

CH12 : Interversion limite-intégrale

Comme d'habitude, \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

Nous allons ici donner des théorèmes généraux (admis), qui permettent de traiter les problèmes d'interversion limite/intégrale et série/intégrale, dans le cadre plus général des intégrales de fonctions continues par morceaux **sur un intervalle quelconque**.

Dans la suite, I désigne un intervalle quelconque de \mathbb{R} .

I Convergence dominée

Théorème 1 (Théorème de convergence dominée)

Soit (f_n) une suite de fonctions continues par morceaux $I \rightarrow \mathbb{K}$. On suppose que

- (i) la suite (f_n) converge simplement sur I vers $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ continue par morceaux.
- (ii) il existe une fonction $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ positive et intégrable sur I telle que $\forall n \in \mathbb{N}, |f_n| \leq \varphi$ (i.e. $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in I, |f_n(t)| \leq \varphi(t)$).

Alors, les f_n et f sont intégrables sur I , et

$$\int_I f_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_I f(t) dt.$$

Vocabulaire

On dit que la fonction φ est une **majorante intégrable** des f_n .

Elle ne dépend que de la variable d'intégration t , et pas du paramètre n .

II Intégration terme à terme sur un intervalle quelconque

Etant donné une suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 0}$, on cherche à savoir dans quels cas on a :

$$\int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_I f_n \right).$$

(on parle alors **d'intégration terme à terme** de la série de fonctions $\sum f_n$).

Les deux théorèmes suivants donnent des conditions suffisantes d'intégration terme à terme sur un intervalle I quelconque.

Mais à la différence du théorème d'intégration terme à terme sur un segment (cf. CH.11), qui se déduisait du théorème d'interversion limite-intégrale sur un segment (cf. CH.10), ces deux théorèmes ne se déduisent pas directement du théorème de convergence dominée, ils utilisent d'autres résultats issus de la *théorie de la mesure*, non étudiée en CPGE.

Théorème 2 (Théorème d'intégration terme à terme, cas positif)

Soit (f_n) une suite de fonctions intégrables de I dans \mathbb{R} , à valeurs positives.

On suppose que la série $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement sur I vers une fonction $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ continue par morceaux sur I . Alors on a **dans** $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$:

$$\int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_I f_n \right).$$

En particulier :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \in L^1(I, \mathbb{R}) \iff \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_I f_n \right) < +\infty.$$

Théorème 3 (Théorème d'intégration terme à terme, cas général)

Soit (f_n) une suite de fonctions intégrables de I dans \mathbb{K} . On suppose que

- (i) la série $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement sur I vers une fonction $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ continue par morceaux sur I ;
- (ii) $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_I |f_n| \right) < +\infty$.

Alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est intégrable sur I et on a dans \mathbb{K} :

$$\int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_I f_n \right)$$

III Intégrales à paramètres

Dans ce dernier paragraphe, on se propose d'étudier des expressions de la forme :

$$g(x) = \int_I f(x, t) dt,$$

avec $x \in A$ (A étant un intervalle de \mathbb{R} ou une partie d'un espace vectoriel normé de dimension finie) appelées **intégrales à paramètre**.

La fonction $x \mapsto g(x)$ est bien définie sur A dès que pour tout $x \in A$, l'intégrale $\int_I f(x, t) dt$ converge, mais en pratique (pour étudier les limites, la continuité ou la dérivabilité d'une telle fonction g), nous allons avoir besoin que pour tout $x \in A$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ soit **intégrable** sur I (c'est-à-dire $\int_I |f(x, t)| dt < +\infty$.)

Les théorèmes présentés dans cette section se déduisent tous du théorème de convergence dominée.

1) Passage à la limite dans une intégrale à paramètre

Théorème 4 (Version continue du théorème de convergence dominée)

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel normé de dimension finie, soit $A \subset E$, soit $a \in \bar{A}$ et $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle. Soit $f : A \times I \rightarrow \mathbb{K}$. On suppose que :

- (i) $\forall x \in A, t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux sur I ;
- (ii) $\forall t \in I, f(x, t) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell(t)$, avec $\ell : I \rightarrow \mathbb{K}$ continue par morceaux ;
- (iii) il existe une fonction $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ positive et intégrable sur I telle que $\forall (x, t) \in A \times I$, $|f(x, t)| \leq \varphi(t)$.

Alors $g : x \mapsto \int_I f(x, t) dt$ est bien définie sur A , ℓ est intégrable sur I et $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \int_I \ell(t) dt$.

2) Continuité

Théorème 5 (Théorème de continuité d'une intégrale à paramètre)

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel normé de dimension finie, soit $A \subset E$ et $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle.

Soit $f : A \times I \rightarrow \mathbb{K}$. On suppose que :

- (i) $\forall x \in A, t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux sur I ;
- (ii) $\forall t \in I, x \mapsto f(x, t)$ est continue sur A ;
- (iii) il existe une fonction $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ intégrable et positive telle que $\forall (x, t) \in A \times I, |f(x, t)| \leq \varphi(t)$.

Alors $g : x \mapsto \int_I f(x, t) dt$ est définie et continue sur A .

Corollaire 6 (Théorème de continuité d'une intégrale à paramètre, version locale)

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel normé de dimension finie, soit $A \subset E$ et $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle.

Soit $f : A \times I \rightarrow \mathbb{K}$. On suppose que :

- (i) $\forall x \in A, t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux sur I ;
- (ii) $\forall t \in I, x \mapsto f(x, t)$ est continue sur A ;
- (iii) pour tout $a \in A$, il existe un voisinage V de a (relatif à A) et une fonction $\varphi_V : I \rightarrow \mathbb{R}$ intégrable et positive telle que $\forall (x, t) \in V \times I, |f(x, t)| \leq \varphi_V(t)$.

Alors $g : x \mapsto \int_I f(x, t) dt$ est définie et continue sur A .

3) Dérivation

Dans ce dernier paragraphe, I et A désignent des intervalles de \mathbb{R} , avec A d'intérieur non vide.

On souhaite calculer $g'(x) = \frac{d}{dx} \left(\int_I f(x,t) dt \right)$.

Notation

Soit une fonction $f : \begin{cases} A \times I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x,t) & \longmapsto & f(x,t) \end{cases}$. On fixe $t \in I$.

Si $x \mapsto f(x,t)$ est dérivable sur A , alors on note $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{d}{dx}(f(x,t))$.

Cela définit une fonction de deux variables :

$$\frac{\partial f}{\partial x} : \begin{cases} A \times I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x,t) & \longmapsto & \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \end{cases},$$

appelée **dérivée partielle de f par rapport à x** .

Théorème 7 (Théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre)

Soit $f : A \times I \rightarrow \mathbb{K}$. On suppose que :

- (i) $\forall x \in A, t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur I ;
- (ii) $\forall t \in I, x \mapsto f(x,t)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur A .
- (iii) $\forall x \in A, t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur I ;
- (iv) il existe une fonction $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ intégrable et positive telle que $\forall (x,t) \in A \times I, \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \right| \leq \varphi(t)$.

Alors $g : x \mapsto \int_I f(x,t) dt$ est définie et de classe \mathcal{C}^1 sur A , avec

$$g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) dt.$$

Lorsqu'on ne parvient pas à majorer la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ sur tout $A \times I$ par une fonction intégrable, on peut se contenter d'une domination **sur tout segment de A** :

Corollaire 8 (Théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre, version locale)

Soit $f : A \times I \rightarrow \mathbb{K}$. On suppose que :

- (i) $\forall x \in A, t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur I ;
- (ii) $\forall t \in I, x \mapsto f(x,t)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur A ;
- (iii) $\forall x \in A, t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur I ;
- (iv) pour tout segment $[a,b] \subset A$, il existe une fonction $\varphi_{a,b} : I \rightarrow \mathbb{R}$ intégrable et positive telle que $\forall (x,t) \in [a,b] \times I, \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \right| \leq \varphi_{a,b}(t)$.

Alors $g : x \mapsto \int_I f(x,t) dt$ est définie et de classe \mathcal{C}^1 sur A , avec

$$g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) dt.$$

Terminons en donnant une version itérée du théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre.

Notation

Soit une fonction $f : \begin{cases} A \times I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x,t) & \longmapsto & f(x,t) \end{cases}$. On fixe $t \in I$ et $j \in \mathbb{N}$.

Si $x \mapsto f(x,t)$ est j -fois dérivable sur A , alors on note $\frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t) = \frac{d^j}{dx^j}(f(x,t))$.

Cela définit une fonction de deux variables :

$$\frac{\partial^j f}{\partial x^j} : \begin{cases} A \times I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x,t) & \longmapsto & \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t) \end{cases},$$

appelée **dérivée partielle j^e de f par rapport à x** .

Corollaire 9 (Théorème de dérivation C^k d'une intégrale à paramètre)

Soit $f : A \times I \rightarrow \mathbb{K}$ et $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose que :

- (i) $\forall t \in I, x \mapsto f(x, t)$ est de classe C^k sur A ;
- (ii) $\forall j \in \{0, \dots, k-1\}, \forall x \in A, t \mapsto \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x, t)$ est intégrable sur I ;
- (iii) $\forall x \in A, t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t)$ est continue par morceaux sur I ;
- (iv) pour tout segment $[a, b] \subset A$, il existe une fonction $\varphi_{a,b} : I \rightarrow \mathbb{R}$ intégrable et positive telle que $\forall (x, t) \in [a, b] \times I, \left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) \right| \leq \varphi_{a,b}(t)$.

Alors $g : x \mapsto \int_I f(x, t) dt$ est définie et de classe C^k sur A , avec

$$\forall j \in \{0, \dots, k\}, \quad g^{(j)}(x) = \int_I \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x, t) dt.$$