CH10 : Suites de fonctions

On considère ici des fonctions $f : A \to \mathbb{K}$, où A est une partie d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé E de dimension finie, et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On rappelle que $\mathcal{F}(A, \mathbb{K})$ désigne l'espace vectoriel des fonctions $A \to \mathbb{K}$.
On pourra généraliser les définitions et résultats à des fonctions $f : A \to F$, où F est aussi un $\mathbb{K}$-evn de dimension finie (voir le chapitre sur les fonctions vectorielles).

I Convergence simple et convergence uniforme

1) Définitions

Définition 1 (Convergence simple d'une suite de fonctions)
Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(A, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions et $f \in \mathcal{F}(A, \mathbb{K})$.
On dit que (f_n) **converge simplement** *vers f si pour tout $x \in A$, $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$ dans $\mathbb{K}$, c'est-à-dire :*

$$\forall x \in A,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \geq n_0 \implies |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon)\,.$$

On dit alors que f est la **limite simple** *de la suite (f_n) et on note $f_n \underset{CS}{\longrightarrow} f$ (ou encore $f_n \underset{CVS}{\longrightarrow} f$).*

Définition 2 (Convergence uniforme d'une suite de fonctions)
Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(A, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions et $f \in \mathcal{F}(A, \mathbb{K})$.
On dit que (f_n) **converge uniformément** *vers f si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \geq n_0 \implies \forall x \in A,\ |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.)$$

On dit alors que f est la **limite uniforme** *de la suite (f_n) et on note $f_n \underset{CU}{\longrightarrow} f$ (ou encore $f_n \underset{CVU}{\longrightarrow} f$).*

Propriété 3 (La convergence uniforme entraîne la convergence simple)
Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(A, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ et $f \in \mathcal{F}(A, \mathbb{K})$.

(i) Si (f_n) converge uniformément vers f, alors (f_n) converge simplement vers f.

(ii) Si elle existe, la limite uniforme est unique, et il s'agit de la limite simple.

2) Lien avec la norme infinie

Propriété 4 (Reformulation de la CU avec la norme infinie)
Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(A, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ et soit $f \in \mathcal{F}(A, \mathbb{K})$. Alors, on a équivalence entre :

(i) $f_n \underset{CU}{\longrightarrow} f$;

(ii) les fonctions $f_n - f$ sont bornées sur A à partir d'un certain rang et $\|f_n - f\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, où l'on note :

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)|.$$

Corollaire 5 (Lien avec la convergence dans l'evn $\mathcal{B}(A, \mathbb{K})$)
Notons $\mathcal{B}(A, \mathbb{K})$ l'espace vectoriel des fonctions bornées $A \to \mathbb{K}$. Alors, pour toute suite $(f_n) \in \mathcal{B}(A, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$, la convergence uniforme de (f_n) est exactement la convergence de la suite de vecteurs (f_n) dans l'espace vectoriel normé $(\mathcal{B}(A, \mathbb{K}), \|.\|_\infty)$.

Vocabulaire
C'est pourquoi la norme infinie est souvent appelée **norme uniforme**, ou **norme de la convergence uniforme**.

3) Méthodes

Méthode (Pour montrer la convergence uniforme d'une suite $(f_n) \in \mathcal{F}(A, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$)

- *On identifie la limite simple $f : A \to \mathbb{K}$, en calculant, pour x fixé dans A, la limite de $f_n(x)$ lorsque $n \to +\infty$.*
- *On montre que $\|f_n - f\|_\infty = \sup\limits_{x \in A} |f_n(x) - f(x)|$ tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$, en calculant ce sup (étude de la fonction $|f_n - f|$), ou simplement en le majorant par une suite (u_n) qui tend vers 0.*

Méthode (Pour montrer que (f_n) ne converge pas uniformément)

- *On identifie la limite simple $f : A \to \mathbb{K}$ (si elle n'existe pas, le problème est réglé et il n'y pas CVU).*
- *On montre que $\|f_n - f\|_\infty$ ne tend pas vers 0 lorsque $n \to +\infty$:*
  - *soit en le calculant explicitement (étude de la fonction $|f_n - f|$) ;*
  - *soit en déterminant une suite $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $|f_n(x_n) - f(x_n)|$ ne tend pas vers 0 lorsque $n \to +\infty$. Puisque $\|f_n - f\|_\infty = \sup\limits_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \geq |f_n(x_n) - f(x_n)|$, cela montre que $\|f_n - f\|_\infty$ ne tend pas vers 0.*

Notation
Pour toute fonction g, on adoptera la notation plus précise :

$$\|g\|_{\infty, A} = \sup_{x \in A} |g(x)|$$

lorsqu'il y a ambiguité sur le domaine A étudié.

Vocabulaire
Etant donné $(f_n) \in \mathcal{F}(A, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ et $B \subset A$, on dira que $\boldsymbol{(f_n)}$ **converge uniformément sur $\boldsymbol{B}$** pour signifier que la suite des restrictions $(f_{n|B}) \in \mathcal{F}(B, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ converge uniformément.
Bien entendu, si (f_n) converge uniformément vers f sur A, alors par restriction, (f_n) converge uniformément sur toute partie $B \subset A$, puisque

$$\|f_n - f\|_{\infty, B} = \sup_{x \in B} |f_n(x) - f(x)| \leq \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| = \|f_n - f\|_{\infty, A}.$$

II Continuité et double limite

1) Continuité d'une limite uniforme

Théorème 6 (Continuité d'une limite uniforme)
Soit $A \subset E$ (où E est un evn de dimension finie), $(f_n) \in \mathcal{F}(A, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$, $f \in \mathcal{F}(A, \mathbb{K})$, et $a \in A$.
Si les f_n sont continues en a, et si (f_n) converge uniformément vers f sur un voisinage V de a relatif à A, alors f est continue en a.

Corollaire 7 (Continuité globale d'une limite uniforme)
Soit $(f_n) \in \mathcal{C}^0(A, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$. Si (f_n) converge uniformément vers f sur A, alors $f \in \mathcal{C}^0(A, \mathbb{K})$.

Corollaire 8 (Continuité par convergence uniforme locale)
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et soit $(f_n) \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$. Si (f_n) converge uniformément vers f sur tout segment $[\alpha, \beta] \subset I$, alors $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$.

Méthode (Condition suffisante de non convergence uniforme)
Si une suite (f_n) de fonctions continues sur A converge simplement vers une fonction f discontinue, alors il ne peut pas y voir convergence uniforme sur A.
C'est le cas par exemple pour la suite $f_n : x \mapsto x^n$, qui converge simplement vers une fonction f discontinue en 1. Cette suite ne converge donc pas uniformément sur $[0, 1]$.

2) Double limite

Dans le paragraphe précédent, on a montré que si $f_n \underset{CU}{\longrightarrow} f$ au voisinage de a et que les (f_n) sont continues en a, alors f est continue en a, c'est-à-dire :

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) = \lim_{n \to +\infty} f_n(a),$$

ou encore :

$$\lim_{x \to a} \left(\lim_{n \to +\infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \to +\infty} \left(\lim_{x \to a} f_n(x) \right).$$

On a donc résolu un **problème d'interversion de limites**.
On va ici généraliser ce résultat aux cas suivants :

- a n'est plus nécessairement dans A, mais seulement dans l'adhérence $\overline{A}$;
- $a = \pm\infty$ lorsque $A \subset \mathbb{R}$.

Théorème 9 (Théorème de la double limite)
Soit $A \subset E$, où E est un evn de dimension finie. Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(A, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$, $f \in \mathcal{F}(A, \mathbb{K})$ et $a \in \overline{A}$.
On suppose que :

(i) (f_n) converge uniformément vers f sur un voisinage V de a relatif à A ;

(ii) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell_n \in \mathbb{K}$.

Alors, la suite (ℓ_n) converge vers $\ell \in \mathbb{K}$ et $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$. En d'autres termes :

$$\lim_{x \to a} \left(\lim_{n \to +\infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \to +\infty} \left(\lim_{x \to a} f_n(x) \right).$$

Théorème 10 (Théorème de la double limite en $+\infty$)
Soit I un intervalle non majoré de $\mathbb{R}$. Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$, $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$.
On suppose que :

(i) (f_n) converge uniformément vers f sur un voisinage de $+\infty$ (c'est-à-dire sur un intervalle du type $[R, +\infty[$) ;

(ii) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \ell_n \in \mathbb{K}$.

Alors, la suite (ℓ_n) converge vers $\ell \in \mathbb{K}$ et $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$. En d'autres termes :

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\lim_{n \to +\infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \to +\infty} \left(\lim_{x \to +\infty} f_n(x) \right).$$

III Intégration et dérivation d'une limite de fonctions

1) Intégration d'une limite

Propriété 11 (Convergence uniforme des primitives)
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soit $(f_n) \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$.
Si (f_n) converge uniformément vers $f : I \to \mathbb{K}$ sur tout segment de I, alors pour tout $a \in I$, la suite de fonctions (F_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in I,\ F_n(x) = \int_a^x f_n(t)dt$$

converge uniformément sur tout segment de I vers la fonction $F : I \to \mathbb{K}$ définie par

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

On déduit de ce résultat le théorème suivant :

Théorème 12 (Interversion limite/intégrale sur un segment)
Soit (f_n) une suite de fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{K}$ qui converge uniformément vers $f : [a, b] \to \mathbb{K}$. Alors f est continue et

$$\int_a^b f_n(t)dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(t)dt.$$

2) Dérivation d'une limite

Etant donnée une suite de fonctions dérivables (f_n), on veut savoir si sa limite f (simple et/ou uniforme) est toujours dérivable, et si on a $f' = \lim\limits_{n\to+\infty} f'_n$.
La réponse est **non, même si (f_n) converge uniformément**, comme le montre l'exemple suivant :
On dispose quand même du théorème suivant :

Théorème 13 (Dérivation d'une limite de fonctions)
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soit $(f_n) \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$. On suppose que :

- (i) *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.*
- (ii) *La suite (f_n) converge simplement vers une fonction $f : I \to \mathbb{K}$.*
- (iii) *La suite des dérivées (f'_n) converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction $g : I \to \mathbb{K}$;*

Alors, la suite (f_n) converge uniformément vers f sur tout segment de I, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, et $f' = g$. Autrement dit, on a

$$\lim_{n\to+\infty} f'_n = f' = \left(\lim_{n\to+\infty} f_n\right)'.$$

Corollaire 14 (Dérivation d'une limite, version $\mathcal{C}^k$)
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soit $(f_n) \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$, soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose que :

- (i) *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I.*
- (ii) *Pour tout $i \in \{0, \cdots, k-1\}$, la suite $(f_n^{(i)})$ converge simplement vers une fonction $g_i : I \to \mathbb{K}$.*
- (iii) *La suite des dérivées k-ièmes $(f_n^{(k)})$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction $g_k : I \to \mathbb{K}$;*

Alors, la fonction $f = g_0$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I, et pour tout $i \in \{0, \cdots k\}$, $f^{(i)} = g_i$. De plus, les suites $(f_n^{(i)})$ convergent uniformément sur tout segment de I.

IV Approximation uniforme sur un segment

1) Approximation par des fonctions en escalier

On rappelle les définitions suivantes (vues dans le cours de MP2I) :

Définition 15 (Fonction en escalier, fonctions continue par morceaux)
Soit $[a, b]$ *un segment de* $\mathbb{R}$*, avec* $a < b$.

- (i) *On dit qu'une fonction* $e : [a, b] \to \mathbb{K}$ *est* **en escalier** *lorsqu'il existe une subdivision de* $[a, b]$ *notée* $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = b$ *telle que pour tout* $i \in \{0, \cdots, k-1\}$*, la restriction* $e_{|]x_i, x_{i+1}[}$ *est constante.*
- (ii) *On dit qu'une fonction* $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ *est* **continue par morceaux** *lorsqu'il existe une subdivision de* $[a, b]$ *notée* $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = b$ *telle que pour tout* $i \in \{0, \cdots, k-1\}$*, la restriction* $f_{|]x_i, x_{i+1}[}$ *possède un prolongement continu sur* $[x_i, x_{i+1}]$ *(ce qui revient à dire que* f *est continue sur* $]x_i, x_{i+1}[$ *et possède une limite finie à droite en* x_i *et à gauche en* x_{i+1}*).*

Notation
On notera $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions en escalier de $[a, b]$ dans $\mathbb{K}$.
On notera $\mathcal{C}^0_{pm}([a, b], \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux de $[a, b]$ dans $\mathbb{K}$.
On notera $\mathcal{B}([a, b], \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions bornées de $[a, b]$ dans $\mathbb{K}$.

Rappelons sans démonstration le résultat suivant, vu en MP2I :

Propriété 16 (Espaces vectoriels des fonctions en escalier, continues par morceaux)
L'ensemble $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathcal{C}^0_{pm}([a, b], \mathbb{K})$*, qui est lui-même un sous-espace vectoriel de* $\mathcal{B}([a, b], \mathbb{K})$ *:*

$$\mathcal{E}([a, b], \mathbb{K}) \subset \mathcal{C}^0_{pm}([a, b], \mathbb{K}) \subset \mathcal{B}([a, b], \mathbb{K}).$$

On a aussi $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{K}) \subset \mathcal{C}^0_{pm}([a, b], \mathbb{K})$*.*

Théorème 17 (Approximation par des fonctions en escalier)
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ *une fonction continue par morceaux. Alors il existe une suite de fonctions en escalier* (e_n) *qui converge uniformément vers* f *sur* $[a, b]$*.*

Corollaire 18 (Densité des fcts. en escalier dans les fcts. continues par morceaux)
Le sev $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$ *est dense dans l'espace vectoriel normé* $(\mathcal{C}^0_{pm}([a, b], \mathbb{K}), \|.\|_\infty)$*.*

2) Approximation par des polynômes

Théorème 19 (Théorème d'approximation de Weierstrass)
Soit $[a, b]$ *un segment de* $\mathbb{R}$ *et* $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ *une fonction continue. Alors il existe une suite de fonctions polynomiales* (P_n) *qui converge uniformément vers* f *sur* $[a, b]$*.*

Corollaire 20 (Densité des fonctions polynomiales dans les fonctions continues)
Le sev $\mathcal{P}([a, b], \mathbb{K})$ *formé des fonctions polynomiales est dense dans l'espace vectoriel normé* $(\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{K}), \|.\|_\infty)$*.*