CH12 : Interversion limite-intégrale

Comme d'habitude, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Nous allons ici donner des théorèmes généraux (admis), qui permettent de traiter les problèmes d'interversion limite/intégrale et série/intégrale, dans le cadre plus général des intégrales de fonctions continues par morceaux **sur un intervalle quelconque**.

Dans la suite, I désigne un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$.

I Convergence dominée

Théorème 1 (Théorème de convergence dominée)
Soit (f_n) une suite de fonctions continues par morceaux $I \to \mathbb{K}$. On suppose que

(i) *la suite (f_n) converge simplement sur I vers $f : I \to \mathbb{K}$ continue par morceaux.*

(ii) *il existe une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}$ positive et intégrable sur I telle que $\forall n \in \mathbb{N}, |f_n| \leq \varphi$ (i.e. $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in I,\ |f_n(t)| \leq \varphi(t)$).*

Alors, les f_n et f sont intégrables sur I, et

$$\int_I f_n(t)dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_I f(t)dt.$$

Vocabulaire
On dit que la fonction φ est une **majorante intégrable** des f_n.
Elle ne dépend que de la variable d'intégration t, et pas du paramètre n.

II Intégration terme à terme sur un intervalle quelconque

Etant donné une suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$, on cherche à savoir dans quels cas on a :

$$\int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_I f_n\right).$$

(on parle alors **d'intégration terme à terme** de la série de fonctions $\sum f_n$).
Les deux théorèmes suivants donnent des conditions suffisantes d'intégration terme à terme sur un intervalle I quelconque.
Mais à la différence du théorème d'intégration terme à terme sur un segment (cf. CH.11), qui se déduisait du théorème d'interversion limite-intégrale sur un segment (cf. CH.10), ces deux théorèmes ne se déduisent pas directement du théorème de convergence dominée, ils utilisent d'autres résultats issus de la *théorie de la mesure*, non étudiée en CPGE.

Théorème 2 (Théorème d'intégration terme à terme, cas positif)
Soit (f_n) une suite de fonctions intégrables de I dans $\mathbb{R}$, à valeurs positives.
On suppose que la série $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge simplement sur I vers une fonction $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ continue par morceaux sur I. Alors on a **dans** $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ *:*

$$\int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_I f_n\right).$$

En particulier :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \in L^1(I,\mathbb{R}) \iff \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_I f_n\right) < +\infty.$$

Théorème 3 (Théorème d'intégration terme à terme, cas général)
Soit (f_n) une suite de fonctions intégrables de I dans $\mathbb{K}$. On suppose que

(*i*) *la série $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge simplement sur I vers une fonction $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ continue par morceaux sur I ;*

(*ii*) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_I |f_n|\right) < +\infty.$

Alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est intégrable sur I et on a dans $\mathbb{K}$:

$$\int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_I f_n\right)$$

III Intégrales à paramètres

Dans ce dernier paragraphe, on se propose d'étudier des expressions de la forme :

$$g(x) = \int_I f(x,t)dt,$$

avec $x \in A$ (A étant un intervalle de $\mathbb{R}$ ou une partie d'un espace vectoriel normé de dimension finie) appelées **intégrales à paramètre**.

La fonction $x \mapsto g(x)$ est bien définie sur A dès que pour tout $x \in A$, l'intégrale $\displaystyle\int_I f(x,t)dt$ converge, mais en pratique (pour étudier les limites, la continuité ou la dérivabilité d'une telle fonction g), nous allons avoir besoin que pour tout $x \in A$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ soit **intégrable** sur I (c'est-à-dire $\displaystyle\int_I |f(x,t)|dt < +\infty$.)

Les théorèmes présentés dans cette section se déduisent tous du théorème de convergence dominée.

1) Passage à la limite dans une intégrale à paramètre

Théorème 4 (Version continue du théorème de convergence dominée)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie, soit $A \subset E$, soit $a \in \overline{A}$ et $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle. Soit $f : A \times I \to \mathbb{K}$. On suppose que :

(i) $\forall x \in A$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur I ;

(ii) $\forall t \in I$, $f(x,t) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell(t)$, avec $\ell : I \to \mathbb{K}$ continue par morceaux ;

(iii) il existe une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}$ positive et intégrable sur I telle que $\forall (x,t) \in A \times I$, $|f(x,t)| \leq \varphi(t)$.

Alors $g : x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)dt$ est bien définie sur A, ℓ est intégrable sur I et $g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \displaystyle\int_I \ell(t)dt$.

2) Continuité

Théorème 5 (Théorème de continuité d'une intégrale à paramètre)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie, soit $A \subset E$ et $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle.
Soit $f : A \times I \to \mathbb{K}$. On suppose que :

(i) $\forall x \in A$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur I ;

(ii) $\forall t \in I$, $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur A ;

(iii) il existe une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}$ intégrable et positive telle que $\forall (x,t) \in A \times I$, $|f(x,t)| \leq \varphi(t)$.

Alors $g : x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)dt$ est définie et continue sur A.

Corollaire 6 (Théorème de continuité d'une intégrale à paramètre, version locale)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie, soit $A \subset E$ et $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle.
Soit $f : A \times I \to \mathbb{K}$. On suppose que :

(i) $\forall x \in A$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur I ;

(ii) $\forall t \in I$, $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur A ;

(iii) pour tout $a \in A$, il existe un voisinage V de a (relatif à A) et une fonction $\varphi_V : I \to \mathbb{R}$ intégrable et positive telle que $\forall (x,t) \in V \times I$, $|f(x,t)| \leq \varphi_V(t)$.

Alors $g : x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)dt$ est définie et continue sur A.

3) Dérivation

Dans ce dernier paragraphe, I et A désignent des intervalles de $\mathbb{R}$, avec A d'intérieur non vide.

On souhaite calculer $g'(x) = \dfrac{d}{dx}\left(\displaystyle\int_I f(x,t)dt\right)$.

Notation
Soit une fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} A \times I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x,t) & \longmapsto & f(x,t) \end{array} \right.$. On fixe $t \in I$.
Si $x \mapsto f(x,t)$ est dérivable sur A, alors on note $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \dfrac{d}{dx}(f(x,t))$.
Cela définit une fonction de deux variables :

$$\frac{\partial f}{\partial x} : \left\{ \begin{array}{ccc} A \times I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x,t) & \longmapsto & \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \end{array} \right. ,$$

appelée **dérivée partielle de f par rapport à x**.

Théorème 7 (Théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre)
Soit $f : A \times I \to \mathbb{K}$. On suppose que :

(i) $\forall x \in A$, $t \mapsto f(x,t)$ *est intégrable sur* I *;*

(ii) $\forall t \in I$, $x \mapsto f(x,t)$ *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* A.

(iii) $\forall x \in A$, $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ *est continue par morceaux sur* I *;*

(iv) il existe une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}$ *intégrable et positive telle que* $\forall (x,t) \in A \times I$, $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \varphi(t)$.

Alors $g : x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)dt$ *est définie et de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* A, *avec*

$$g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt.$$

Lorsqu'on ne parvient par à majorer la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ sur tout $A \times I$ par une fonction intégrable, on peut se contenter d'une domination **sur tout segment de** A :

Corollaire 8 (Théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre, version locale)
Soit $f : A \times I \to \mathbb{K}$. On suppose que :

(i) $\forall x \in A$, $t \mapsto f(x,t)$ *est intégrable sur* I *;*

(ii) $\forall t \in I$, $x \mapsto f(x,t)$ *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* A *;*

(iii) $\forall x \in A$, $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ *est continue par morceaux sur* I *;*

(iv) pour tout segment $[a,b] \subset A$, *il existe une fonction* $\varphi_{a,b} : I \to \mathbb{R}$ *intégrable et positive telle que* $\forall (x,t) \in [a,b] \times I$, $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \varphi_{a,b}(t)$.

Alors $g : x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)dt$ *est définie et de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* A, *avec*

$$g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt.$$

Terminons en donnant une version itérée du théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre.

Notation
Soit une fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} A \times I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x,t) & \longmapsto & f(x,t) \end{array} \right.$. On fixe $t \in I$ et $j \in \mathbb{N}$.
Si $x \mapsto f(x,t)$ est j-fois dérivable sur A, alors on note $\dfrac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t) = \dfrac{d^j}{dx^j}(f(x,t))$.
Cela définit une fonction de deux variables :

$$\frac{\partial^j f}{\partial x^j} : \left\{ \begin{array}{ccc} A \times I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x,t) & \longmapsto & \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t) \end{array} \right. ,$$

appelée **dérivée partielle j^e de f par rapport à x**.

Corollaire 9 (Théorème de dérivation $\mathcal{C}^k$ d'une intégrale à paramètre)
Soit $f : A \times I \to \mathbb{K}$ et $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose que :

(i) $\forall t \in I$, $x \mapsto f(x,t)$ *est de classe* $\mathcal{C}^k$ *sur* A *;*

(ii) $\forall j \in \{0, \cdots, k-1\}$, $\forall x \in A$, $t \mapsto \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)$ *est intégrable sur* I *;*

(iii) $\forall x \in A$, $t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ *est continue par morceaux sur* I *;*

(iv) *pour tout segment* $[a,b] \subset A$, *il existe une fonction* $\varphi_{a,b} : I \to \mathbb{R}$ *intégrable et positive telle que* $\forall (x,t) \in [a,b] \times I$, $\left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leq \varphi_{a,b}(t)$.

Alors $g : x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)dt$ *est définie et de classe* $\mathcal{C}^k$ *sur* A, *avec*

$$\forall j \in \{0, \cdots, k\}, \qquad g^{(j)}(x) = \int_I \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)dt.$$