CH12 : Interversion limite-intégrale

Table des matières

Comme d'habitude, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Rappel
Dans les chapitres 10 (suites de fonctions) et 11 (séries de fonctions), nous avions montré les résultats suivants :

- **Théorème d'interversion limite / intégrale sur un segment**
  Si (f_n) est une suite de fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{K}$ qui converge uniformément vers $f : [a, b] \to \mathbb{K}$, alors f est continue et $\displaystyle\int_a^b f_n(t)dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(t)dt$.
- **Théorème d'intégration terme à terme sur un segment**
  Si $\displaystyle\sum_{n\geq 0} f_n$ est une série de fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{K}$ qui converge uniformément, alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_a^b f_n(t)dt\right) = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right) dt$.

ATTENTION !
Ces deux théorèmes ne sont valables que dans le cadre de fonctions continues sur un intervalle **compact** (un segment).

Nous allons ici donner des théorèmes généraux (admis), qui permettent de traiter les problèmes d'interversion limite/intégrale et série/intégrale, dans le cadre plus général des intégrales de fonctions continues par morceaux **sur un intervalle quelconque**.

Dans la suite, I désigne un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$.

I Convergence dominée

Théorème 1 (Théorème de convergence dominée)
Soit (f_n) une suite de fonctions continues par morceaux $I \to \mathbb{K}$. On suppose que

(i) *la suite (f_n) converge simplement sur I vers $f : I \to \mathbb{K}$ continue par morceaux.*

(ii) *il existe une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}$ positive et intégrable sur I telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leq \varphi$ (i.e. $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in I,\ |f_n(t)| \leq \varphi(t)$).*

Alors, les f_n et f sont intégrables sur I, et

$$\int_I f_n(t)dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_I f(t)dt.$$

Vocabulaire
On dit que la fonction φ est une **majorante intégrable** des f_n.
Elle ne dépend que de la variable d'intégration t, et pas du paramètre n.

Remarque
La majoration $|f_n| \leq \varphi$ permet de justifier en particulier l'intégrabilité des f_n, mais aussi celle de f (puisqu'à $t \in I$ fixé, on obtient en passant à la limite lorsque $n \to +\infty$ dans l'inégalité $|f_n(t)| \leq \varphi(t)$ que $|f(t)| \leq \varphi(t)$).

Preuve
Admis, car les outils nécessaires ne sont pas au programme des classes préparatoires.

Exemple
Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 + 2\sin(t/n)}{1 + t^2} dt$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : t \mapsto \dfrac{1 + 2\sin(t/n)}{1 + t^2}$.

Chaque f_n est continue sur $\mathbb{R}$, la suite (f_n) converge simplement vers $f : t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$, et on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \forall t \in \mathbb{R}, \quad |f_n(t)| \leq \frac{3}{1+t^2},$$

avec $\varphi : t \mapsto \frac{3}{1+t^2}$ intégrable sur $\mathbb{R}$ (car elle est continue, positive et sa primitive $t \mapsto 3\arctan(t)$ possède des limites finies en $\pm\infty$). Donc d'après le théorème de convergence dominée, on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n = \int_{-\infty}^{+\infty} f = [\arctan(t)]_{-\infty}^{+\infty} = \pi.$$

Exemple

Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi/2} \sin^n(t)dt$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : t \mapsto \sin^n(t)$.

Chaque f_n est continue sur $[0, \pi/2[$ (et même sur $\mathbb{R}$), la suite (f_n) converge simplement sur $[0, \pi/2[$ vers $f = 0$, et on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \forall t \in [0, \pi/2[, \quad |f_n(t)| \leq 1,$$

avec $\varphi : t \mapsto 1$ intégrable sur $[0, \pi/2[$ (car prolongeable continûment au segment $[0, \pi/2]$), donc d'après le théorème de convergence dominée, on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi/2} f_n = \int_0^{\pi/2} f = 0.$$

Exemple

Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-t^n}dt$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : t \mapsto e^{-t^n}$.

Chaque f_n est continue sur $[0; +\infty[$, la suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction $f : t \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ e^{-1} & \text{si } t = 1 \\ 0 & \text{si } t > 1 \end{cases}$, qui est en escalier, donc continue par morceaux sur $\mathbb{R}^+$. Enfin, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad |f_n(t)| \leq \varphi(t),$$

avec $\varphi : t \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ e^{-t} & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$ intégrable sur $\mathbb{R}^+$ (car φ est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$ et $t \mapsto e^{-t}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$), donc d'après le théorème de convergence dominée, on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n = \int_0^{+\infty} f = \int_0^1 1dt = 1.$$

ATTENTION !

Le théorème de convergence dominée ne fonctionne pas toujours, il y a d'autres moyens de permuter une limite et une intégrale :

- Si $I = [a, b]$ (segment), tester la convergence uniforme de la suite (f_n).
- Modifier les intégrales avec des IPP ou changement de variable.
- En dernier recours : sortir les ε et majorer $|\int_I f_n - \int_I f|$.

Exemple

Montrer le lemme de Riemann-Lebesgue : pour $f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{K})$*, on a* $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)e^{int}dt = 0$.

En intégrant par parties, on a

$$\int_a^b f(t)e^{int}dt = \left[-\frac{i}{n} f(t)e^{int}\right]_a^b + \int_a^b \frac{i}{n} f'(t)e^{int}dt,$$

donc

$$\left|\int_a^b f(t)e^{int}dt\right| \leq \frac{|f(b)|+|f(a)|}{n} + \frac{1}{n}\int_a^b |f'(t)|dt$$

(cette dernière intégrale est bien définie car $|f'| \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$).
Cette majoration en module montre bien que

$$\int_a^b f(t)e^{int}dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Remarque
Le lemme de Riemann-Lebesgue reste vrai pour une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ continue par morceaux (voir les exercices).

II Intégration terme à terme sur un intervalle quelconque

Etant donné une suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$, on cherche à savoir dans quels cas on a :

$$\int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_I f_n\right).$$

(on parle alors **d'intégration terme à terme** de la série de fonctions $\sum f_n$).
Les deux théorèmes suivants donnent des conditions suffisantes d'intégration terme à terme sur un intervalle I quelconque.
Mais à la différence du théorème d'intégration terme à terme sur un segment (cf. CH.11), qui se déduisait du théorème d'interversion limite-intégrale sur un segment (cf. CH.10), ces deux théorèmes ne se déduisent pas directement du théorème de convergence dominée, ils utilisent d'autres résultats issus de la *théorie de la mesure*, non étudiée en CPGE.

Théorème 2 (Théorème d'intégration terme à terme, cas positif)
Soit (f_n) une suite de fonctions intégrables de I dans $\mathbb{R}$, à valeurs positives.
On suppose que la série $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge simplement sur I vers une fonction $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ continue par morceaux sur I. Alors on a **dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$** *:*

$$\int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_I f_n\right).$$

En particulier :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \in L^1(I, \mathbb{R}) \iff \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_I f_n\right) < +\infty.$$

Théorème 3 (Théorème d'intégration terme à terme, cas général)
Soit (f_n) une suite de fonctions intégrables de I dans $\mathbb{K}$. On suppose que

- *(i) la série $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge simplement sur I vers une fonction $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ continue par morceaux sur I ;*
- *(ii)* $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_I |f_n|\right) < +\infty$.

Alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est intégrable sur I et on a dans $\mathbb{K}$:

$$\int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_I f_n\right)$$

Remarque
Ces deux théorèmes sont analogues aux théorèmes de Fubini (cas positif et cas général) pour les séries doubles (cf. CH.1).

ATTENTION !
Dans l'hypothèse (ii) du second théorème, le module est **à l'intérieur** de l'intégrale, pas à l'extérieur !
D'ailleurs, on a dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left|\int_I f_n\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_I |f_n|\right),$$

c'est donc **la plus grande de ces deux séries** qu'il faut supposer finie (et cela entraîne évidemment la finitude de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left|\int_I f_n\right|$, mais ça n'est pas équivalent).

Preuve
Admis, car les outils nécessaires ne sont pas au programme des classes préparatoires.

Exemple
Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t-1}dt = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$.
Pour tout $t \in]0,1[$, on a

$$\frac{\ln(t)}{t-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} -t^n \ln(t).$$

Posons donc $f_n : t \mapsto -t^n \ln(t)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Chaque fonction f_n est intégrable sur $]0,1[$, car continue sur $]0,1]$, et $\forall t \in]0,1]$, $|f_n(t)| \leq |\ln(t)|$, avec $t \mapsto |\ln(t)|$ intégrable sur $]0,1]$).
La série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} f_n$ converge simplement vers $S : t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{t-1}$ (continue par morceaux sur $]0,1[$), et on a, par IPP généralisée :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \int_0^1 |f_n| = \int_0^1 f_n = -\int_0^1 t^n \ln(t)dt = \left[-\frac{t^{n+1}}{n+1}\ln(t)\right]_0^1 + \frac{1}{n+1}\int_0^1 t^n dt = \frac{1}{(n+1)^2},$$

donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_0^1 |f_n|\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} < +\infty.$$

Ainsi, le théorème d'intégration terme à terme s'applique et on obtient l'intégrabilité de $t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{t-1}$ sur $]0,1[$ (qu'on aurait pu vérifier à la main, ceci dit), ainsi que la relation :

$$\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t-1}dt = \int_0^1\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_0^1 f_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}.$$

ATTENTION !
Ce théorème d'intégration terme à terme ne fonctionne pas toujours, il y a d'autres moyens de permuter une série et une intégrale :

- Si $I = [a,b]$ (segment), tester la convergence uniforme de la série $\sum f_n$.
- Revenir aux sommes partielles $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f_k$ et essayer de leur appliquer le théorème de convergence dominée.
- En dernier recours : sortir les ε et majorer $\displaystyle\left|\sum_{k=0}^{n}\int_I f_k - \int_I\left(\sum_{k=0}^{n} f_k\right)\right| = \left|\int_I S_n - \int_I S\right|$.

Exemple
Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$.
Pour tout $t \in [0,1[$, on a

$$\frac{1}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n t^{2n}.$$

On travaille donc avec les fonctions $f_n : t \mapsto (-1)^n t^{2n}$, qui sont intégrables sur $[0,1[$ car continues sur $[0,1]$. On a

$$\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^1\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right),$$

et on va essayer de permuter la série et l'intégrale.

- **Méthode 1 : avec le théorème d'intégration terme à terme sur un intervalle quelconque**. La série $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge simplement sur $[0,1[$ vers $S : t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$, qui est continue sur $[0,1[$ (et même sur $\mathbb{R}$), **mais** on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 |f_n| = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 t^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1} = +\infty,$$

donc le théorème d'intégration terme à terme (cas général) ne s'applique pas. **<u>ECHEC</u>**.

- **Méthode 2 : avec le théorème d'intégration terme à terme sur un segment**.
Les f_n sont bien continues sur le segment $[0,1]$ **mais** la série $\sum_{n\geq 0} f_n$ ne converge pas uniformément sur $[0,1]$, car elle ne converge pas simplement (elle diverge grossièrement en $x=1$). **<u>ECHEC</u>**.

- **Méthode 3 : avec le théorème de convergence dominée appliqué aux sommes partielles**.
Posons $S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La **suite** (S_n) converge simplement sur $[0,1[$ vers $S : t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2} \in \mathcal{C}^0([0,1[,\mathbb{R})$, et on a

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in [0,1[, \quad |S_n(t)| = \left|\sum_{k=0}^{n} (-t^2)^k\right| = \left|\frac{1-(-t^2)^{n+1}}{1+t^2}\right| \leq \frac{2}{1+t^2},$$

avec $\varphi : t \mapsto \frac{2}{1+t^2}$ intégrable sur $[0,1[$ (car continue sur $[0,1]$). Donc d'après le théorème de convergence dominée, on obtient :

$$\int_0^1 S = \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 S_n = \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} f_k = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 f_k = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^1 f_k,$$

c'est-à-dire

$$\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1},$$

ce qui est la formule voulue. **<u>SUCCES</u>**.

- **Méthode 4 : à la main**
Avec les mêmes notations, on fait apparaitre les restes de la série $\sum f_n$:

$$\left|\int_0^1 S - \int_0^1 S_n\right| = \left|\int_0^1 \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k\right)\right| = \left|\int_0^1 \frac{(-t^2)^{n+1}}{1+t^2} dt\right| \leq \int_0^1 t^{2(n+1)} dt = \frac{1}{2n+3} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

ce qui montre que $\displaystyle\int_0^1 S = \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 S_n$, et on conclut comme dans la méthode précédente. **<u>SUCCES</u>**.
Cette dernière méthode est "la meilleure", car la plus élémentaire (elle n'utilise pas de théorème compliqué, mais seulement le calcul d'une somme géométrique).

Remarque
On a ainsi démontré une formule due à Leibniz :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4},$$

donc

$$\pi = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots\right).$$

III Intégrales à paramètres

Dans ce dernier paragraphe, on se propose d'étudier des expressions de la forme :

$$g(x) = \int_I f(x,t)dt,$$

avec $x \in A$ (A étant un intervalle de $\mathbb{R}$ ou une partie d'un espace vectoriel normé de dimension finie) appelées **intégrales à paramètre**.
La fonction $x \mapsto g(x)$ est bien définie sur A dès que pour tout $x \in A$, l'intégrale $\displaystyle\int_I f(x,t)dt$ converge, mais en pratique (pour étudier les limites, la continuité ou la dérivabilité d'une telle fonction g), nous allons avoir besoin que pour tout $x \in A$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ soit **intégrable** sur I (c'est-à-dire $\displaystyle\int_I |f(x,t)|dt < +\infty$.)

Les théorèmes présentés dans cette section se déduisent tous du théorème de convergence dominée.

1) Passage à la limite dans une intégrale à paramètre

Théorème 4 (Version continue du théorème de convergence dominée)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie, soit $A \subset E$, soit $a \in \overline{A}$ et $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle. Soit $f : A \times I \to \mathbb{K}$. On suppose que :

(i) $\forall x \in A$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur I ;

(ii) $\forall t \in I$, $f(x,t) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell(t)$, avec $\ell : I \to \mathbb{K}$ continue par morceaux ;

(iii) il existe une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}$ positive et intégrable sur I telle que $\forall (x,t) \in A \times I$, $|f(x,t)| \leq \varphi(t)$.

Alors $g : x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)dt$ est bien définie sur A, ℓ est intégrable sur I et $g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \displaystyle\int_I \ell(t)dt$.

Preuve
La fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)dt$ est bien définie sur A car les hypothèses (i) et (iii) assurent que $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur I pour tout $x \in A$.
Utilisons la caractérisation séquentielle des limites : soit $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ qui converge vers a (elle existe car a est adhérent à A). Appliquons le théorème de convergence dominée à la suite $f_n : t \mapsto f(x_n,t)$.

- Chaque f_n est continue par morceaux sur I d'après (i).
- Par composition de limites, la suite (f_n) converge simplement vers la fonction $\ell \in \mathcal{C}^0_{pm}(I,\mathbb{K})$ d'après (ii).
- Pour tout $(n,t) \in \mathbb{N} \times I$, $|f_n(t)| = |f(x_n,t)| \leq \varphi(t)$, avec $\varphi : I \to \mathbb{R}$ intégrable, d'après (iii).

Donc par le théorème de convergence dominée, on obtient que les f_n et ℓ sont intégrables sur I, et

$$\int_I f(x_n,t)dt = \int_I f_n(t)dt \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \int_I \ell(t)dt,$$

c'est-à-dire $g(x_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \int_I \ell(t)dt$. Ceci étant vrai pour toute suite $(x_n) \in A^N$ tendant vers a, on en déduit que $g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \int_I \ell(t)dt$.

Remarque

- *Cela fonctionne encore si l'hypothèse de domination (iii) n'a lieu que un voisinage V de a relatif à A.*
- *Dans le cas où $E = \mathbb{R}$ et A est un intervalle non majoré (resp. non minoré), cela fonctionne encore si $a = +\infty$ (resp. $a = -\infty$).*

Exemple

On pose $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(t) e^{-xt} dt$.

Montrer que g *est bien définie sur* $]0; +\infty[$ *et déterminer sa limite en* $+\infty$.

2) Continuité

Théorème 5 (Théorème de continuité d'une intégrale à paramètre)

Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel normé de dimension finie, soit* $A \subset E$ *et* $I \subset \mathbb{R}$ *un intervalle.*

Soit $f : A \times I \to \mathbb{K}$. *On suppose que :*

(*i*) $\forall x \in A$, $t \mapsto f(x,t)$ *est continue par morceaux sur* I *;*

(*ii*) $\forall t \in I$, $x \mapsto f(x,t)$ *est continue sur* A *;*

(*iii*) *il existe une fonction* $\varphi : I \to \mathbb{R}$ *intégrable et positive telle que* $\forall (x,t) \in A \times I$, $|f(x,t)| \leq \varphi(t)$.

Alors $g : x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)dt$ *est définie et continue sur* A.

Preuve

On applique le théorème précédent (version continue du théorème de convergence dominée) : pour tout $a \in A$ et tout $t \in I$, $f(x,t) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell(t) = f(a,t)$, d'après l'hypothèse (ii), et $\ell : t \mapsto f(a,t)$ est bien continue par morceaux. Donc g est bien définie sur A et $g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \int_I f(a,t)dt = g(a)$, ce qui montre la continuité de g en tout point $a \in A$.

Exemple

Montrer que $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$ *est définie et continue sur* $\mathbb{R}^+$.

ATTENTION !

Parfois, on n'arrive pas à majorer $|f(x,t)|$ indépendamment de x sur tout le domaine A. Dans ce cas, il suffit de **majorer localement en x**, c'est-à-dire de majorer indépendamment de x au voisinage de tout point $a \in A$.

Corollaire 6 (Théorème de continuité d'une intégrale à paramètre, version locale)

Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel normé de dimension finie, soit* $A \subset E$ *et* $I \subset \mathbb{R}$ *un intervalle.*

Soit $f : A \times I \to \mathbb{K}$. *On suppose que :*

(*i*) $\forall x \in A$, $t \mapsto f(x,t)$ *est continue par morceaux sur* I *;*

(*ii*) $\forall t \in I$, $x \mapsto f(x,t)$ *est continue sur* A *;*

(*iii*) *pour tout* $a \in A$, *il existe un voisinage* V *de* a *(relatif à* A*) et une fonction* $\varphi_V : I \to \mathbb{R}$ *intégrable et positive telle que* $\forall (x,t) \in V \times I$, $|f(x,t)| \leq \varphi_V(t)$.

Alors $g : x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)dt$ *est définie et continue sur* A.

Preuve

Sous ces hypothèses, le théorème précédent montre que pour tout $a \in A$, g est définie et continue sur un voisinage V de a (relatif à A), donc g est continue sur A.

Remarque

Lorsque A *est un intervalle de* $\mathbb{R}$, *on peut donc se contenter d'une* **domination sur tout segment** $V = [a,b] \subset A$, *puisque tout point de* A *est contenu dans un tel segment.*

Exemple

Montrer que $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t} dt$ *est définie et continue sur* $]0, +\infty[$.

Exemple
Montrer que $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+xt)}{1+t^2} dt$ *est définie et continue sur* $[0, +\infty[$.

Exemple
Montrer que $g : z \mapsto \displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln(t)}{t+z} dt$ *est définie et continue sur l'ouvert* $\Omega = \{z \in \mathbb{C},\ Re(z) > 0\}$.

3) Dérivation

Dans ce dernier paragraphe, I et A désignent des intervalles de $\mathbb{R}$, avec A d'intérieur non vide.

On souhaite calculer $g'(x) = \dfrac{d}{dx}\left(\displaystyle\int_I f(x,t)dt\right)$.

Notation
Soit une fonction $f : \left\{\begin{array}{ccc} A \times I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x,t) & \longmapsto & f(x,t) \end{array}\right.$. On fixe $t \in I$.
Si $x \mapsto f(x,t)$ est dérivable sur A, alors on note $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \dfrac{d}{dx}(f(x,t))$.
Cela définit une fonction de deux variables :

$$\frac{\partial f}{\partial x} : \left\{\begin{array}{ccc} A \times I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x,t) & \longmapsto & \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \end{array}\right. ,$$

appelée **dérivée partielle de f par rapport à x**.

Théorème 7 (Théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre)
Soit $f : A \times I \to \mathbb{K}$. *On suppose que :*

- (i) $\forall x \in A,\ t \mapsto f(x,t)$ *est intégrable sur* I *;*
- (ii) $\forall t \in I,\ x \mapsto f(x,t)$ *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* A.
- (iii) $\forall x \in A,\ t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ *est continue par morceaux sur* I *;*
- (iv) *il existe une fonction* $\varphi : I \to \mathbb{R}$ *intégrable et positive telle que* $\forall (x,t) \in A \times I,\ \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \varphi(t)$.

Alors $g : x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)dt$ *est définie et de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* A, *avec*

$$g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt.$$

Preuve
Le point (i) assure que g est bien définie sur l'intervalle A.
Le point (ii) assure l'existence de la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x} : A \times I \to \mathbb{K}$.
Montrons maintenant que pour tout point $x_0 \in A$, la fonction $x \mapsto \dfrac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$ possède une limite finie lorsque $x \to x_0$. Pour tout $x \in A \setminus \{x_0\}$, on a

$$\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \int_I \frac{f(x,t) - f(x_0,t)}{x - x_0} dt.$$

En posant $h(x,t) = \frac{f(x,t) - f(x_0,t)}{x - x_0}$ pour $(x,t) \in A \setminus \{x_0\} \times I$, on a donc :

$$\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \int_I h(x,t)dt.$$

Utilisons alors la version continue du théorème de convergence dominée avec la partie $A \setminus \{x_0\}$.

- pour tout $x \in A \setminus \{x_0\}$, $t \mapsto h(x,t)$ est continue par morceaux sur I (d'après (i)) ;
- pour tout $t \in I$, $h(x,t) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)$, et ℓ est bien continue par morceaux sur I (d'après (iii)).
- d'après l'inégalité des accroissements finis appliquée à la fonction $x \mapsto f(x,t)$ (qui est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur A à t fixé d'après l'hypothèse (ii)) :

$$\forall (x,t) \in A \setminus \{x_0\} \times I, \qquad |h(x,t)| = \frac{|f(x,t) - f(x_0,t)|}{|x - x_0|} \leq \sup_{y \in [x_0,x]} \left| \frac{\partial f}{\partial x}(y,t) \right| \leq \varphi(t),$$

avec $\varphi \in L^1(I, \mathbb{R}^+)$ d'après l'hypothèse (iv).

Donc d'après la version continue du théorème de convergence dominée, on en déduit que

$$\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \int_I h(x,t)dt \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \int_I \ell(t)dt = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)dt.$$

Finalement, la fonction g est dérivable en tout point $x_0 \in A$, et $g'(x_0) = \displaystyle\int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)dt$.

Enfin, la fonction $g' : \left\{ \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt \end{array} \right.$ est elle-même continue car on peut lui appliquer le théorème de continuité d'une intégrale à paramètre (état donné que $(x,t) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ vérifie les hypothèses adéquates).

Remarque

- *La conclusion du théorème se réécrit :* $\displaystyle\frac{d}{dx}\left(\int_I f(x,t)dt\right) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt$.
- *Il suffit de dominer* $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ *par une fonction intégrable indépendante de* t*, pas besoin de le faire pour* $f(x,t)$*.*
- *Le théorème fonctionne encore l'hypothèse* (i) *est remplacée par*

$$(i)\,bis \qquad \forall x \in A, \quad t \mapsto f(x,t) \text{ est continue par morceaux et } \int_I f(x,t)dt \text{ converge}$$

(il n'y a pas besoin que $t \mapsto f(x,t)$ *soit intégrable, on le voit dans la démonstration).*
Mais dans le cadre du programme, l'intégrabilité de $t \mapsto f(x,t)$ *est demandée.*

Exemple

On pose $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(xt)dt$.
Montrer que g *est dérivable sur* $\mathbb{R}$*, et en dérivant, montrer que* $g(x) = g(0)e^{-x^2/4}$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$.

Lorsqu'on ne parvient par à majorer la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ sur tout $A \times I$ par une fonction intégrable, on peut se contenter d'une domination **sur tout segment de** A :

Corollaire 8 (Théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre, version locale)
Soit $f : A \times I \to \mathbb{K}$*. On suppose que :*

- (i) $\forall x \in A$, $t \mapsto f(x,t)$ *est intégrable sur* I *;*
- (ii) $\forall t \in I$, $x \mapsto f(x,t)$ *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* A *;*
- (iii) $\forall x \in A$, $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ *est continue par morceaux sur* I *;*
- (iv) *pour tout segment* $[a,b] \subset A$*, il existe une fonction* $\varphi_{a,b} : I \to \mathbb{R}$ *intégrable et positive telle que* $\forall (x,t) \in [a,b] \times I$, $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \varphi_{a,b}(t)$.

Alors $g : x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)dt$ *est définie et de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* A*, avec*

$$g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt.$$

Preuve
Le théorème précédent montre que g est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout segment $[a,b] \subset A$, donc $g \in \mathcal{C}^1(A, \mathbb{K})$.

Exemple
On pose $g(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x - 1}{\ln(t)} dt$.
Montrer que g est dérivable sur $A =]-1; +\infty[$, calculer $g'(x)$ et en déduire $g(x)$.

Terminons en donnant une version itérée du théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre.

Notation
Soit une fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} A \times I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x,t) & \longmapsto & f(x,t) \end{array} \right.$. On fixe $t \in I$ et $j \in \mathbb{N}$.
Si $x \mapsto f(x,t)$ est j-fois dérivable sur A, alors on note $\dfrac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t) = \dfrac{d^j}{dx^j}(f(x,t))$.
Cela définit une fonction de deux variables :

$$\frac{\partial^j f}{\partial x^j} : \left\{ \begin{array}{ccc} A \times I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x,t) & \longmapsto & \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t) \end{array} \right. ,$$

appelée **dérivée partielle j^e de f par rapport à x**.

Corollaire 9 (Théorème de dérivation $\mathcal{C}^k$ d'une intégrale à paramètre)
Soit $f : A \times I \to \mathbb{K}$ et $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose que :

(*i*) $\forall t \in I$, $x \mapsto f(x,t)$ *est de classe* $\mathcal{C}^k$ *sur* A *;*

(*ii*) $\forall j \in \{0, \cdots, k-1\}$, $\forall x \in A$, $t \mapsto \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)$ *est intégrable sur* I *;*

(*iii*) $\forall x \in A$, $t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ *est continue par morceaux sur* I *;*

(*iv*) *pour tout segment* $[a,b] \subset A$, *il existe une fonction* $\varphi_{a,b} : I \to \mathbb{R}$ *intégrable et positive telle que* $\forall (x,t) \in [a,b] \times I$, $\left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leq \varphi_{a,b}(t)$.

Alors $g : x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)dt$ *est définie et de classe* $\mathcal{C}^k$ *sur* A, *avec*

$$\forall j \in \{0, \cdots, k\}, \qquad g^{(j)}(x) = \int_I \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)dt.$$

Preuve
Par récurrence sur $k \geq 1$.
Le cas $k = 1$ correspond exactement au théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre.
Supposons le théorème vrai au rang $k \geq 1$. Soit f vérifiant les hypothèses au rang $k+1$ (la domination sur tout segment concerne donc $\frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k+1}}$) : pour tout $[a,b] \subset A$, il existe une fonction $\varphi_{a,b} : I \to \mathbb{R}$ intégrable et positive telle que $\forall (x,t) \in [a,b] \times I$, $\left|\frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k+1}}(x,t)\right| \leq \varphi_{a,b}(t)$.
Cette domination locale se répercute alors sur la dérivée précédente $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}$:

$$\forall (x,t) \in [a,b] \times I, \qquad \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t) = \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(a,t) + \int_a^x \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k+1}}(y,t)dy,$$

donc

$$\forall (x,t) \in [a,b] \times I, \qquad \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leq \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(a,t)\right| + (b-a)\varphi_{a,b}(t) = \psi_{a,b}(t).$$

D'après les hypothèses, la fonction $\psi_{a,b}$ est intégrable sur I, donc d'après l'hypothèse de récurrence, on peut affirmer que $g \in \mathcal{C}^k(A, \mathbb{K})$, avec

$$g^{(k)}(x) = \int_I \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)dt.$$

Enfin, les hypothèses vérifiées par f au rang $k+1$ permettent d'appliquer le théorème de dérivation des intégrales à paramètre à $g^{(k)}$, donc $g^{(k)} \in \mathcal{C}^1(A, \mathbb{K})$, ce qui montre que $g \in \mathcal{C}^{k+1}(A, \mathbb{K})$, et

$$g^{(k+1)}(x) = (g^{(k)})'(x) = \int_I \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k+1}}(x,t)dt.$$

Exemple
Soit $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}dt$.
Montrer que g *est de classe* $\mathcal{C}^2$ *sur* $]0;+\infty[$ *et que* $g''(x) + g(x) = \frac{1}{x}$.