**

Preuve

(i) Etant donnée une valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$ de u, considérons $x \neq 0_E$ un vecteur propre associé. On a
$$\|u(x)\| = \|\lambda x\| = |\lambda| \times \|x\|,$$
mais aussi $\|u(x)\| = \|x\|$ (puisque u conserve la norme). Donc $|\lambda| \times \|x\| = \|x\|$, ce qui entraîne $|\lambda| = 1$ puisque $\|x\| \neq 0$. Donc $\lambda = \pm 1$.

(ii) Soit $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ l'endomorphisme canoniquement associé à A. Vu que $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et que la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est orthonormée pour le produit scalaire canonique, on en déduit que $u \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$. On utilise alors le point (i) : $Sp_{\mathbb{R}}(A) = Sp(u) \subset \{-1; 1\}$.

ATTENTION !

La réciproque de la proposition est fausse :

Par exemple, l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas une isométrie vectorielle mais $Sp(u) = \{1\}$.

En effet, le polynôme caractéristique de u est $\chi_u(X) = (X-1)^2$, mais en notant $\overrightarrow{i} = (1;0)$:

$$\|u(\overrightarrow{i})\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{2} \neq \|\overrightarrow{i}\| = 1,$$

donc $u \notin \mathcal{O}(\mathbb{R}^2)$.

Remarque

Si $u \in \mathcal{O}(E)$, on a donc $Sp(u) = \emptyset$ ou $Sp(u) = \{1\}$ ou $Sp(u) = \{-1\}$ ou $Sp(u) = \{-1, 1\}$.
En particulier, une isométrie vectorielle peut ne posséder aucune valeur propre réelle.

2) Isométries et sous-espaces stables

Propriété 8 (Orthogonal d'un sous-espace stable par une isométrie)
Soit F un sous-espace vectoriel non nul de E. Soit $u \in \mathcal{O}(E)$. Si F est stable par u, alors $F^\perp$ est également stable par u. De plus, les endomorphismes induits u_F et $u_{F^\perp}$ sont aussi des isométries vectorielles ($u_F \in \mathcal{O}(F)$ et $u_{F^\perp} \in \mathcal{O}(F^\perp)$).

Preuve

Par hypothèse, $u(F) \subset F$ donc d'après le théorème 5, $u^*(F^\perp) \subset F^\perp$.
Mais $u^* = u^{-1}$, donc $u^{-1}(F^\perp) \subset F^\perp$, mais u^{-1} étant un isomorphisme, on a $\dim(u^{-1}(F^\perp)) = \dim(F^\perp)$, d'où l'égalité $u^{-1}(F^\perp) = F^\perp$, puis $u(F^\perp) = F^\perp$, toujours par bijectivité de u.
Enfin, les endomorphismes induits u_F et $u_{F^\perp}$ conservent la norme, puisque u le fait déjà.

Lemme 9 (Existence d'une droite ou un plan stable)
Soit E un $\mathbb{R}$-ev non nul de dimension finie, soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors, il existe au moins une droite vectorielle ou un plan vectoriel stable par u.

Remarque

C'est vrai pour tout endomorphisme, pas seulement pour une isométrie. D'ailleurs, on réutilisera ce lemme pour la réduction des endomorphismes auto-adjoints, dans la dernière partie.

Preuve

Considérer un polynôme annulateur unitaire de u, décomposé en facteurs irréductibles unitaires de $\mathbb{R}[X]$:

$$P = P_1 \cdots P_m.$$

Puisque $P(u) = 0$, au moins un des $P_i(u)$ n'est pas injectif, et $\deg(P_i) = 1$ ou 2.
Si $\deg(P_i) = 1$, alors $P_i(u) = u - \lambda Id$ non injectif, donc λ est valeur propre de u, donc tout vecteur propre associé engendre une droite stable.
Si $\deg(P_i) = 2$, alors $P_i(u) = u^2 + \alpha u + \beta Id$, avec discriminant négatif, et on montre facilement que pour tout $x \in Ker(P_i(u))$ non nul, le sev $Vect(x, u(x))$ est stable par u, et c'est un plan ou une droite.

3) Réduction diagonale par blocs

Théorème 10 (Réduction des isométries en base orthonormée)
Si $u \in \mathcal{O}(E)$, alors il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs, avec blocs diagonaux de la forme

$$(1), \quad (-1), \quad R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \qquad \theta \neq 0 \ [\pi].$$

Autrement dit, E est la somme directe orthogonale de $E_1(u)$, $E_{-1}(u)$, et de plans stables sur lesquels u opère comme une rotation différente de $\pm Id_E$..

Preuve
Récurrence forte sur $n = \dim(E)$.

- Si $n = 1$, alors $\mathcal{O}(E) = \{\pm Id_E\}$, donc le résultat est évident.
- Si $n = 2$: d'après la classification des isométries planes (étudiée au CH.6), on a deux cas :
  - * si $u \in \mathcal{SO}(E)$ (isométrie avec $\det(u) = 1$), alors u est une rotation plane, donc sa matrice dans toute base orthonormée de E est de la forme R_θ avec $\theta \neq 0$ $[\pi]$ ou bien $\pm I_2$.
  - * si $u \in \mathcal{O}^-(E)$ (isométrie avec $\det(u) = -1$), alors u est une réflexion plane, donc sa matrice dans toute base adaptée à $E = E_1(u) \underset{\perp}{\oplus} E_{-1}(u)$ est $diag(1, -1)$.
- Hérédité : étant donné $u \in \mathcal{O}(E)$, avec $\dim(E) = n \geq 3$, on sait que u possède une droite ou un plan stable (cf. lemme. 9) que l'on notera F, et $F^\perp$ est également stable par u (cf. prop. 8), donc l'induit $u_F \in \mathcal{O}(F)$ peut se représenter en base orthonormée par une matrice de la forme voulue (d'après les deux cas initiaux, puisque $\dim(F) \leq 2$), et $u_{F^\perp}$ également par hypothèse de récurrence (puisque $\dim(F^\perp) = n - \dim(F) \leq n - 1$). En concaténant deux bases orthonormées adéquates de F et $F^\perp$, on obtient donc une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u est de la forme voulue.

Remarque
Quitte à permuter les vecteurs de la base orthonormée de réduction, on peut obtenir une matrice du type :

$$Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \boxed{I_{r_1}} & & & & \\ & \boxed{-I_{r_2}} & & (0) & \\ & & \boxed{R_{\theta_1}} & & \\ & (0) & & \ddots & \\ & & & & \boxed{R_{\theta_{r_3}}} \end{pmatrix},$$

où $(r_1, r_2, r_3) \in \mathbb{N}^3$ *tels que* $r_1 + r_2 + 2r_3 = n = \dim(E)$, *et* $(\theta_1, \cdots, \theta_{r_3}) \in]-\pi, \pi[\setminus\{0\}^{r_3}$.

<u>ATTENTION !</u>
En général, une isométrie n'est pas trigonalisable ! Dès qu'il y a un bloc de rotation différent de $\pm I_2$ dans la forme réduite précédente, χ_u n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$.

4) Réduction des isométries positives en dimension 3

On rappelle que $\mathcal{SO}(E)$ désigne l'ensemble des isométries positives de E, c'est-à-dire les $u \in \mathcal{O}(E)$ telles que $\det(u) = 1$.

Théorème 11 (Forme réduite d'une isométrie positive en dim 3)
Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3 et soit $u \in \mathcal{SO}(E)$.

(i) Il existe une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de E et un réel θ tel que

$$Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

(ii) Dans **toute** *base orthonormée directe de E* **qui commence par $\vec{i}$**, *la matrice de u est la même (θ est unique à 2π près dès que $\vec{i}$ est construit).*

Preuve
Par hypothèse, u est une isométrie vectorielle telle que $\det(u) = 1$.

(i)
- Commençons par montrer que 1 est valeur propre de u :
  Le polynôme caractéristique $\chi_u(X) = \det(XId_E - u)$ est un polynôme à coefficients réels dont le terme de plus haut degré est X^3. La fonction $x \mapsto \chi_u(x)$ est continue, tend vers $+\infty$ en $+\infty$, et vérifie $\chi_u(0) = \det(-u) = (-1)^3 \det(u) = (-1) \times 1 = -1 < 0$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\lambda > 0$ tel que $\chi_u(\lambda) = 0$. Or, on a déjà vu que les seules valeurs propres réelles possibles pour une isométrie vectorielle sont -1 et 1, donc $\lambda = 1$. Ceci montre que $\chi_u(1) = 0$, donc 1 est valeur propre de u.
- Contruisons maintenant une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de E dans laquelle u a la matrice voulue.
  On choisit pour $\vec{i}$ un vecteur propre de u associé à 1, de norme 1 (il suffit de choisir un vecteur propre et de le diviser par sa norme) : on a donc $u(\vec{i}) = \vec{i}$ avec $\|\vec{i}\| = 1$.
  On note $\mathcal{D} = Vect(\vec{i})$. Puisque $\vec{i}$ est un vecteur propre, la droite $\mathcal{D}$ est stable par u. On complète $\vec{i}$ en une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de E. Ainsi, la famille $(\vec{j}, \vec{k})$ est une base orthonormée du plan $\mathcal{P} = \mathcal{D}^{\perp}$. Puisque $u \in \mathcal{O}(E)$ et $\mathcal{D}$ est stable par f, on en déduit que le plan $\mathcal{P}$ est également stable par u. L'endomorphisme induit $v = u_{\mathcal{P}}$ est donc un élément de $\mathcal{O}(\mathcal{P})$, et la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ a une forme par blocs :
  $$Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix},$$
  où $A = Mat_{(\vec{j}, \vec{k})}(v) \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$.
  Mais $\det(u) = 1$, donc $1 = \det(Mat_{\mathcal{B}}(u)) = 1 \times \det(A)$, ce qui montre que $A \in \mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$, et donc qu'il existe un réel θ tel que
  $$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$
  Ceci montre (i).

(ii) Soit $\mathcal{B}' = (\vec{i}, \vec{j}', \vec{k}')$ une autre base orthonormée directe de E. La famille $(\vec{j}', \vec{k}')$ est une base orthonormée de $\mathcal{P} = Vect(\vec{i})^{\perp}$, comme $(\vec{j}, \vec{k})$, donc la matrice de u dans la base $\mathcal{B}'$ est aussi de la forme :
$$Mat_{\mathcal{B}'}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A' \end{pmatrix},$$
où $A' = Mat_{(\vec{j}', \vec{k}')}(v) \in \mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$ (rappelons que $v = u_{\mathcal{P}} \in \mathcal{SO}(\mathcal{P})$).
Montrons que $A' = A$.

On a $A' = P^{-1}AP$, où $P = Mat_{(\vec{j},\vec{k})}(\vec{j}\,', \vec{k}\,')$. Or, $(\vec{j}, \vec{k})$ et $(\vec{j}\,', \vec{k}\,')$ sont deux bases orthonormées de $\mathcal{P}$ de même orientation, car

$$\det_{(\vec{j},\vec{k})}(\vec{j}\,', \vec{k}\,') = \det(P) = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} = \det_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}(\vec{i}, \vec{j}\,', \vec{k}\,') = 1,$$

(puisque $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et $(\vec{i}, \vec{j}\,', \vec{k}\,')$ sont deux bases orthonormées directes de E). On en déduit que P est dans $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$, ainsi que A et P^{-1}, donc puisque $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$ est commutatif, il en résulte $A' = P^{-1}AP = P^{-1}PA = A$.

Rappel

Dans un espace euclidien E, une droite $\mathcal{D}$ contient exactement deux vecteurs unitaires $\vec{i}$ et $-\vec{i}$. Il y a donc exactement **deux** façons d'orienter une droite. On appelle **axe** toute droite orientée.

Définition 12 (Rotation dans l'espace)

Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3, soit un vecteur unitaire $\vec{i}$, et soit $\theta \in \mathbb{R}$. Alors, on appelle **rotation d'axe orienté par $\vec{i}$ et d'angle θ** *l'unique endomorphisme $r_{\vec{i},\theta}$ qui a pour matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ dans toute base orthonormée directe de E commençant par $\vec{i}$.*

Dessin

Remarque

- *En dimension 3, les rotations sont exactement les éléments de $\mathcal{SO}(E)$ (d'après le théorème précédent).*
- *Le spectre complexe de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ est $\{1, e^{i\theta}, e^{-i\theta}\}$.*
  Ce spectre est réel si et seulement si $\theta \equiv 0\ [\pi]$.
- *L'axe d'une rotation différente de Id_E est la droite $Ker(u - Id_E)$ (les vecteurs invariants par u). L'identité est un cas particulier de rotation vectorielle : toute droite orientée joue le rôle d'axe et l'angle est $\theta = 0$.*
- *Le fait d'orienter l'axe de rotation (en choisissant $\vec{i}$) donne un "sens trigonométrique" sur le plan $\mathcal{P} = Vect(\vec{i})^{\perp}$, ce qui permet de mesurer l'angle de rotation. Ce réel θ est unique à 2π près.*
- *Si on change l'orientation de l'axe, θ devient $-\theta$.*

Parmi ces rotations, signalons un cas particulier intéressant :

Définition 13 (Demi-tour)

Soit $\mathcal{D}$ une droite vectorielle de E. On appelle **demi-tour d'axe $\mathcal{D}$** *(ou "retournement d'axe $\mathcal{D}$") la rotation d'axe $\mathcal{D}$ et d'angle π.*

Remarque

Quelle que soit l'orientation choisie de la droite $\mathcal{D}$, le demi-tour d'axe $\mathcal{D}$ sera toujours une rotation d'angle π (car $-\pi \equiv \pi\ [2\pi]$).

ATTENTION !

Un demi-tour est **à la fois** une rotation et une symétrie orthogonale (par rapport à une droite), mais ce n'est pas une réflexion (qui elle est une symétrie orthogonale par rapport à un plan) !

Exemple
Montrer que l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice A suivante est une rotation de $\mathbb{R}^3$, et déterminer ses éléments caractéristiques (axe et angle) :

$$A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 3 & 2 & 6 \\ 6 & -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Notons $u \in \mathbb{R}^3$ l'endomorphisme canoniquement associé à A. On vérifie facilement que $A \in \mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$, donc u est une rotation (différente de $Id_{\mathbb{R}^3}$, sinon on aurait $A = I_3$).
Son axe est la droite $Ker(A - I_3) = Vect(3, 3, 1)$. Orientons-le (par exemple) par le vecteur unitaire $\overrightarrow{i} = \frac{1}{\sqrt{19}}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Reste à déterminer l'angle $\theta \in]-\pi, \pi[$.
Le plus simple est de considérer une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. Dans une telle base, la matrice de la rotation u est

$$R = Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Déjà, A et R sont semblables, donc $tr(R) = tr(A)$, ce qui donne

$$1 + 2\cos\theta = \frac{2}{7},$$

donc

$$\cos\theta = -\frac{5}{14}.$$

Ensuite, la deuxième colonne de R donne :

$$u(\overrightarrow{j}) = (\cos\theta)\overrightarrow{j} + (\sin\theta)\overrightarrow{k},$$

donc en utilisant le produit vectoriel et le fait que la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ soit orthonormée directe, on obtient :

$$\overrightarrow{j} \wedge u(\overrightarrow{j}) = (\sin\theta)\overrightarrow{i}$$

Reste à calculer ce produit vectoriel : par exemple, le vecteur $\overrightarrow{j} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est unitaire et orthogonal à $\overrightarrow{i}$, donc il convient. Avec ce choix, on a :

$$u(\overrightarrow{j}) = \frac{1}{\sqrt{2}}A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{7\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix},$$

donc

$$\overrightarrow{j} \wedge u(\overrightarrow{j}) = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} -9 \\ -9 \\ -3 \end{pmatrix}$$

donc finalement :

$$\sin\theta < 0,$$

ce qui permet de déduire : $\theta = -\arccos(-\frac{5}{14})$.

III Réduction des endomorphismes auto-adjoints

1) Définition et propriétés

Définition 14 (Endomorphisme auto-adjoint)
Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit **auto-adjoint** *lorsque $u^* = u$, c'est-à-dire*

$$\forall (x,y) \in E^2, \qquad (u(x)|y) = (x|u(y)).$$

Propriété 15 (Matrice d'un auto-adjoint en base orthonormée)
Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E, et $u \in \mathcal{L}(E)$.
Alors, u est auto-adjoint si et seulement si $Mat_{\mathcal{B}}(u)$ est symétrique.

Preuve
Notons $A = Mat_{\mathcal{B}}(u)$. D'après le théorème 4, on a $Mat_{\mathcal{B}}(u^*) = A^\top$, donc

$$u = u^* \iff A = A^\top.$$

Vocabulaire
Conformément au résultat précédent, les endomorphismes auto-adjoints sont également appelés **endomorphismes symétriques**, mais on évitera cette appellation pour ne pas confondre avec les symétries ($u \circ u = Id_E$) !

Notation
On notera $\mathcal{S}(E)$ l'ensemble des endomorphismes auto-adjoints de E.

Propriété 16 (Structure algébrique de $\mathcal{S}(E)$)
L'ensemble $\mathcal{S}(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$, isomorphe à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (l'espace vectoriel des matrices réelles symétriques), où $n = \dim(E)$. En particulier, $\dim(\mathcal{S}(E)) = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Preuve
Fixons une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E. On a un isomorphisme d'espaces vectoriels :

$$\Psi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ u & \longmapsto & Mat_{\mathcal{B}}(u) \end{array} \right. .$$

D'après la proposition précédente, on a

$$\mathcal{S}(E) = \Psi^{-1}(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})),$$

donc, puisque $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est un sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $n(n+1)/2$, on en déduit que $\mathcal{S}(E)$ est un sev de $\mathcal{L}(E)$ de même dimension.

Propriété 17 (Orthogonal d'un sous-espace stable par un auto-adjoint)
Soit F un sous-espace vectoriel non nul de E. Soit $u \in \mathcal{S}(E)$. Si F est stable par u, alors $F^\perp$ est également stable par u. De plus, les endomorphismes induits u_F et $u_{F^\perp}$ sont également auto-adjoints ($u_F \in \mathcal{S}(F)$ et $u_{F^\perp} \in \mathcal{S}(F^\perp)$).

Preuve
On utilise le théorème 5 : puisque $u(F) \subset F$, on a $u^*(F^\perp) \subset F^\perp$. Mais $u^* = u$ donc $u(F^\perp) \subset F^\perp$. De plus, l'induit u_F vérifie

$$\forall (x,y) \in F^2, \qquad (u_F(x)|y) = (u(x)|y) = (x|u(y)) = (x|u_F(y)),$$

donc $u_F \in \mathcal{S}(F)$, et de même, $u_{F^\perp} \in \mathcal{S}(F^\perp)$.

Propriété 18 (Projecteurs auto-adjoints)
Parmi les projecteurs de E, les projecteurs auto-adjoints sont exactement les projecteurs orthogonaux.

Preuve
Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur. Notons $F = Im(p) = Ker(p - Id_E)$ et $G = Ker(p)$. On a $E = F \oplus G$, avec F, G stables par p et $u_F = Id_F$, $u_G = 0$. En outre :

$$p^* = p \iff \forall (x, y) \in E^2,\ (p(x)|y) = (x|p(y))$$

En particulier, avec $x \in F$ et $y \in G$, cela donne

$$p^* = p \implies \forall (x, y) \in F \times G,\ (x|y) = (x|0) = 0 \implies F \perp G.$$

Réciproquement, si $F \perp G$, alors il existe une base $\mathcal{B}$ orthonormée de E adaptée à $E = F \underset{\perp}{\oplus} G$, dans laquelle $Mat_{\mathcal{B}}(p)$ est diagonale, donc symétrique, ce qui montre que $p^* = p$ (d'après la prop. 15).

Remarque

- *On peut également montrer que parmi les symétries de E, les symétries auto-adjointes sont exactement les symétries orthogonales : en effet, si s est une symétrie, alors en notant cette fois $F = Ker(s - Id)$ et $G = Ker(s + Id)$, on a $E = F \oplus G$, $s_F = Id_F$, $s_G = -Id_G$, et la démonstration précédente fonctionne à l'identique.*
- *Les projecteurs orthogonaux et les symétries orthogonales sont des endomorphismes auto-adjoints qui sont donc* **diagonalisables en base orthonormée**. *On va voir maintenant qu'en fait, cette propriété caractérise les auto-adjoints.*

2) Réduction des auto-adjoints, théorème spectral

Nous allons montrer la propriété qui caractérise les auto-adjoints : le fait d'être diagonalisable en base orthonormée. La preuve repose sur deux lemmes, ainsi que sur l'existence d'une droite ou d'un plan stable pour un endomorphisme, déjà montrée auparavant.

Lemme 19 (Existence d'une valeur propre pour un auto-adjoint)
Si $u \in \mathcal{S}(E)$, alors u possède au moins une valeur propre (réelle).

Remarque
On parle bien ici de valeur propre **réelle** *puisque E est un espace euclidien, donc un $\mathbb{R}$-espace vectoriel par définition. Une valeur propre d'un endomorphisme $u : E \to E$ est par définition dans le corps $\mathbb{K}$ de la structure d'espace vectoriel de E, donc $\mathbb{R}$ ici.*

Preuve

- Si $\dim(E) = 1$, alors le résultat est évident, puisque u est une homothétie.
- Si $\dim(E) = 2$, alors dans une quelconque base orthonormée de E, la matrice de u est réelle symétrique, donc de la forme

  $$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}, \qquad (a, b, c) \in \mathbb{R}^3.$$

  On en déduit $\chi_u(X) = X^2 - (a + c)X + (ac - b^2)$, et le discriminant de ce polynôme est

  $$\Delta = (a - c)^2 + 4b^2 \geq 0,$$

  donc χ_u possède au moins une racine réelle, ce qu'il fallait montrer.
- Enfin, si $\dim(E) > 2$, on sait (cf. lemme 9) que u possède une droite ou un plan stable, noté F. L'endomorphisme induit u_F est auto-adjoint et puisque $\dim(F) \leq 2$, u_F possède au moins une valeur propre (réelle) d'après les deux cas précédents, qui est aussi une valeur propre de u.

Lemme 20 (Sous-espaces propres d'un auto-adjoint)
Si $u \in \mathcal{S}(E)$, alors les sous-espaces propres de u sont deux à deux orthogonaux.

Preuve
Soit $\lambda \neq \mu$ deux valeurs propres (réelles) distinctes de u, montrons que $E_\lambda(u) \perp E_\mu(u)$. Etant donnés $(x, y) \in E_\lambda(u) \times E_\mu(u)$, on a $u(x) = \lambda x$, $u(y) = \mu y$ donc, puisque $u^* = u$:

$$\lambda(x|y) = (\lambda x|y) = (u(x)|y) = (x|u(y)) = (x|\mu y) = \mu(x|y),$$

donc $(x|y) = 0$ (puisque $\lambda \neq \mu$).

Théorème 21 (Théorème spectral)
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors : u est auto-adjoint si et seulement si u est diagonalisable en base orthonormée. En d'autres termes : $u \in \mathcal{S}(E)$ ssi E est somme directe **orthogonale** *des sous-espaces propres de u.*

Vocabulaire
On parle dans ce cas d'endomorphisme "orthogonalement diagonalisable".

Preuve

$\boxed{\Longrightarrow}$ Soit $u \in \mathcal{S}(E)$. D'après les deux lemmes précédents, $Sp(u) \neq \emptyset$ et les sous-espaces propres de u sont deux à deux orthogonaux. Considérons le sev

$$F = \overset{\perp}{\bigoplus_{\lambda \in Sp(u)}} E_\lambda(u).$$

Ce sev est stable par u (puisque chaque sous-espace propre l'est), donc puisque u est auto-adjoint, le sev $F^\perp$ est également stable par u.
Si $F^\perp \neq \{0_E\}$, alors l'endomorphisme induit $u_{F^\perp}$ est auto-adjoint, donc il possède au moins une valeur propre (cf. lemme 19), donc un vecteur propre $x \in F^\perp$, qui est aussi un vecteur propre de u. Mais les vecteurs propres de u se trouvent dans F (par sa définition), donc $x \in F^\perp \cap F = \{0_E\}$, ce qui est contradictoire (un vecteur propre est non nul). Donc finalement, $F^\perp = \{0_E\}$, c'est-à-dire $F = E$.
On a montré que $E = \overset{\perp}{\bigoplus_{\lambda \in Sp(u)}} E_\lambda(u)$. En concaténant des bases orthonormées de chaque sous-espace propre $E_\lambda(u)$, on obtient (puisque les $E_\lambda(u)$ sont deux à deux orthogonaux), une base orthonormée de E qui diagonalise u (puisqu'elle est formée de vecteurs propres de u).

$\boxed{\Longleftarrow}$ Si u est diagonalisable en base orthonormée, alors il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u est diagonale, donc symétrique, et cela entraîne que u est auto-adjoint.

Corollaire 22 (Théorème spectral matriciel)
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors : A est symétrique si et seulement si A est orthogonalement diagonalisable. En d'autres termes : $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \iff \exists P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP$ est diagonale.

Remarque

- *En particulier, toute matrice réelle symétrique est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*
- *Bien sûr, une matrice réelle non symétrique peut quand même être diagonalisable. Mais pas en base orthonormée !*
- *Diagonaliser une matrice A en base orthonormée revient à trouver une matrice de passage P* **orthogonale** *qui diagonalise A.*

Preuve
Notons $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ l'endomorphisme canoniquement associé à A. Puisque la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est orthonormée, on a :

$$A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \iff u \in \mathcal{S}(E) \iff u \text{ diagonalisable en BON } \iff A \text{ diagonalisable en BON.}$$

ATTENTION !

Le théorème spectral matriciel ne fonctionne pas avec une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$! Contre-exemple : $A = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$ est symétrique mais pas diagonalisable (facile à vérifier).

Méthode (Pour diagonaliser une matrice symétrique dans une base orthonormée)

- *Calculer une base de chaque sous-espace propre.*
- *Appliquer le procédé de Gram-Schmidt pour construire une base orthonormée de chaque sous-espace propre.*
- *Réunir toutes ces bases : on obtient une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ qui diagonalise la matrice* **car les sous-espaces propres sont orthogonaux entre eux**.

Exemple

Diagonaliser la matrice symétrique $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *dans une base orthonormée de* $\mathbb{R}^3$.

Exemple (Produit de A et de sa transposée)

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, les matrices $A^\top A$ et $AA^\top$ sont réelles symétriques, donc on peut leur appliquer le théorème spectral.

Exemple (Quotients de Rayleigh)

Si $u \in \mathcal{S}(E)$, alors pour tout $x \in E \setminus \{0_E\}$, montrer que :

$$\min Sp(u) \leq \frac{(u(x)|x)}{\|x\|^2} \leq \max Sp(u).$$

Par le théorème spectral, il existe une base orthonormée $(e_1, \cdots, e_n)$ de E formée de vecteurs propres pour u : $u(e_i) = \lambda_i e_i$ pour tout i, avec $\lambda_i \in \mathbb{R}$. En décomposant $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, on obtient :

$$(u(x)|x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2,$$

d'où le résultat puisque $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$.

3) Endomorphismes auto-adjoints positifs, définis positifs

Définition 23 (Endomorphisme auto-adjoint positif, défini positif)
Soit $u \in \mathcal{S}(E)$.

(i) *On dit que u est* **positif** *lorsque* $\forall x \in E,\ (u(x)|x) \geq 0$.

(ii) *On dit que u est* **défini positif** *lorsque u est positif et* $((u(x)|x) = 0 \implies x = 0_E)$.

Remarque

$u \in \mathcal{S}(E)$ *est défini positif ssi* $\forall x \in E \setminus \{0_E\},\ (u(x)|x) > 0$.

Notation

On notera $\mathcal{S}^+(E)$ (resp. $\mathcal{S}^{++}(E)$) l'ensemble des endomorphismes auto-adjoints positifs (resp. définis positifs) de E.

ATTENTION !

On obtient facilement que $\mathcal{S}^+(E)$ et $\mathcal{S}^{++}(E)$ sont stables par somme et par multiplication par un réel positif ou strictement positif (selon le cas), mais ces deux ensembles ne sont pas des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{S}(E)$ (ils ne sont pas stables par l'opération $u \mapsto -u$).

On va maintenant étendre cette notion de positivité aux matrices symétriques (qui sont les représentations en base orthonormée des auto-adjoints). Comme d'habitude, on identifie les matrices colonnes aux vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

Définition 24 (Matrice symétrique positive, définie positive)
Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique.

- (i) *On dit que A est* **positive** *lorsque* $\forall X \in \mathbb{R}^n,\ X^\top AX \geq 0$.
- (ii) *On dit que A est* **définie positive** *lorsqu'elle est positive et* $(X^\top AX = 0 \implies X = 0)$.

Remarque
On a $X^\top AX = (X|AX) = (AX|X)$ (où $(.|.)$ désigne ici le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$), ce qui justifie cette définition (par analogie avec la précédente).

Notation
On notera $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$) l'ensemble des matrices symétriques positives (resp. définies positives) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exemple
Montrer que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, les matrices $A^\top A$ et $AA^\top$ sont symétriques positives.
A quelle condition sont-elles définies positives ?

Propriété 25 (Correspondance entre endomorphismes et matrices positifs)
Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E et soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On note $A = Mat_{\mathcal{B}}(u)$. Alors :

- (i) $u \in \mathcal{S}^+(E) \iff A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$;
- (ii) $u \in \mathcal{S}^{++}(E) \iff A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Remarque
En particulier, $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ si et seulement si son endomorphisme $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ canoniquement associé est dans $\mathcal{S}^+(\mathbb{R}^n)$ (car la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est orthonormée pour le produit scalaire canonique).

Preuve
On sait déjà que $u \in \mathcal{S}(E) \iff A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. En outre, puisque la base $\mathcal{B}$ est orthonormée, on a :

$$\forall x \in E, \qquad (u(x)|x) = (x|u(x)) = X^\top AX,$$

où $X = [x]_{\mathcal{B}}$, donc les équivalences voulues s'en déduisent directement.

Théorème 26 (Caractérisation spectrale des auto-adjoints positifs et définis positifs)
Soit $u \in \mathcal{S}(E)$. On a les équivalences :

- (i) $u \in \mathcal{S}^+(E) \iff Sp(u) \subset \mathbb{R}^+$;
- (ii) $u \in \mathcal{S}^{++}(E) \iff Sp(u) \subset \mathbb{R}^{+*}$.

Et de même pour les matrices symétriques :

$$A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \iff Sp(A) \subset \mathbb{R}^+, \qquad A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \iff Sp(A) \subset \mathbb{R}^{+*}.$$

Preuve
Traitons l'équivalence du point (i).

$\boxed{\implies}$ Si $u \in \mathcal{S}^+(E)$, alors on a $\forall x \in E,\ (u(x)|x) \geq 0$. Soit λ une valeur propre (réelle) de u, on a, en considérant un vecteur propre x associé :

$$(u(x)|x) = \lambda(x|x) \geq 0.$$

Mais $x \neq 0_E$, donc $(x|x) > 0$, ce qui entraîne $\lambda \geq 0$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que $Sp(u) \subset \mathbb{R}^{+*}$. Puisque u est auto-adjoint, il existe, d'après le théorème spectral, une base orthonormée $(e_1, \cdots, e_n)$ de E formée de vecteurs propres de u. Notons $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ les valeurs propres associées, elles sont positives par hypothèse. On obtient, alors, en décomposant un vecteur quelconque $x \in E$ sur la base orthonormée $(e_1, \cdots, e_n)$:

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i,$$

$$u(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j u(e_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j \lambda_j e_j,$$

donc par orthogonalité :

$$(u(x)|x) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} x_j x_i \lambda_j (e_j|e_i) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j^2 \geq 0,$$

ce qui montre $u \in \mathcal{S}^+(E)$. Pour l'équivalence du point (ii) :

$\boxed{\Longrightarrow}$ Identique au précédent, en rajoutant à la fin que comme $x \neq 0_E$, on a $(u(x)|x) > 0$ et $(x|x) > 0$, donc $\lambda > 0$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Identique au précédent, en rajoutant à la fin que comme les $\lambda_j > 0$, on a de plus :

$$(u(x)|x) = 0 \iff \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j^2 = 0 \implies x_1^2 = \cdots = x_n^2 = 0 \implies x = 0_E,$$

donc $u \in \mathcal{S}^{++}(E)$.

Remarque
Ainsi : $\mathcal{S}^{++}(E) = \mathcal{S}^+(E) \cap GL(E)$, *puisque* $u \in GL(E) \iff 0 \notin Sp(u)$.