CH11 : Séries de fonctions

Table des matières

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
On considère des fonctions f définies sur une partie A d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé E de dimension finie, et à valeurs dans $\mathbb{K}$.
On rappelle que $\mathcal{F}(A,\mathbb{K})$ désigne le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des fonctions $A \to \mathbb{K}$.
Vu qu'une série est un cas particulier de suite, tous les résultats de ce chapitre découlent directement du chapitre "Suites de fonctions". Et tout comme dans ce chapitre, on pourra généraliser les définitions et résultats à des fonctions $f : A \to F$, où F est aussi un $\mathbb{K}$-evn de dimension finie.
Pour une fonction bornée $f : A \to \mathbb{K}$, on rappelle la notation :

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in A} |f(x)|$$

("norme infinie" de f, appelée aussi "norme de la convergence uniforme").

I Différents types de convergence

Définition 1 (Série de fonctions)
Etant donnée une suite de fonctions $(f_n) \in \mathcal{F}(A,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$, on appelle **série de fonctions de terme général f_n** *la suite de fonctions $(S_n) \in \mathcal{F}(A,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ définie par :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k.$$

Cette série de fonctions est notée $\sum f_n$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, S_n est appelée la **somme partielle de rang n**.

Notation
Tout comme pour les séries numériques, les séries de fonctions pourront se noter $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$, ou plus simplement $\sum f_n$ (de toute façon, le rang à partir duquel une série est définie n'a pas d'importance pour définir la notion de convergence).

Définition 2 (Convergence simple, convergence uniforme)
Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(A,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$. Avec les notations précédentes :

- (i) *On dit que la série de fonctions $\sum f_n$* **converge simplement** *lorsque la suite de fonctions (S_n) converge simplement, c'est-à-dire lorsqu'il existe une fonction $S : A \to \mathbb{K}$ telle que pour tout $x \in A$, $S_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} S(x)$.*
  Cela revient à dire que pour tout $x \in A$, la série numérique $\sum\limits_{n\geq 0} f_n(x)$ converge.
- (ii) *On dit que la série de fonctions $\sum f_n$* **converge uniformément** *lorsque la suite de fonctions (S_n) converge uniformément, c'est-à-dire lorsqu'il existe une fonction $S : A \to \mathbb{K}$ telle que les $S_n - S$ sont bornées sur A à partir d'un certain rang et que $\|S_n - S\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.*

Notation
En cas de convergence simple, la **somme** de la série de fonctions $\sum f_k$ est la fonction $S : A \to \mathbb{K}$ définie par

$$\forall x \in A, \qquad S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x) = \lim_{n\to+\infty} S_n(x),$$

et on peut définir la **suite des restes** comme la suite de fonctions (R_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in A, \qquad R_n(x) = S(x) - S_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x).$$

Propriété 3 (La convergence uniforme entraîne la convergence simple)
Si $\sum f_n$ converge uniformément vers S, alors $\sum f_n$ converge simplement vers S.

Preuve
La convergence uniforme de la suite de fonctions (S_n) entraîne sa convergence simple.

Propriété 4 (Lien entre CVU et reste)
Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(A, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$. Alors, la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément si et seulement si elle converge simplement et la suite des restes (R_n) converge uniformément vers la fonction nulle.

Preuve
Supposons que la série $\sum f_n$ converge simplement, et notons $S : A \to \mathbb{K}$ la fonction somme. On a alors

$$(S_n) \text{ converge uniformément } \iff \|S_n - S\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \iff \|R_n\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \iff R_n \underset{CVU}{\longrightarrow} 0.$$

Exemple
Etudier la convergence simple et uniforme de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$, où $f_n : x \mapsto x^{2n}$.

- La série géométrique $\sum\limits_{n\geq 0} x^{2n}$ converge si et seulement si $|x^2| < 1$.
  Donc la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ converge simplement sur $]-1,1[$, vers la fonction $S : x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$.
- Pour la convergence uniforme, considérons la suite des restes :
  $$\forall (n,x) \in \mathbb{N}\times]-1,1[, \qquad R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) = \frac{x^{2n+2}}{1-x^2}.$$
  Puisque $R_n \underset{x\to 1^-}{\to} +\infty$, on a $\|R_n\|_{\infty,]-1,1[} = +\infty$, donc (R_n) ne converge pas uniformément vers 0, ce qui montre que $\sum f_n$ ne converge pas uniformément sur $]-1,1[$.
- Cependant, la série $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment $[-a,a]$ (avec $0 \leq a < 1$), puisque
  $$\forall (n,x) \in \mathbb{N} \times [-a,a], \qquad |R_n(x)| \leq \frac{a^{2n+2}}{1-a^2},$$
  donc $\|R_n\|_{\infty,[-a,a]} \leq \frac{a^{2n+2}}{1-a^2} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, ce qui montre bien la convergence uniforme de la suite (R_n) vers la fonction nulle sur $[-a,a]$.

Remarque
En général, il est difficile d'étudier la convergence uniforme d'une série de fonctions, car $\|S_n - S\|_\infty$ ne se calcule pas toujours explicitement. Mais on dispose d'une notion de convergence plus forte, et plus simple à vérifier.

Définition 5 (Convergence normale)
Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(A, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$. On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ **converge normalement** *lorsque les f_n sont bornées sur A et la série numérique $\sum \|f_n\|_\infty$ converge.*

ATTENTION !

- La notion de convergence normale n'a de sens que pour une **série** de fonctions, pas pour une suite de fonctions.
- Bien noter que $\sum \|f_n\|_\infty$ est une série numérique, et pas une série de fonctions, puisque $\|f_n\|_\infty$ ne dépend que de "n", et pas de "x".

Méthode (Pour étudier la convergence normale d'une série de fonctions)
Etablir la convergence normale d'une série de fonctions revient donc à trouver une suite (u_n) **indépendante de x** *telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in A,\ |f_n(x)| \leq u_n$ et la série numérique $\sum u_n$ converge.*

Théorème 6 (Lien entre les différentes convergences)
Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(A, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$.

(i) *Si* $\sum f_n$ *converge normalement, alors pour tout* $x \in A$, $\sum f_n(x)$ *converge absolument, donc* $\sum f_n$ *converge simplement.*

(ii) *Si* $\sum f_n$ *converge normalement, alors* $\sum f_n$ *converge uniformément.*

Remarque
La convergence normale d'une série de fonctions est donc la "meilleure" des convergences.

Preuve

(i) Pour tout $x \in A$, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ |f_n(x)| \leq \|f_n\|_\infty$, donc la convergence de la série numérique $\sum \|f_n\|_\infty$ implique celle de $\sum |f_n(x)|$, par comparaison de séries à termes positifs.
La série numérique $\sum f_n(x)$ converge donc absolument, ce qui entraîne en particulier sa convergence, donc la convergence simple de la série de fonctions $\sum f_n$.

(ii) Si $\sum f_n$ converge normalement, alors elle converge simplement par le point (i). Reste à montrer que la suite des restes converge uniformément vers 0. On a

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in A, \qquad |R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|f_k\|_\infty$$

(majoration licite car $\sum\limits_{k \geq 0} \|f_k\|_\infty$ converge par hypothèse de cv normale).

Puisque $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \|f_k\|_\infty$ ne dépend pas de x, on obtient que les fonctions R_n sont bornées sur A et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \|R_n\|_\infty \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|f_k\|_\infty,$$

et puisque $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \|f_k\|_\infty \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ (comme reste d'une série numérique convergente), on en déduit que $\|R_n\|_\infty \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, donc la suite (R_n) converge uniformément vers la fonction nulle, et donc que la série $\sum f_n$ converge uniformément (d'après la prop. 4).

Méthode (Pour étudier la convergence d'une série de fonctions)

1. *On étudie la convergence simple.*
2. *On étudie la convergence normale (afin d'obtenir la convergence uniforme).*
3. *Si la série ne converge pas normalement, on essaye de montrer "à la main" la convergence uniforme, en majorant le reste uniformément, c'est-à-dire en trouvant une suite* $a_n \to 0$ **indépendante de x** *telle que* $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in A,\ |R_n(x)| \leq a_n$.

Exemple
Etudier la convergence simple et uniforme de la série de fonctions $\sum\limits_{n \geq 0} f_n$, *où* $f_n : x \mapsto \dfrac{e^{-nx^2}}{1+n^2}$.

Pour tout réel x et tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{1+n^2},$$

donc $\sum\limits_{n \geq 0} \|f_n\|_{\infty,\mathbb{R}} \leq \sum\limits_{n \geq 0} \dfrac{1}{1+n^2} < +\infty$ (par comparaison à une série de Riemann convergente).
Donc la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.
En particulier, elle converge simplement et uniformément sur $\mathbb{R}$.

Exemple

Etudier la convergence simple et uniforme de la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$, *où* $f_n : x \mapsto \dfrac{(-1)^n x^2}{x^4+n}$.

- Attention, la série proposée ne converge pas absolument (sauf en $x=0$), car
$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad |f_n(x)| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{x^2}{n},$$
et $\sum_{n\geq 1} \frac{x^2}{n}$ diverge. *A fortiori*, cette série de fonctions ne converge donc pas normalement sur les intervalles non réduits à $\{0\}$.
- La convergence simple est donc de la semi-convergence, qu'on obtient en appliquant le critère spécial des séries alternées : pour tout réel x, la suite $n \mapsto \frac{x^2}{x^4+n} = a_n(x)$ et décroissante et tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$, donc la série $\sum_{n\geq 1} f_n(x) = \sum_{n\geq 1} (-1)^n a_n(x)$ converge.
Ainsi, la série $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.
- Pour étudier la convergence uniforme, on utilise la majoration des restes donnée par le critère spécial des séries alternées :
$$\forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}, \qquad |R_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)\right| \leq a_{n+1}(x) = \frac{x^2}{x^4+n+1}.$$
Ensuite, on détermine la borne supérieure de $a_{n+1} : x \mapsto \frac{x^2}{x^4+n+1}$ à l'aide d'une étude de fonction (avec dérivée et tableau de variations). On obtient facilement :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \|a_{n+1}\|_{\infty,\mathbb{R}} = a_{n+1}((n+1)^{1/4}) = \frac{1}{2\sqrt{n+1}}.$$
On en déduit la majoration :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \|R_n\|_{\infty,\mathbb{R}} \leq \frac{1}{2\sqrt{n+1}} \underset{n\to+\infty}{\to} 0,$$
ce qui montre la convergence uniforme de (R_n) vers la fonction nulle, et donc la convergence uniforme de $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}$.

ATTENTION !

Une série de fonctions $\sum f_n$ peut donc converger uniformément mais pas normalement !

II Continuité et double limite

Théorème 7 (Continuité d'une série de fonctions)
Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(A, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ *et soit* $a \in A$. *On suppose que :*

(i) *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, f_n *est continue en* a.

(ii) *La série* $\sum f_n$ *converge uniformément sur un voisinage* V *de* a *(relatif à* A*).*

Alors, la fonction somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ *est continue en* a.

ATTENTION !
Il ne suffit pas que les f_n soient continues en a à partir d'un certain rang, il faut qu'elle le soient **toutes**, car la fonction limite S est la somme infinie de **toutes** les f_n.

Preuve
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$ est continue en a (par somme de fonctions continues en a). De plus, la suite (S_n) converge uniformément vers S sur V par hypothèse, donc d'après le théorème de continuité d'une limite uniforme, S est continue en a.

On en déduit directement, comme dans le CH.10, des résultats sur la continuité globale (sur tout A) d'une série de fonctions :

Corollaire 8 (Continuité globale d'une série de fonctions)
Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(A, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$.
Si les f_n *sont continues sur* A *et si* $\sum f_n$ *converge uniformément sur* A, *alors la fonction somme* $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ *est continue sur* A.

Corollaire 9 (Continuité par convergence uniforme locale)
Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$, *où* I *est un intervalle de* $\mathbb{R}$.
Si les f_n *sont continues sur* I *et si* $\sum f_n$ *converge uniformément sur tout segment* $J \subset I$, *alors la fonction somme* $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ *est continue sur* I.

Remarque
Ce dernier corollaire est très utile en pratique, car souvent, lorsque I *est un intervalle ouvert et/ou non borné, la convergence uniforme de la série* $\sum f_n$ *n'a pas lieu sur tout* I *mais seulement sur tout segment* $[a, b] \subset I$, *ce qui suffit quand même à prouver que la fonction* $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ *est continue sur tout* I.

Théorème 10 (Théorème de la double limite pour les séries de fonctions)
Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(A, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ *et* $a \in \overline{A}$. *On suppose que :*

(i) *La série de fonctions* $\sum f_n$ *converge uniformément vers* S *sur un voisinage* V *de* a *(relatif à* A*).*

(ii) *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell_n \in \mathbb{K}$.

Alors, la série numérique $\sum \ell_n$ *converge vers* $\ell \in \mathbb{K}$, *et on a* $S(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$. *En d'autres termes :*

$$\lim_{x \to a} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\lim_{x \to a} f_n(x) \right).$$

Remarque

On donc affaire ici à un problème d'interversion "limite/série".

Preuve
Il suffit d'appliquer le théorème de la double limite à la suite des sommes partielles (S_n).

Remarque
Ca marche aussi en $+\infty$ (resp. $-\infty$) lorsque $A = I$ est un intervalle non majoré (resp. non minoré) de $\mathbb{R}$.

Exemple
Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\arctan(nx)}{n^2}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n : x \mapsto \frac{\arctan(nx)}{n^2}$ vérifie $\|f_n\|_{\infty,\mathbb{R}} = \frac{\pi}{2n^2}$, donc la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ (par comparaison à une série de Riemann convergente). On a donc convergence uniforme de la série $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ sur $\mathbb{R}$ (qui est bien un voisinage de $+\infty$).
De plus, chaque fonction f_n vérifie $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = \frac{\pi}{2n^2}$.
Donc d'après le théorème de la double limite :

$$\lim_{x\to+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\arctan(nx)}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty}\lim_{x\to+\infty}\frac{\arctan(nx)}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\pi}{2n^2} = \frac{\pi}{2}\zeta(2) = \frac{\pi^3}{12}.$$

III Intégration et dérivation

Propriété 11 (Convergence uniforme d'une série de primitives)
Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. On suppose que :

(i) *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur I.*

(ii) *La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment de I vers $S : I \to \mathbb{K}$.*

Pour tout $a \in I$, on note $F_n : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f_n(t)dt$. Alors, la série de fonctions $\sum F_n$ converge uniformément vers $T : x \mapsto \displaystyle\int_a^x S(t)dt$ sur tout segment de I.

Preuve
On applique la proposition correspondante du chapitre des suites de fonctions, à la suite des sommes partielles $(S_n) = \left(\sum_{k=0}^n f_k\right)_n$. Chaque S_n est continue sur I (comme somme finie de fonctions continues), et par hypothèse, la suite (S_n) converge uniformément vers S sur tout segment de I, donc la suite des primitives $(T_n) = \left(x \mapsto \int_a^x S_n\right)$ converge uniformément vers $x \mapsto \int_a^x S$. Or, par linéarité de l'intégrale, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in I$:

$$T_n(x) = \int_a^x S_n = \int_a^x \left(\sum_{k=0}^n f_k\right) = \sum_{k=0}^n F_k(x),$$

donc la suite (T_n) est bien la série des primitives $\sum F_n$, ce qui montre la convergence uniforme voulue.

Théorème 12 (Théorème d'intégration terme à terme sur un segment)
Soit (f_n) une suite de fonctions continues $[a, b] \to \mathbb{K}$. Si la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a, b]$, alors sa somme est continue, et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_a^b f_n(t)dt\right) = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right) dt.$$

Remarque
C'est un problème d'interversion "série/intégrale".

Preuve
On applique le théorème d'interversion limite/intégrale pour les suites de fonctions à la suite des sommes partielles $(S_n) = \left(\sum_{k=0}^n f_k\right)_n \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$. Par convergence uniforme de (S_n) vers S , on a $S \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$ et :

$$\int_a^b S_n(t)dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b S(t)dt.$$

Par linéarité de l'intégrale, ceci se réécrit :

$$\sum_{k=0}^n \left(\int_a^b f_k(t)dt\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b S(t)dt,$$

c'est-à-dire

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\int_a^b f_k(t)dt\right) = \int_a^b \left(\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(t)\right) dt.$$

Exemple
On considère la fonction $f : x \mapsto x^x = e^{x\ln(x)}$.

1. *Montrer que f possède un prolongement continu sur $[0, 1]$, que l'on notera encore f.*
2. *Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}$.*

1. Par composition, f est continue sur $]0,1]$.
   Avec le changement de variable $y = 1/x$, on a
   $$\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = \lim_{y\to+\infty} \frac{-\ln(y)}{y} = 0,$$
   donc f se prolonge continûment à $[0,1]$, en posant $f(0) = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln(x)} = e^0 = 1$.
2. Etant continue sur le segment $[0,1]$, la fonction f est bien intégrable sur $[0,1]$. De plus, on dispose de la relation :
   $$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad e^t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!}$$
   (déjà rencontrée en MP2I, et démontrée à la fin de ce chapitre). Donc
   $$\forall x \in [0,1], \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x\ln(x))^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x).$$
   En étudiant la fonction $\varphi : x \mapsto x\ln(x)$ sur $[0,1]$ (prolongée continûment en 0 en posant $\varphi(0) = 0$), on obtient facilement $\|\varphi\|_{\infty,[0,1]} = \frac{1}{e}$. Donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|u_n\|_{\infty,[0,1]} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(1/e)^n}{n!}$ converge (par le critère de d'Alembert), ce qui prouve la convergence normale, donc uniforme de la série $\sum u_n$ sur le segment $[0,1]$. Vu que les fonctions u_n sont continues sur $[0,1]$, on en déduit par le théorème d'intégration terme à terme que
   $$\int_0^1 f = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_0^1 u_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\int_0^1 x^n \ln^n(x)dx.$$
   Enfin, on termine le calcul avec des IPP successives (licite car les crochets ont toujours une limite nulle, donc finie en 0^+) :
   $$\int_0^1 x^n\ln^n(x)dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln^n(x)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{nx^n}{n+1}\ln^{n-1}(x)dx = -\int_0^1 \frac{nx^n}{n+1}\ln^{n-1}(x)dx$$
   $$= -\left[\frac{nx^{n+1}}{(n+1)^2}\ln^{n-1}(x)\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{n(n-1)x^n}{(n+1)^2}\ln^{n-2}(x)dx = \int_0^1 \frac{n(n-1)x^n}{(n+1)^2}\ln^{n-2}(x)dx$$
   $$= \cdots = (-1)^n \int_0^1 \frac{n(n-1)\cdots 2\times 1}{(n+1)^n} x^n dx = (-1)^n \frac{n!}{(n+1)^{n+1}}.$$
   Donc finalement :
   $$\int_0^1 f = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}.$$

Théorème 13 (Dérivation terme à terme d'une série de fonctions)
Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. On suppose que :

(i) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \in \mathcal{C}^1(I,\mathbb{K})$.

(ii) La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement vers $S : I \to \mathbb{K}$ sur I.

(iii) La série des dérivées $\sum f_n'$ converge uniformément sur tout segment de I vers $T : I \to \mathbb{K}$.

Alors la série $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment de I, la fonction S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, et $S' = T$. Autrement dit, on a
$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'.$$

Remarque
On a ici un problème d'interversion "série/dérivée".

Preuve
On applique le théorème de dérivation d'une limite de fonctions à la suite de fonctions $(S_n) = (\sum_{k=0}^{n} f_k)$. Les S_n sont bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur I (par somme), $(S_n') = (\sum_{k=0}^{n} f_k')$ (par linéarité de la dérivation), et on a par hypothèse convergence simple de (S_n) sur I et convergence uniforme de (S_n') sur tout segment de I, donc le théorème de dérivation des suites de fonctions montre que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $S' = T$, c'est-à-dire $\left(\lim\limits_{n\to+\infty} S_n\right)' = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n'$, ou encore

$$\left(\sum_{k=0}^{+\infty} f_k\right)' = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k'.$$

De plus, la convergence de (S_n) vers S est uniforme sur tout segment de I.

Exemple
Montrer que la fonction $S : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arctan(nx)}{n^2}$ *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur un domaine à préciser.*

Notons $f_n : x \mapsto \frac{\arctan(nx)}{n^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et appliquons le théorème de dérivation terme à terme sur des intervalles de $\mathbb{R}$ adéquats.

- Les fonctions f_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f_n' : x \mapsto \frac{1}{n(1+n^2x^2)}$.
- Vu que $|f_n(x)| \leq \frac{\pi}{2n^2}$ pour tout réel x et tout entier $n \geq 1$, la série $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ (et même normalement en fait).
- La série $\sum\limits_{n\geq 1} f_n'$ converge normalement sur tout segment de $I =]0, +\infty[$, car
$$0 < a \leq x \leq b \implies \forall x \in \mathbb{N}^*,\ |f_n'(x)| \leq \frac{1}{n(1+n^2a^2)} \leq \frac{1}{a^2n^3},$$
donc $\sum\limits_{n\geq 1} \|f_n'\|_{\infty,[a,b]} \leq \sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{a^2n^3} < +\infty$. Par parité des f_n', on a aussi la convergence uniforme de $\sum f_n'$ sur tout segment de $]-\infty, 0[$. On a donc convergence uniforme de la série des dérivées sur tout segment de $\mathbb{R}^*$.
- Attention, la convergence uniforme de $\sum\limits_{n\geq 1} f_n'$ n'a pas lieu sur tout segment de $\mathbb{R}$, car en $x = 0$, la série $\sum\limits_{n\geq 1} f_n'(0) = \sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge, donc il n'y a même pas convergence simple de la série des dérivées au voisinage de 0.

On conclut donc par le théorème de dérivation terme à terme (qui s'applique sur $]0, +\infty[$ et sur $]-\infty, 0[$) que $S \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^*, \mathbb{R})$ et que

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(1+n^2x^2)}.$$

Mais une question reste en suspens : la fonction S est-elle dérivable en 0 ? Cette question est légitime puisque les f_n sont toutes dérivables en 0, avec $f_n'(0) = 1/n$.
Le fait que $\sum\limits_{n\geq 1} f_n'(0) = \sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n} = +\infty$ nous pousse à dire que S n'est pas dérivable en 0, mais attention !

Il se pourrait que S soit quand même dérivable en 0 mais que $S'(0) \neq \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(0) \cdots$.

Supposons par l'absurde que S soit dérivable en 0. On a alors $S'(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{S(x) - S(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{S(x)}{x}$.
Pour tout entier $N \in \mathbb{N}^*$, on a, par positivité de arctan sur $\mathbb{R}^*$:

$$\frac{S(x)}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arctan(nx)}{n^2x} \geq \sum_{n=1}^{N} \frac{\arctan(nx)}{n^2x},$$

donc en passant à la limite lorsque $x \to 0^+$, on obtient $\forall N \in \mathbb{N}^*,\ S'(0) \geq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$, ce qui est impossible car $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Donc S n'est pas dérivable en 0, comme on l'avait pressenti.

Grâce au théorème de dérivation terme à terme, nous sommes maintenant en mesure de démontrer le résultat suivant, déjà rencontré :

Théorème 14 (Série exponentielle réelle)
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$.

Preuve
Appliquer le théorème de dérivation terme à terme à la série $\sum f_n$, avec $f_n : x \mapsto \frac{x^n}{n!}$.
Les fonctions f_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (car polynomiales), la série $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ (car $\sum \frac{x^n}{n!}$ converge absolument pour tout $x \in \mathbb{R}$ par le critère de d'Alembert).
En outre, on a $f_0' = 0$ et $f_n' = f_{n-1}$ pour tout $n \geq 1$, donc

$$\sum_{n\geq 0} f_n' = \sum_{n\geq 1} f_{n-1} = \sum_{n\geq 0} f_n,$$

et cette série converge normalement sur tout segment $[-a, a]$ (avec $a > 0$) puisque

$$\sum_{n\geq 0} \|f_n\|_{\infty,[-a,a]} = \sum_{n\geq 0} \frac{a^n}{n!} \text{ converge.}$$

Donc la série des dérivées converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}$, et on déduit par le théorème précédent que la fonction somme $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et vérifie :

$$S' = \sum_{n\geq 0} f_n' = \sum_{n\geq 0} f_n = S,$$

mais aussi $S(0) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{0^n}{n!} = 1$, donc $S = \exp$.

Terminons avec la "version $\mathcal{C}^k$" du théorème de dérivation terme à terme, qui en découle directement :

Corollaire 15 (Dérivation terme à terme version $\mathcal{C}^k$)
Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$, et soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose que :

(i) *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{K})$.*

(ii) *Pour tout $i \in \{0, \cdots, k-1\}$, la série $\sum\limits_{n\geq 0} f_n^{(i)}$ converge simplement vers une fonction $S_i : I \to \mathbb{K}$ sur I.*

(iii) *La série $\sum\limits_{n\geq 0} f_n^{(k)}$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction $S_k : I \to \mathbb{K}$.*

Alors, la fonction somme $S = S_0$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I, et pour tout $i \in \{0, \cdots, k\}$, $S^{(i)} = S_i$, c'est-à-dire

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)^{(i)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(i)}.$$

De plus, les séries $\sum\limits_{n\geq 0} f_n^{(i)}$ convergent uniformément sur tout segment de I pour tout $i \in \{0, \cdots, k\}$.

Preuve
Direct à partir du théorème connu pour les suites de fonctions.

Remarque
En particulier, si les f_n sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I, que les séries $\sum\limits_{n\geq 0} f_n^{(i)}$ convergent simplement pour

tout $i \in \mathbb{N}$ et uniformément sur tout segment de I à partir d'un certain rang $i = N$, alors la fonction somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I, et on a

$$\forall i \in \mathbb{N}, \qquad \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)^{(i)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(i)}.$$

IV Exemple d'étude de fonction définie par une série

On veut étudier la fonction $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$.

1. Montrer que S est bien définie sur $]0, +\infty[$.
2. Etudier la dérivabilité de S.
3. Etudier les variations de S.
4. Déterminer les limites de S aux bornes de son ensemble de définition.
5. En étudiant $S(x) + S(x+1)$, déterminer un équivalent de S en $+\infty$.

Solution : notons $S = \sum_{n \geq 1} f_n$, avec $f_n : x \mapsto \frac{(-1)^n}{x+n}$.

1. Pour tout réel $x > 0$, la suite $n \mapsto a_n(x) = \frac{1}{x+n}$ décroît et converge vers 0, donc la série $\sum_{n\geq 0} f_n(x) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n a_n(x)$ converge (par le CSSA).
   Ainsi, la série $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$, donc $S :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est bien définie.
2. Les f_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, de dérivée $f_n' : x \mapsto \frac{(-1)^{n+1}}{(x+n)^2}$. De plus, la série $\sum_{n\geq 0} f_n'$ converge uniformément sur $]0, +\infty[$ puisqu'elle converge simplement (par le CSSA), et ses restes vérifient
   $$\forall (n, x) \in \mathbb{N}\times]0, +\infty[, \qquad |R_n^{(1)}(x)| \leq \frac{1}{(x+n+1)^2} \leq \frac{1}{(n+1)^2},$$
   donc $(R_n^{(1)})$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $]0, +\infty[$.
   Ainsi, le théorème de dérivation terme à terme s'applique, et on obtient que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, donc dérivable.
3. L'application du théorème de dérivation terme à terme a également montré que
   $$\forall x > 0, \qquad S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2} = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+2)^2} + \cdots,$$
   et (toujours par le CSSA), cette série est du signe de son premier terme, donc $S'(x) < 0$ pour tout $x > 0$, ce qui montre que S est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.
4. La série $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément sur $]0, +\infty[$ car ses restes vérifient (toujours par le CSSA) :
   $$|R_n(x)| \leq \frac{1}{x+n+1} \leq \frac{1}{n+1},$$
   donc (R_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur $]0, +\infty[$.
   On peut donc appliquer le théorème de la double limite en 0^+ et en $+\infty$.
   En $+\infty$, on a $f_n(x) \underset{x\to+\infty}{\to} 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $S(x) \underset{x\to+\infty}{\to} \sum_{n=0}^{+\infty} 0 = 0$.
   En 0^+, il y a un problème avec la fonction $f_0 : x \mapsto \frac{1}{x}$, qui n'a pas de limite finie en 0^+. On la sépare du reste : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $f_n(x) \underset{x\to 0^+}{\to} \frac{(-1)^n}{n}$, donc par le théorème de la double limite :
   $$S(x) - \frac{1}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \underset{x\to 0^+}{\to} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \in \mathbb{R},$$
   ce qui montre que $S(x) \underset{x\to 0^+}{\to} +\infty$.

5. Par téléscopage :

$$\forall x > 0, \qquad S(x) + S(x+1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{x+n} = \frac{1}{x}.$$

Par décroissance de S, on a donc

$$2S(x+1) \leq \frac{1}{x} = S(x) + S(x+1) \leq 2S(x),$$

et donc

$$\forall x > 1, \qquad \frac{1}{2x} \leq S(x) \leq \frac{1}{2(x-1)},$$

ce qui prouve finalement que $S(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2x}$.