CH11 : Séries de fonctions

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
On considère des fonctions f définies sur une partie A d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé E de dimension finie, et à valeurs dans $\mathbb{K}$.
On rappelle que $\mathcal{F}(A,\mathbb{K})$ désigne le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des fonctions $A \to \mathbb{K}$.
Vu qu'une série est un cas particulier de suite, tous les résultats de ce chapitre découlent directement du chapitre "Suites de fonctions". Et tout comme dans ce chapitre, on pourra généraliser les définitions et résultats à des fonctions $f : A \to F$, où F est aussi un $\mathbb{K}$-evn de dimension finie.
Pour une fonction bornée $f : A \to \mathbb{K}$, on rappelle la notation :

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in A} |f(x)|$$

("norme infinie" de f, appelée aussi "norme de la convergence uniforme").

I Différents types de convergence

Définition 1 (Série de fonctions)
Etant donnée une suite de fonctions $(f_n) \in \mathcal{F}(A,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$, on appelle **série de fonctions de terme général f_n** *la suite de fonctions $(S_n) \in \mathcal{F}(A,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ définie par :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k.$$

Cette série de fonctions est notée $\sum f_n$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, S_n est appelée la **somme partielle de rang n**.

Notation
Tout comme pour les séries numériques, les séries de fonctions pourront se noter $\sum_{n\geq 0} f_n$, ou plus simplement $\sum f_n$ (de toute façon, le rang à partir duquel une série est définie n'a pas d'importance pour définir la notion de convergence).

Définition 2 (Convergence simple, convergence uniforme)
Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(A,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$. Avec les notations précédentes :

(*i*) *On dit que la série de fonctions $\sum f_n$* **converge simplement** *lorsque la suite de fonctions (S_n) converge simplement, c'est-à-dire lorsqu'il existe une fonction $S : A \to \mathbb{K}$ telle que pour tout $x \in A$, $S_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} S(x)$.*
Cela revient à dire que pour tout $x \in A$, la série numérique $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ converge.

(*ii*) *On dit que la série de fonctions $\sum f_n$* **converge uniformément** *lorsque la suite de fonctions (S_n) converge uniformément, c'est-à-dire lorsqu'il existe une fonction $S : A \to \mathbb{K}$ telle que les $S_n - S$ sont bornées sur A à partir d'un certain rang et que $\|S_n - S\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.*

Notation
En cas de convergence simple, la **somme** de la série de fonctions $\sum f_k$ est la fonction $S : A \to \mathbb{K}$ définie par

$$\forall x \in A, \qquad S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x) = \lim_{n\to+\infty} S_n(x),$$

et on peut définir la **suite des restes** comme la suite de fonctions (R_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in A, \qquad R_n(x) = S(x) - S_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x).$$

Propriété 3 (La convergence uniforme entraîne la convergence simple)
Si $\sum f_n$ *converge uniformément vers* S*, alors* $\sum f_n$ *converge simplement vers* S*.*

Propriété 4 (Lien entre CVU et reste)
Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(A, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$*. Alors, la série de fonctions* $\sum f_n$ *converge uniformément si et seulement si elle converge simplement et la suite des restes* (R_n) *converge uniformément vers la fonction nulle.*

Définition 5 (Convergence normale)
Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(A, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$*. On dit que la série de fonctions* $\sum f_n$ **converge normalement** *lorsque les* f_n *sont bornées sur* A *et la série numérique* $\sum \|f_n\|_\infty$ *converge.*

Méthode (Pour étudier la convergence normale d'une série de fonctions)
Etablir la convergence normale d'une série de fonctions revient donc à trouver une suite (u_n) **indépendante de x** *telle que* $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in A,\ |f_n(x)| \leq u_n$ *et la série numérique* $\sum u_n$ *converge.*

Théorème 6 (Lien entre les différentes convergences)
Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(A, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$*.*

- (i) *Si* $\sum f_n$ *converge normalement, alors pour tout* $x \in A$*,* $\sum f_n(x)$ *converge absolument, donc* $\sum f_n$ *converge simplement.*
- (ii) *Si* $\sum f_n$ *converge normalement, alors* $\sum f_n$ *converge uniformément.*

Méthode (Pour étudier la convergence d'une série de fonctions)

1. *On étudie la convergence simple.*
2. *On étudie la convergence normale (afin d'obtenir la convergence uniforme).*
3. *Si la série ne converge pas normalement, on essaye de montrer "à la main" la convergence uniforme, en majorant le reste uniformément, c'est-à-dire en trouvant une suite* $a_n \to 0$ **indépendante de x** *telle que* $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in A,\ |R_n(x)| \leq a_n$*.*

II Continuité et double limite

Théorème 7 (Continuité d'une série de fonctions)
Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(A, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ et soit $a \in A$. On suppose que :

- (i) *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en a.*
- (ii) *La série $\sum f_n$ converge uniformément sur un voisinage V de a (relatif à A).*

Alors, la fonction somme $S : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est continue en a.

On en déduit directement, comme dans le CH.10, des résultats sur la continuité globale (sur tout A) d'une série de fonctions :

Corollaire 8 (Continuité globale d'une série de fonctions)
Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(A, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$.
Si les f_n sont continues sur A et si $\sum f_n$ converge uniformément sur A, alors la fonction somme $S : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est continue sur A.

Corollaire 9 (Continuité par convergence uniforme locale)
Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$.
Si les f_n sont continues sur I et si $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment $J \subset I$, alors la fonction somme $S : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est continue sur I.

Théorème 10 (Théorème de la double limite pour les séries de fonctions)
Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(A, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ et $a \in \overline{A}$. On suppose que :

- (i) *La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément vers S sur un voisinage V de a (relatif à A).*
- (ii) *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell_n \in \mathbb{K}$.*

Alors, la série numérique $\sum \ell_n$ converge vers $\ell \in \mathbb{K}$, et on a $S(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$. En d'autres termes :

$$\lim_{x \to a} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\lim_{x \to a} f_n(x) \right).$$

III Intégration et dérivation

Propriété 11 (Convergence uniforme d'une série de primitives)
Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. On suppose que :

(i) *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur I.*

(ii) *La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment de I vers $S : I \to \mathbb{K}$.*

Pour tout $a \in I$, on note $F_n : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f_n(t)dt$. Alors, la série de fonctions $\sum F_n$ converge uniformément vers $T : x \mapsto \displaystyle\int_a^x S(t)dt$ sur tout segment de I.

Théorème 12 (Théorème d'intégration terme à terme sur un segment)
Soit (f_n) une suite de fonctions continues $[a, b] \to \mathbb{K}$. Si la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a, b]$, alors sa somme est continue, et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_a^b f_n(t)dt \right) = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right) dt.$$

Théorème 13 (Dérivation terme à terme d'une série de fonctions)
Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. On suppose que :

(i) *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$.*

(ii) *La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement vers $S : I \to \mathbb{K}$ sur I.*

(iii) *La série des dérivées $\sum f_n'$ converge uniformément sur tout segment de I vers $T : I \to \mathbb{K}$.*

Alors la série $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment de I, la fonction S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, et $S' = T$. Autrement dit, on a

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'.$$

Grâce au théorème de dérivation terme à terme, nous sommes maintenant en mesure de démontrer le résultat suivant, déjà rencontré :

Théorème 14 (Série exponentielle réelle)
Pour tout $x \in \mathbb{R}$*, on a* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$.

Terminons avec la "version $\mathcal{C}^k$" du théorème de dérivation terme à terme, qui en découle directement :

Corollaire 15 (Dérivation terme à terme version $\mathcal{C}^k$)
Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$*, où* I *est un intervalle de* $\mathbb{R}$*, et soit* $k \in \mathbb{N}$*. On suppose que :*

- (i) *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$*,* $f_n \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{K})$.
- (ii) *Pour tout* $i \in \{0, \cdots, k-1\}$*, la série* $\sum\limits_{n\geq 0} f_n^{(i)}$ *converge simplement vers une fonction* $S_i : I \to \mathbb{K}$ *sur* I.
- (iii) *La série* $\sum\limits_{n\geq 0} f_n^{(k)}$ *converge uniformément sur tout segment de* I *vers une fonction* $S_k : I \to \mathbb{K}$.

Alors, la fonction somme $S = S_0$ *est de classe* $\mathcal{C}^k$ *sur* I*, et pour tout* $i \in \{0, \cdots, k\}$*,* $S^{(i)} = S_i$*, c'est-à-dire*

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)^{(i)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(i)}.$$

De plus, les séries $\sum\limits_{n\geq 0} f_n^{(i)}$ *convergent uniformément sur tout segment de* I *pour tout* $i \in \{0, \cdots, k\}$.

IV Exemple d'étude de fonction définie par une série

On veut étudier la fonction $S : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$.

1. Montrer que S est bien définie sur $]0, +\infty[$.
2. Etudier la dérivabilité de S.
3. Etudier les variations de S.
4. Déterminer les limites de S aux bornes de son ensemble de définition.
5. En étudiant $S(x) + S(x+1)$, déterminer un équivalent de S en $+\infty$.

Solution : notons $S = \sum\limits_{n\geq 1} f_n$, avec $f_n : x \mapsto \frac{(-1)^n}{x+n}$.

1. Pour tout réel $x > 0$, la suite $n \mapsto a_n(x) = \frac{1}{x+n}$ décroît et converge vers 0, donc la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} f_n(x) = \sum_{n\geq 0} (-1)^n a_n(x)$ converge (par le CSSA).
   Ainsi, la série $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$, donc $S :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est bien définie.

2. Les f_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, de dérivée $f_n' : x \mapsto \frac{(-1)^{n+1}}{(x+n)^2}$. De plus, la série $\sum_{n\geq 0} f_n'$ converge uniformément sur $]0, +\infty[$ puisqu'elle converge simplement (par le CSSA), et ses restes vérifient
$$\forall (n, x) \in \mathbb{N}\times]0, +\infty[, \qquad |R_n^{(1)}(x)| \leq \frac{1}{(x+n+1)^2} \leq \frac{1}{(n+1)^2},$$
   donc $(R_n^{(1)})$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $]0, +\infty[$.
   Ainsi, le théorème de dérivation terme à terme s'applique, et on obtient que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, donc dérivable.

3. L'application du théorème de dérivation terme à terme a également montré que

$$\forall x > 0, \qquad S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2} = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+2)^2} + \cdots,$$

   et (toujours par le CSSA), cette série est du signe de son premier terme, donc $S'(x) < 0$ pour tout $x > 0$, ce qui montre que S est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.

4. La série $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément sur $]0, +\infty[$ car ses restes vérifient (toujours par le CSSA) :

$$|R_n(x)| \leq \frac{1}{x+n+1} \leq \frac{1}{n+1},$$

   donc (R_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur $]0, +\infty[$.
   On peut donc appliquer le théorème de la double limite en 0^+ et en $+\infty$.
   En $+\infty$, on a $f_n(x) \underset{x\to+\infty}{\to} 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $S(x) \underset{x\to+\infty}{\to} \sum_{n=0}^{+\infty} 0 = 0$.
   En 0^+, il y a un problème avec la fonction $f_0 : x \mapsto \frac{1}{x}$, qui n'a pas de limite finie en 0^+. On la sépare du reste : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $f_n(x) \underset{x\to 0^+}{\to} \frac{(-1)^n}{n}$, donc par le théorème de la double limite :

$$S(x) - \frac{1}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \underset{x\to 0^+}{\to} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \in \mathbb{R},$$

   ce qui montre que $S(x) \underset{x\to 0^+}{\to} +\infty$.

5. Par téléscopage :

$$\forall x > 0, \qquad S(x) + S(x+1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{x+n} = \frac{1}{x}.$$

   Par décroissance de S, on a donc

$$2S(x+1) \leq \frac{1}{x} = S(x) + S(x+1) \leq 2S(x),$$

   et donc

$$\forall x > 1, \qquad \frac{1}{2x} \leq S(x) \leq \frac{1}{2(x-1)},$$

   ce qui prouve finalement que $S(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2x}$.