CH10 : Suites de fonctions

Table des matières

I Convergence simple et convergence uniforme 4
1) Définitions 4
2) Lien avec la norme infinie 6
3) Méthodes 7
II Continuité et double limite 9
1) Continuité d'une limite uniforme 9
2) Double limite 10
III Intégration et dérivation d'une limite de fonctions 13
1) Intégration d'une limite 13
2) Dérivation d'une limite 14
IV Approximation uniforme sur un segment 16
1) Approximation par des fonctions en escalier 16
2) Approximation par des polynômes 17

On considère ici des fonctions $f : A \to \mathbb{K}$, où A est une partie d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé E de dimension finie, et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On rappelle que $\mathcal{F}(A, \mathbb{K})$ désigne l'espace vectoriel des fonctions $A \to \mathbb{K}$.
On pourra généraliser les définitions et résultats à des fonctions $f : A \to F$, où F est aussi un $\mathbb{K}$-evn de dimension finie (voir le chapitre sur les fonctions vectorielles).

I Convergence simple et convergence uniforme

1) Définitions

Définition 1 (Convergence simple d'une suite de fonctions)
Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(A, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions et $f \in \mathcal{F}(A, \mathbb{K})$.
On dit que (f_n) **converge simplement** *vers f si pour tout $x \in A$, $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$ dans $\mathbb{K}$, c'est-à-dire :*

$$\forall x \in A,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\quad (n \geq n_0 \implies |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon)\,.$$

On dit alors que f est la **limite simple** *de la suite (f_n) et on note $f_n \underset{CS}{\longrightarrow} f$ (ou encore $f_n \underset{CVS}{\longrightarrow} f$).*

Exemple

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère $f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^n \end{array} \right.$.
  La suite (f_n) converge simplement vers la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } x \in [0,1[\\ 1 & \text{si } x = 1 \end{array} \right.$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{nx+1}{n} \end{array} \right.$.
  La suite (f_n) converge simplement vers $f : x \mapsto x$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin(nx) \end{array} \right.$.
  La suite (f_n) ne converge pas simplement car la suite réelle $(f_n(x))_n = (\sin(nx))_n$ diverge pour tout x non congru à 0 modulo π (voir les exercices du CH.01 sur les séries).

Remarque

- *Si elle existe, la limite simple f est unique (car pour tout $x \in A$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$ est unique).*
- *Une limite simple de fonctions continues n'est pas nécessairement une fonction continue (contre-exemple : la suite $f_n : x \mapsto x^n$ converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction f discontinue, alors que les f_n sont continues sur $[0,1]$). C'est pourquoi on introduit une "meilleure" notion de convergence pour les suites de fonctions : la convergence uniforme.*

Définition 2 (Convergence uniforme d'une suite de fonctions)
Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(A, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions et $f \in \mathcal{F}(A, \mathbb{K})$.
On dit que (f_n) **converge uniformément** *vers f si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\quad (n \geq n_0 \implies \forall x \in A,\ |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.)$$

On dit alors que f est la **limite uniforme** *de la suite (f_n) et on note $f_n \underset{CU}{\longrightarrow} f$ (ou encore $f_n \underset{CVU}{\longrightarrow} f$).*

<u>ATTENTION !</u>
Bien remarquer la position du quantificateur "$\forall x \in A$" dans la définition de la convergence uniforme. Ici, **l'entier n_0 ne dépend que de ε et pas de x**, alors que dans la définition de la convergence simple, l'entier n_0 dépend de ε et du point $x \in A$.

Remarque
Les notions de convergence simple et convergence uniforme se généralisent aux fonctions $A \subset E \to F$, où F est un evn de dimension finie. Il suffit de remplacer le module par une norme sur F dans les définitions.

Propriété 3 (La convergence uniforme entraîne la convergence simple)
Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(A, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ et $f \in \mathcal{F}(A, \mathbb{K})$.

(i) Si (f_n) converge uniformément vers f, alors (f_n) converge simplement vers f.

(ii) Si elle existe, la limite uniforme est unique, et il s'agit de la limite simple.

Preuve

(i) Supposons que $f_n \underset{CU}{\longrightarrow} f$, et fixons $x_0 \in A$. Par convergence uniforme, il existe un entier n_0 tel que pour tout entier n :

$$n \geq n_0 \implies \forall x \in A,\ |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

A fortiori, on a

$$n \geq n_0 \implies |f_n(x_0) - f(x_0)| \leq \varepsilon,$$

donc $f_n(x_0) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} f(x_0)$, et ce pour tout $x_0 \in A$, donc (f_n) converge simplement vers f.

(ii) Evident par unicité de la limite simple.

Exemple (Suite qui converge uniformément)
La suite de fonctions (f_n) définie par $f_n : x \mapsto \frac{nx+1}{n}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ car :

- elle converge simplement vers $f : x \mapsto x$ sur $\mathbb{R}$;
- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{n},$$

donc pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$n \geq \lfloor 1/\varepsilon \rfloor + 1 \implies \forall x \in \mathbb{R},\ |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon,$$

ce qui montre la convergence uniforme de (f_n) vers f.

ATTENTION !
La convergence simple n'implique pas la convergence uniforme en général ! (voir le contre-exemple suivant)

Exemple (Suite qui converge simplement mais pas uniformément)
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère $f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^n \end{array} \right.$. La suite (f_n) converge simplement vers la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } x \in [0,1[\\ 1 & \text{si } x = 1 \end{array} \right.$. Mais (f_n) ne converge pas uniformément : en effet, si c'était le cas, on aurait convergence uniforme vers la limite simple f, donc

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ \forall x \in [0,1], \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon,$$

et donc

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0\ \forall x \in [0,1[, \quad x^n \leq \varepsilon,$$

mais ceci est faux avec $\varepsilon = 1/4$ par exemple, car pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a en posant $x_n = (1/2)^{1/n}$: $x_n \in [0,1[$ et $x_n^n = \frac{1}{2} > \varepsilon$. Donc a fortiori :

$$\exists \varepsilon > 0\ (\varepsilon = 1/4),\ \forall n_0 \in \mathbb{N},\ \exists n \geq n_0,\ \exists x_n \in [0,1],\ |f_n(x_n) - f(x_n)| > \varepsilon,$$

ce qui montre bien que (f_n) ne converge pas uniformément.

2) Lien avec la norme infinie

Remarque (Interprétation graphique de la convergence uniforme)
Le fait que $f_n \underset{CU}{\longrightarrow} f$ signifie que pour tout $\varepsilon > 0$, le graphe de f_n est entièrement inclus dans un "tube" de rayon ε autour du graphe de f, pour n suffisamment grand.

Propriété 4 (Reformulation de la CU avec la norme infinie)
Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(A, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ et soit $f \in \mathcal{F}(A, \mathbb{K})$. Alors, on a équivalence entre :

- *(i) $f_n \underset{CU}{\longrightarrow} f$;*
- *(ii) les fonctions $f_n - f$ sont bornées sur A à partir d'un certain rang et $\|f_n - f\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, où l'on note :*

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)|.$$

Preuve

$\boxed{(i) \implies (ii)}$ Si $f_n \underset{CU}{\longrightarrow} f$, alors en posant $\varepsilon = 1$, il existe un entier n_0 tel que

$$n \geq n_0 \implies \forall x \in A,\ |f_n(x) - f(x)| \leq 1.$$

Ainsi, $f_n - f$ est bornée sur A dès que $n \geq n_0$.
De plus, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a l'équivalence :

$$\forall x \in A,\ |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \iff \sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon,$$

(dire que ε est un majorant de $|f_n - f|$ revient à dire que $\sup_A |f_n - f| \leq \varepsilon$, car $\sup_A |f_n - f|$ est le plus petit des majorants de $|f_n - f|$). Donc la convergence uniforme de f_n vers f se traduit par :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ \|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon,$$

c'est-à-dire $\|f_n - f\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

$\boxed{(ii) \implies (i)}$ Par hypothèse, il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $f_n - f$ est bornée sur A, donc $\|f_n - f\|_\infty$ existe. De plus, l'hypothèse $\|f_n - f\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ se traduit par :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \geq N,\ \forall n \geq n_0,\ \|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon,$$

c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \geq N,\ \forall n \geq n_0,\ \forall x \in A,\ |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon,$$

et c'est exactement la définition de la convergence uniforme de (f_n) vers f.

Corollaire 5 (Lien avec la convergence dans l'evn $\mathcal{B}(A, \mathbb{K})$)
Notons $\mathcal{B}(A, \mathbb{K})$ l'espace vectoriel des fonctions bornées $A \to \mathbb{K}$. Alors, pour toute suite $(f_n) \in \mathcal{B}(A, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$, la convergence uniforme de (f_n) est exactement la convergence de la suite de vecteurs (f_n) dans l'espace vectoriel normé $(\mathcal{B}(A, \mathbb{K}), \|.\|_\infty)$.

Vocabulaire
C'est pourquoi la norme infinie est souvent appelée **norme uniforme**, ou **norme de la convergence uniforme**.

Preuve
Pour toute suite $(f_n) \in \mathcal{B}(A, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ et pour toute fonction $f \in \mathcal{B}(A, \mathbb{K})$, on a

$$f_n \underset{CU}{\longrightarrow} f \iff \|f_n - f\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \iff f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f \text{ dans } (\mathcal{B}(A, \mathbb{K}), \|.\|_\infty).$$

Remarque

- *Si on suppose $f_n \in \mathcal{B}(A,\mathbb{K})$ à partir d'un certain rang et si $f_n \underset{CU}{\longrightarrow} f$, alors on a automatiquement $f \in \mathcal{B}(A,\mathbb{K})$ car :*
$$f = (f - f_n) + f_n,$$
et la somme de deux fonctions bornées sur A est bornée sur A.
- *D'après les résultats généraux sur la convergence des suites dans les espaces vectoriels normés (voir CH.05), on a, pour toutes suites $(f_n), (g_n)$ dans $\mathcal{F}(A,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$:*
$$\begin{cases} f_n \underset{CU}{\longrightarrow} f \\ g_n \underset{CU}{\longrightarrow} g \end{cases} \implies \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2,\ (\lambda f_n + \mu g_n) \underset{CU}{\longrightarrow} (\lambda f + \mu g).$$

3) Méthodes

Méthode (Pour montrer la convergence uniforme d'une suite $(f_n) \in \mathcal{F}(A,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$)

- *On identifie la limite simple $f : A \to \mathbb{K}$, en calculant, pour x fixé dans A, la limite de $f_n(x)$ lorsque $n \to +\infty$.*
- *On montre que $\|f_n - f\|_\infty = \sup\limits_{x\in A} |f_n(x) - f(x)|$ tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$, en calculant ce sup (étude de la fonction $|f_n - f|$), ou simplement en le majorant par une suite (u_n) qui tend vers 0.*

Méthode (Pour montrer que (f_n) ne converge pas uniformément)

- *On identifie la limite simple $f : A \to \mathbb{K}$ (si elle n'existe pas, le problème est réglé et il n'y pas CVU).*
- *On montre que $\|f_n - f\|_\infty$ ne tend pas vers 0 lorsque $n \to +\infty$:*
  - *soit en le calculant explicitement (étude de la fonction $|f_n - f|$) ;*
  - *soit en déterminant une suite $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $|f_n(x_n) - f(x_n)|$ ne tend pas vers 0 lorsque $n \to +\infty$. Puisque $\|f_n - f\|_\infty = \sup\limits_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| \geq |f_n(x_n) - f(x_n)|$, cela montre que $\|f_n - f\|_\infty$ ne tend pas vers 0.*

Exemple

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $f_n : \begin{cases} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{ne^{-x}+x^2}{n+x} \end{cases}$.
  La suite (f_n) converge simplement vers $f : x \mapsto e^{-x}$, et il y a convergence uniforme car
$$\forall x \in [0,1],\ \forall n \in \mathbb{N},\quad |f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{x^2 - xe^{-x}}{n+x} \right| \leq \frac{x^2 + xe^{-x}}{n+x} \leq \frac{2}{n+x} \leq \frac{2}{n},$$
  donc $\|f_n - f\|_\infty \leq \frac{2}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère $f_n : \begin{cases} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^{-nx}\sin(nx) \end{cases}$.
  La suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle $f : x \mapsto 0$ car $|f_n(x)| \leq e^{-nx} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ pour tout $x \in]0,1]$ et $f_n(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
  Mais cette convergence n'est pas uniforme car en testant la suite $(x_n) = (1/n) \in [0,1]^{\mathbb{N}^*}$:
$$|f_n(1/n) - f(1/n)| = f_n(1/n) = e^{-1}\sin(1) \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0.$$

ATTENTION !
La convergence uniforme d'une suite de fonctions dépend du domaine A sur lequel on se place !

Notation
Pour toute fonction g, on adoptera la notation plus précise :
$$\|g\|_{\infty,A} = \sup_{x\in A} |g(x)|$$
lorsqu'il y a ambiguité sur le domaine A étudié.

Vocabulaire
Etant donné $(f_n) \in \mathcal{F}(A,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ et $B \subset A$, on dira que **(f_n) converge uniformément sur B** pour signifier que la suite des restrictions $(f_{n|B}) \in \mathcal{F}(B,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ converge uniformément.
Bien entendu, si (f_n) converge uniformément vers f sur A, alors par restriction, (f_n) converge uniformément sur toute partie $B \subset A$, puisque

$$\|f_n - f\|_{\infty,B} = \sup_{x\in B} |f_n(x) - f(x)| \leq \sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| = \|f_n - f\|_{\infty,A}.$$

Exemple
La suite (f_n) définie par $f_n : x \mapsto x^n$:

- ne converge pas simplement sur $\mathbb{R}^+$ (par ex : $(f_n(2)) = (2^n)$ diverge).
- converge simplement mais pas uniformément sur $[0,1]$, vers la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1[\\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$.
- converge uniformément vers f sur tout intervalle de la forme $[0,a]$ avec $0 < a < 1$, car

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,a], \quad |f_n(x) - f(x)| = x^n,$$

donc $\|f_n - f\|_{\infty,[0,a]} = a^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Remarque
S'il n'y a pas convergence uniforme sur A, il se peut qu'il y a ait quand même convergence uniforme sur des domaines plus petits.

Exemple (Convergence uniforme sur une réunion finie de parties)
Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(A,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$, où $A = X_1 \cup \cdots \cup X_p$ avec $p \in \mathbb{N}^*$.
Si pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, (f_n) converge uniformément sur X_i, alors (f_n) converge uniformément sur A.
En effet :

- Tout d'abord, la suite (f_n) converge simplement sur A, car pour tout point $x \in A$, il existe $i \in [\![1,p]\!]$ tel que $x \in X_i$, donc par hypothèse de convergence uniforme, donc simple, sur X_i, la suite $(f_n(x))$ converge vers une limite, notée $f(x) \in \mathbb{K}$, d'où l'existence de la limite simple $f : A \to \mathbb{K}$.
- Montrons alors que $f_n \underset{CU}{\longrightarrow} f$: pour tout réel $\varepsilon > 0$ et pour tout entier $i \in [\![1,p]\!]$, il existe un entier n_i tel que

$$n \geq n_i \implies \forall x \in X_i,\ |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

On en déduit :

$$n \geq \max(n_1, \cdots, n_p) \implies \forall x \in A,\ |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon,$$

ce qui montre bien que (f_n) converge uniformément vers f sur A.

<u>ATTENTION !</u>
Le cas précédent ne fonctionne plus si on considère une réunion infinie de parties !
Par exemple, la suite $(f_n) = (x \mapsto x^n)$ converge uniformément (vers la fonction nulle) sur tout intervalle $[0,a]$ avec $0 \leq a < 1$, donc sur tout intervalle $[0, 1-\frac{1}{p}]$ avec $p \in \mathbb{N}^*$, mais ne converge pas uniformément sur $\bigcup_{p=1}^{+\infty} [0, 1-\frac{1}{p}] = [0,1[$, car (f_n) converge simplement sur $[0,1[$ vers $f : x \mapsto 0$, mais

$$\|f_n - f\|_{\infty,[0,1[} = \sup_{x\in[0;1[} x^n = 1 \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0.$$

II Continuité et double limite

1) Continuité d'une limite uniforme

Théorème 6 (Continuité d'une limite uniforme)
Soit $A \subset E$ (où E est un evn de dimension finie), $(f_n) \in \mathcal{F}(A, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$, $f \in \mathcal{F}(A, \mathbb{K})$, et $a \in A$.
Si les f_n sont continues en a, et si (f_n) converge uniformément vers f sur un voisinage V de a relatif à A, alors f est continue en a.

Preuve (dans la banque d'exercices INP)
Fixons un réel $\varepsilon > 0$. Vu que (f_n) converge uniformément vers f sur V, on a

$$\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0 \quad \|f_n - f\|_{\infty,V} \leq \varepsilon.$$

Montrons alors que f est continue en a, en majorant $|f(x) - f(a)|$. Pour cela, on utilise une fonction f_n proche de f au voisinage de a, par exemple f_{n_0}. On a :

$$\forall x \in A, \quad |f(x) - f(a)| \leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(a)| + |f_{n_0}(a) - f(a)|.$$

Or, si $x \in V$, on a $|f(x) - f_{n_0}(x)| \leq \|f_{n_0} - f\|_{\infty,V}$ et $|f_{n_0}(a) - f(a)| \leq \|f_{n_0} - f\|_{\infty,V}$ (puisque $a \in V$), donc

$$\forall x \in V, \quad |f(x) - f(a)| \leq 2\|f_{n_0} - f\|_{\infty,V} + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(a)| \leq 2\varepsilon + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(a)|.$$

Enfin, on utilise la continuité de f_{n_0} au point a :

$$\exists \delta > 0,\ \forall x \in A,\ \|x - a\|_E \leq \delta \implies |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(a)| \leq \varepsilon,$$

c'est-à-dire

$$\exists \delta > 0,\ \forall x \in A \cap B_f(a, \delta), \quad |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(a)| \leq \varepsilon.$$

Puisque V est un voisinage de a relatif à A, il existe $\delta' > 0$ tel que $A \cap B_f(a, \delta') \subset V$.
Donc en posant $\delta'' = \min(\delta, \delta') > 0$ on a

$$x \in A \cap B_f(a, \delta'') \implies \left\{ \begin{array}{lll} |f(x) - f(a)| & \leq & \varepsilon + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(a)| \\ |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(a)| & \leq & \varepsilon \end{array} \right. \implies |f(x) - f(a)| \leq 3\varepsilon,$$

d'où la continuité de f en a (pour obtenir ε au lieu de 3ε, il suffit de changer ε en $\varepsilon/3$ dès le début...).

Remarque

- *Ce résultat reste vrai si on suppose les f_n continues en a seulement à partir d'un certain rang.*
- *Ce résultat reste vrai pour les fonctions à valeurs dans un evn F de dimension finie.*
- *La fin de la preuve montre notamment que l'intersection de deux voisinages de a relatifs à A reste un voisinage de a relatif à A.*

Corollaire 7 (Continuité globale d'une limite uniforme)
Soit $(f_n) \in \mathcal{C}^0(A, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$. Si (f_n) converge uniformément vers f sur A, alors $f \in \mathcal{C}^0(A, \mathbb{K})$.

Preuve
Evident d'après le théorème 6 : les f_n sont continues en chaque point $a \in A$, donc f aussi (puisqu'il y a convergence uniforme sur tout A, qui est bien un voisinage de a relatif à A).

Remarque (Fermeture de $\mathcal{C}^0(A, \mathbb{K})$ dans $\mathcal{B}(A, \mathbb{K})$)
Si A est une partie compacte de E, alors $\mathcal{C}^0(A, \mathbb{K})$ est un sev fermé de l'evn $(\mathcal{B}(A, \mathbb{K}), \|.\|_\infty)$.
En effet, si A est compacte, alors $\mathcal{C}^0(A, \mathbb{K})$ est un sev de $\mathcal{B}(A, \mathbb{K})$ d'après le théorème des bornes atteintes (voir CH. 07). De plus, pour toute suite $(f_n) \in \mathcal{C}^0(A, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ qui converge vers f pour $\|.\|_\infty$, on a convergence uniforme de (f_n) vers f, donc $f \in \mathcal{C}^0(A, \mathbb{K})$ (par le corollaire précédent). Ceci montre que $\mathcal{C}^0(A, \mathbb{K})$ est fermé par la caractérisation séquentielle des fermés.

Corollaire 8 (Continuité par convergence uniforme locale)
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et soit $(f_n) \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$. Si (f_n) converge uniformément vers f sur tout segment $[\alpha, \beta] \subset I$, alors $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$.

Preuve
Encore le théorème 6 : tout point $a \in I$, il existe un voisinage de a relatif à I de la forme $V = [\alpha, \beta]$ avec $\alpha < \beta$ réels (faire un dessin en distinguant le cas où a est une extrémité de I). Chaque f_n est continue en a, et (f_n) converge uniformément vers f sur V, donc f est continue en a.

Remarque (IMPORTANT)
On n'a donc pas besoin d'avoir la convergence uniforme sur tout A pour montrer que la limite simple f est continue sur A. De la convergence uniforme "locale" (sur tout voisinage de tout point de A) suffit.

Exemple
Si $f_n :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est une suite de fonctions continues qui converge simplement vers $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, alors il suffit de montrer que (f_n) converge uniformément vers f sur chaque segment $[a, b]$ avec $0 < a < b$, pour en déduire que f est continue sur $]0, +\infty[$.

ATTENTION !

- Même si la convergence uniforme sur tout segment de I entraîne la continuité de f sur tout I, elle n'entraîne pas la convergence uniforme sur tout I ! Cela s'explique par le fait que la continuité d'une fonction est une notion locale (exprimée avec des voisinages de chaque point), alors que la convergence uniforme est une notion globale (exprimée avec une inégalité sur tout un intervalle).
- La convergence uniforme est une condition suffisante pour la continuité d'une limite simple, mais elle n'est pas nécessaire !

Méthode (Condition suffisante de non convergence uniforme)
Si une suite (f_n) de fonctions continues sur A converge simplement vers une fonction f discontinue, alors il ne peut pas y voir convergence uniforme sur A.
C'est le cas par exemple pour la suite $f_n : x \mapsto x^n$, qui converge simplement vers une fonction f discontinue en 1. Cette suite ne converge donc pas uniformément sur $[0, 1]$.

2) Double limite

Dans le paragraphe précédent, on a montré que si $f_n \underset{CU}{\longrightarrow} f$ au voisinage de a et que les (f_n) sont continues en a, alors f est continue en a, c'est-à-dire :

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) = \lim_{n \to +\infty} f_n(a),$$

ou encore :

$$\lim_{x \to a} \left(\lim_{n \to +\infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \to +\infty} \left(\lim_{x \to a} f_n(x) \right).$$

On a donc résolu un **problème d'interversion de limites**.
On va ici généraliser ce résultat aux cas suivants :

- a n'est plus nécessairement dans A, mais seulement dans l'adhérence $\overline{A}$;
- $a = \pm\infty$ lorsque $A \subset \mathbb{R}$.

Théorème 9 (Théorème de la double limite)
Soit $A \subset E$, où E est un evn de dimension finie. Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(A, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$, $f \in \mathcal{F}(A, \mathbb{K})$ et $a \in \overline{A}$. On suppose que :

(*i*) *(f_n) converge uniformément vers f sur un voisinage V de a relatif à A ;*

(*ii*) *pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell_n \in \mathbb{K}$.*

Alors, la suite (ℓ_n) converge vers $\ell \in \mathbb{K}$ et $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$. En d'autres termes :

$$\lim_{x \to a} \left(\lim_{n \to +\infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \to +\infty} \left(\lim_{x \to a} f_n(x) \right).$$

Remarque

- *Ce théorème reste vrai pour les fonctions à valeurs dans un evn de dimension finie F.*
- *Si $a \in A$, on retrouve le théorème de continuité d'une limite uniforme.*

Preuve (Hors programme)

- **Convergence de la suite (ℓ_n)** : soit $\varepsilon > 0$. Par convergence uniforme de (f_n) vers f sur le voisinage V, il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq n_0 \implies \forall x \in V,\ |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon,$$

ce qui entraîne notamment :

$$n, m \geq n_0 \implies \forall x \in V,\ |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon.$$

Pour $n, m \geq n_0$ fixés, on obtient, en passant à la limite lorsque $x \to a$ dans l'inégalité précédente (vraie pour tout $x \in V$) :

$$|\ell_n - \ell_m| \leq \varepsilon.$$

On a donc montré que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ (n, m \geq n_0 \implies |\ell_n - \ell_m| \leq \varepsilon).$$

Remarque
On dit alors que la suite $(\ell_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est "de Cauchy" (notion hors-programme en CPGE), et on va redémontrer ici le fait que toute suite de Cauchy dans $\mathbb{K}$ converge (on dit que $\mathbb{K}$ est "complet"), en utilisant le théorème de Bolzano-Weierstrass. On pourra à cet effet consulter l'exercice sur les suites de Cauchy dans la feuille du chapitre 5 (evn).

Cette propriété entraîne notamment que (ℓ_n) est bornée (puisque pour $\varepsilon = 1$, par exemple, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $(n \geq n_0 \implies |\ell_n - \ell_{n_0}| \leq 1 \implies \ell_n \in B_f(\ell_{n_0}, 1))$), donc par le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une suite extraite $(\ell_{\varphi(n)})$ qui converge vers $\ell \in \mathbb{K}$.
Reste à montrer que toute la suite (ℓ_n) converge vers ℓ : étant donné $\varepsilon > 0$, il existe (par convergence de la suite extraite) un entier $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq n_1 \implies |\ell_{\varphi(n)} - \ell| \leq \varepsilon/2,$$

ainsi qu'un entier $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$n, m \geq n_2 \implies |\ell_n - \ell_m| \leq \varepsilon/2.$$

Donc, par inégalité triangulaire et en utilisant le fait que $\varphi(n) \geq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$n \geq \max(n_1, n_2) \implies |\ell_n - \ell| \leq |\ell_n - \ell_{\varphi(n)}| + |\ell_{\varphi(n)} - \ell| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$

ce qui montre bien que $\ell_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$.

- **Limite de f en a** : soit $\varepsilon > 0$. On va montrer que $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$ lorsque x est voisin de a, à l'aide de l'inégalité :

$$|f(x) - \ell| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - \ell_N| + |\ell_N - \ell|,$$

où N est un entier bien choisi. On sait qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq n_0 \implies \forall x \in V, \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon/3$$

(d'après la convergence uniforme) et il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq n_1 \implies |\ell_n - \ell| \leq \varepsilon/3,$$

donc en posant $N = \max(n_0, n_1)$, on a

$$x \in V \implies |f(x) - \ell| \leq \frac{2}{3}\varepsilon + |f_N(x) - \ell_N|.$$

Enfin, la fonction f_N tend vers ℓ_N lorsque $x \to a$, donc il existe un voisinage V' de a relatif à A tel que

$$x \in V' \implies |f_N(x) - \ell_N| \leq \varepsilon/3.$$

Donc,

$$x \in V \cap V' \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon,$$

ce qui montre (puisque $V \cap V'$ est encore un voisinage de a relatif à A), que $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$.

Théorème 10 (Théorème de la double limite en $+\infty$)
Soit I un intervalle non majoré de $\mathbb{R}$. Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$, $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$.
On suppose que :

(i) (f_n) converge uniformément vers f sur un voisinage de $+\infty$ (c'est-à-dire sur un intervalle du type $[R, +\infty[$) ;

(ii) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \ell_n \in \mathbb{K}$.

Alors, la suite (ℓ_n) converge vers $\ell \in \mathbb{K}$ et $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$. En d'autres termes :

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\lim_{n \to +\infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \to +\infty} \left(\lim_{x \to +\infty} f_n(x) \right).$$

Preuve
Adapter la preuve du théorème de la double limite, en remplaçant les voisinages de a par des voisinages de $+\infty$ (ça marche encore car l'intersection de deux voisinages de $+\infty$ est encore un voisinage de $+\infty$).

Remarque
On dispose du même résultat en $-\infty$, si on a la convergence uniforme de (f_n) sur un intervalle du type $]-\infty, R]$.

III Intégration et dérivation d'une limite de fonctions

1) Intégration d'une limite

Propriété 11 (Convergence uniforme des primitives)
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soit $(f_n) \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$.
Si (f_n) converge uniformément vers $f : I \to \mathbb{K}$ sur tout segment de I, alors pour tout $a \in I$, la suite de fonctions (F_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in I,\ F_n(x) = \int_a^x f_n(t)dt$$

converge uniformément sur tout segment de I vers la fonction $F : I \to \mathbb{K}$ définie par

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Remarque

- *Le fait que les f_n soient continues sur I entraîne par convergence uniforme sur tout segment de I que f est continue sur I.*
- *Les F_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, en tant que primitives des fonctions continues f_n.*

Preuve
Soit J un segment inclus dans I, et soit $a \in I$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in J$, on a

$$|F_n(x) - F(x)| = \left|\int_a^x f_n(t) - f(t)dt\right| \leq |x-a| \sup_{t \in [a,x]} |f_n(t) - f(t)|.$$

Puisque J est borné, il existe $M_J > 0$ tel que $\forall x \in J,\ |x-a| \leq M_J$. Donc

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in J,\quad |F_n(x) - F(x)| \leq M_J \sup_{t \in [a,x]} |f_n(t) - f(t)|.$$

Or, il existe un segment J' tel que $(\{a\} \cup J) \subset J' \subset I$, donc

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in J,\quad |F_n(x) - F(x)| \leq M_J \|f_n - f\|_{\infty,J'},$$

c'est-à-dire

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \|F_n - F\|_{\infty,J} \leq M_J \|f_n - f\|_{\infty,J'}.$$

Puisque $\|f_n - f\|_{\infty,J'} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on en déduit $\|F_n - F\|_{\infty,J} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui montre la convergence uniforme voulue.

ATTENTION !
On a convergence uniforme des primitives (F_n) sur tout segment de I, mais pas nécessairement sur I !

On déduit de ce résultat le théorème suivant :

Théorème 12 (Interversion limite/intégrale sur un segment)
Soit (f_n) une suite de fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{K}$ qui converge uniformément vers $f : [a,b] \to \mathbb{K}$. Alors f est continue et

$$\int_a^b f_n(t)dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(t)dt.$$

Preuve
On applique la proposition précédente avec $I = [a,b]$: avec les mêmes notations, la suite des primitives (F_n) converge uniformément, donc simplement vers F sur le segment $[a,b]$. En particulier on a $F_n(b) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} F(b)$, ce qui donne le résultat voulu.

Remarque
Ce résultat se formule ainsi :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(t)dt=\int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(t)dt.$$

Il s'agit donc d'un problème d'interversion limite/intégrale.

<u>ATTENTION !</u>
Si on a seulement $f_n \xrightarrow[CS]{} f$ sur $[a,b]$, on peut avoir $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(t)dt \neq \int_a^b \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t)dt$.

Exemple
Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on considère $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$ affine par morceaux telle que $f_n(0)=0$, $f_n(1/2n)=n$ et $f_n(x)=0$ si $x\geq 1/n$.
Cette suite converge simplement vers la fonction nulle $f:x\mapsto 0$ sur $[0,1]$, et pourtant, on a

$$\int_0^1 f_n(t)dt=\frac{1}{2}\underset{n\to+\infty}{\not\to}\int_0^1 f(t)dt=0.$$

On en déduit notamment que (f_n) ne converge pas uniformément vers f (mais on le voit directement car $\|f_n-f\|_\infty=\sup\limits_{x\in[0,1]} f_n(x)=n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$).

2) Dérivation d'une limite

Etant donnée une suite de fonctions dérivables (f_n), on veut savoir si sa limite f (simple et/ou uniforme) est toujours dérivable, et si on a $f'=\lim\limits_{n\to+\infty} f_n'$.
La réponse est **non, même si (f_n) converge uniformément**, comme le montre l'exemple suivant :

Exemple (Limite uniforme non dérivable de fonctions dérivables)
Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $f_n:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & \sqrt{x^2+\frac{1}{n}}\end{array}\right.$. Chaque f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ (puisque $\sqrt{}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$), et (f_n) converge simplement vers la fonction valeur absolue $f:x\mapsto\sqrt{x^2}=|x|$, qui n'est pas dérivable (en 0). De plus, (f_n) converge uniformément vers f car

$$|f_n(x)-f(x)|=\frac{1/n}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}+\sqrt{x^2}}\leq\frac{1/n}{\sqrt{1/n}}=\sqrt{1/n},$$

donc $\|f_n-f\|_{\infty,\mathbb{R}}\leq\frac{1}{\sqrt{n}}\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

On dispose quand même du théorème suivant :

Théorème 13 (Dérivation d'une limite de fonctions)
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soit $(f_n)\in\mathcal{F}(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$. On suppose que :
- (i) *Pour tout $n\in\mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.*
- (ii) *La suite (f_n) converge simplement vers une fonction $f:I\to\mathbb{K}$.*
- (iii) *La suite des dérivées (f_n') converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction $g:I\to\mathbb{K}$;*

Alors, la suite (f_n) converge uniformément vers f sur tout segment de I, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, et $f'=g$. Autrement dit, on a

$$\lim_{n\to+\infty} f_n'=f'=\left(\lim_{n\to+\infty} f_n\right)'.$$

Remarque
Ce théorème répond donc à un problème d'interversion limite/dérivée.

Preuve
On applique la proposition 11 à la suite de fonctions (f_n'). Par hypothèse, les f_n' sont continues sur I et la suite (f_n') converge uniformément sur tout segment de I vers g. Donc pour $a \in I$ fixé, la suite $\left(x \mapsto \int_a^x f_n'(t)dt\right)_n = (x \mapsto f_n(x) - f_n(a))_n$ converge uniformément vers $x \mapsto \int_a^x g(t)dt$ sur tout segment de I. En outre, on a $f_n(a) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(a)$ (par convergence simple de f_n), donc (f_n) converge uniformément vers $x \mapsto f(a) + \int_a^x g(t)dt$ sur tout segment $J \subset I$, puisque

$$\forall x \in J, \quad \left|f_n(x) - f(a) - \int_a^x g(t)dt\right| \leq \left|f_n(x) - f_n(a) - \int_a^x g(t)dt\right| + |f_n(a) - f(a)|$$

$$\leq \sup_{x\in J}\left|f_n(x) - f_n(a) - \int_a^x g(t)dt\right| + |f_n(a) - f(a)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Par unicité de la limite simple, il vient :

$$\forall x \in I, \quad f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)dt,$$

et donc f est dérivable sur I avec $f' = g$. Enfin, g est continue donc f est de classe $\mathcal{C}^1$.

Corollaire 14 (Dérivation d'une limite, version $\mathcal{C}^k$)
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soit $(f_n) \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$, soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose que :

(*i*) *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I.*

(*ii*) *Pour tout $i \in \{0,\cdots,k-1\}$, la suite $(f_n^{(i)})$ converge simplement vers une fonction $g_i : I \to \mathbb{K}$.*

(*iii*) *La suite des dérivées k-ièmes $(f_n^{(k)})$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction $g_k : I \to \mathbb{K}$;*

Alors, la fonction $f = g_0$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I, et pour tout $i \in \{0,\cdots k\}$, $f^{(i)} = g_i$. De plus, les suites $(f_n^{(i)})$ convergent uniformément sur tout segment de I.

Preuve
Par récurrence sur k.

- Les cas $k = 0$ et $k = 1$ ont déjà été traités (théorème de continuité d'une limite uniforme pour le cas $k = 0$, théorème de dérivation d'une limite de fonctions pour le cas $k = 1$).
- Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons le théorème vrai au rang k, et montrons-le au rang $k+1$. Soit donc une suite de fonctions (f_n) de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ sur I, telles que pour tout $i \in \{0,\cdots,k\}$, $(f_n^{(i)})$ converge simplement vers une fonction $g_i : I \to \mathbb{K}$ et $(f_n^{(k+1)})$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction $g_{k+1} : I \to \mathbb{K}$. On pose $f = g_0$.
  La suite (f_n') vérifie bien l'hypothèse de récurrence au rang k, donc sa limite simple g_1 est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I, on a $g_1^{(i)} = g_{i+1}$ pour tout $i \in \{0,\cdots,k\}$, et les suites $((f_n')^{(i)}) = (f_n^{(i+1)})$ convergent uniformément sur tout segment de I.
  On termine en appliquant le théorème 13 à la suite (f_n) (on peut car $\mathcal{C}^{k+1} \subset \mathcal{C}^1$ et la suite (f_n') converge uniformément sur tout segment). On en déduit que la limite $f = g_0$ est dérivable avec $f' = g_1 \in \mathcal{C}^k(I,\mathbb{K})$, donc $f \in \mathcal{C}^{k+1}(I,\mathbb{K})$ et pour tout $i \in \{1,\cdots,k+1\}$, $f^{(i)} = g_1^{(i-1)} = g_i$. De plus, (f_n) converge uniformément sur tout segment de I, ce qui montre le théorème au rang $k+1$.

Remarque
En particulier, si les f_n sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I, que les $(f_n^{(i)})$ convergent simplement et que les $(f_n^{(i)})$ convergent uniformément sur tout segment de I à partir d'un certain rang $i = N$, alors la limite simple f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et pour tout $i \in \mathbb{N}$, $f^{(i)} = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n^{(i)}$, c'est-à-dire $\left(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n\right)^{(i)} = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n^{(i)}$.

IV Approximation uniforme sur un segment

1) Approximation par des fonctions en escalier

On rappelle les définitions suivantes (vues dans le cours de MP2I) :

Définition 15 (Fonction en escalier, fonctions continue par morceaux)
Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$, avec $a < b$.

- (i) *On dit qu'une fonction $e : [a, b] \to \mathbb{K}$ est* **en escalier** *lorsqu'il existe une subdivision de $[a, b]$ notée $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = b$ telle que pour tout $i \in \{0, \cdots, k-1\}$, la restriction $e_{|]x_i,x_{i+1}[}$ est constante.*
- (ii) *On dit qu'une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ est* **continue par morceaux** *lorsqu'il existe une subdivision de $[a, b]$ notée $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = b$ telle que pour tout $i \in \{0, \cdots, k-1\}$, la restriction $f_{|]x_i,x_{i+1}[}$ possède un prolongement continu sur $[x_i, x_{i+1}]$ (ce qui revient à dire que f est continue sur $]x_i, x_{i+1}[$ et possède une limite finie à droite en x_i et à gauche en x_{i+1}).*

Notation
On notera $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions en escalier de $[a, b]$ dans $\mathbb{K}$.
On notera $\mathcal{C}^0_{pm}([a, b], \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux de $[a, b]$ dans $\mathbb{K}$.
On notera $\mathcal{B}([a, b], \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions bornées de $[a, b]$ dans $\mathbb{K}$.

Rappelons sans démonstration le résultat suivant, vu en MP2I :

Propriété 16 (Espaces vectoriels des fonctions en escalier, continues par morceaux)
L'ensemble $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0_{pm}([a, b], \mathbb{K})$, qui est lui-même un sous-espace vectoriel de $\mathcal{B}([a, b], \mathbb{K})$:

$$\mathcal{E}([a, b], \mathbb{K}) \subset \mathcal{C}^0_{pm}([a, b], \mathbb{K}) \subset \mathcal{B}([a, b], \mathbb{K}).$$

On a aussi $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{K}) \subset \mathcal{C}^0_{pm}([a, b], \mathbb{K})$.

ATTENTION !
Une fonction en escalier $e : [a, b] \to \mathbb{R}$ est bornée mais n'atteint pas nécessairement ses bornes ! (à la différence d'une fonction continue).

Théorème 17 (Approximation par des fonctions en escalier)
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux. Alors il existe une suite de fonctions en escalier (e_n) qui converge uniformément vers f sur $[a, b]$.

Remarque
On peut reformuler ce résultat ainsi : pour toute fonction $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ continue par morceaux et pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe une fonction en escalier $e : [a; b] \to \mathbb{K}$ telle que $\|f - e\|_{\infty,[a,b]} \leq \varepsilon$.

Preuve
Soit $\varepsilon > 0$. Le but est de construire une fonction en escalier $e : [a, b] \to \mathbb{K}$ telle que $\|f - e\|_{\infty,[a,b]} \leq \varepsilon$.

- **Cas où f est continue** : si $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{K})$, alors f est uniformément continue par le théorème de Heine, donc il existe un réel $\delta > 0$ tel que

$$\forall (x, y) \in [a, b]^2, \qquad |x - y| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

Subdivisons alors le segment $[a, b]$ en n parties égales, où n est assez grand pour que $\frac{b-a}{n} \leq \delta$. On note $(x_k)_{0 \leq k \leq n}$ cette subdivision :

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \qquad x_k = a + k\left(\frac{b-a}{n}\right).$$

On définit la fonction en escalier $e : [a, b] \to \mathbb{K}$ égale à $f(x_k)$ sur chaque intervalle $[x_k, x_{k+1}[$ et telle que $e(b) = f(b)$. Par construction, on a

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \forall x \in [x_k, x_{k+1}[, \qquad |f(x) - e(x)| = |f(x) - f(x_k)| \leq \varepsilon$$

(car $|x - x_k| \leq x_{k+1} - x_k = \frac{b-a}{n} \leq \delta$). Egalement, $|f(b) - e(b)| = 0$, donc

$$\forall x \in [a, b], \qquad |f(x) - e(x)| \leq \varepsilon,$$

c'est-à-dire $\|f - e\|_{\infty,[a,b]} \leq \varepsilon$.

- **Cas où f est continue par morceaux** : si $f \in \mathcal{C}^0_{pm}([a, b], \mathbb{K})$, considérons une subdivision $(x_0, \cdots, x_n)$ de $[a, b]$ adaptée à f. Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $f|_{]x_k,x_{k+1}[}$ possède un prolongement continu $\tilde{f_k} \in \mathcal{C}^0([x_k, x_{k+1}], \mathbb{K})$. Etant donné un réel $\varepsilon > 0$, on peut construire pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$ une fonction en escalier $e_k \in \mathcal{E}([x_k, x_{k+1}], \mathbb{K})$ telle que $\|\tilde{f_k} - e_k\|_{\infty,[x_k,x_{k+1}]} \leq \varepsilon$ (d'après le point précédent). En considérant alors la fonction en escalier $e : [a, b] \to \mathbb{K}$ définie par

$$e(x) = \begin{cases} e_k(x) & \text{si } x \in]x_k, x_{k+1}[\\ f(x) & \text{si } x \in \{x_0, \cdots, x_n\} \end{cases},$$

on a bien

$$\|f - e\|_{\infty,[a,b]} \leq \varepsilon$$

car pour $x \in [a, b]$, $|f(x) - e(x)|$ vaut $|\tilde{f_k}(x) - e_k(x)|$ ou 0.

Corollaire 18 (Densité des fcts. en escalier dans les fcts. continues par morceaux)
Le sev $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$ est dense dans l'espace vectoriel normé $(\mathcal{C}^0_{pm}([a, b], \mathbb{K}), \|.\|_\infty)$.

Preuve
Reformulation immédiate.

ATTENTION !
$\mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$ n'est pas dense dans $(\mathcal{B}([a, b], \mathbb{K}), \|.\|_\infty)$. En effet, certaines fonctions bornées (comme l'indicatrice de $\mathbb{Q} \cap [a, b]$) ne sont pas approchables uniformément par des fonctions en escalier.
En fait, l'adhérence de $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$ **dans $(\mathcal{B}([a, b], \mathbb{K}), \|.\|_\infty)$** forme un sous-espace vectoriel contenant strictement $\mathcal{C}^0_{pm}([a, b], \mathbb{K})$ et contenu strictement dans $\mathcal{B}([a, b], \mathbb{K})$: c'est l'espace vectoriel des **fonctions réglées**.
Voir les exercices pour un exemple de fonction réglée mais pas continue par morceaux.

2) Approximation par des polynômes

Théorème 19 (Théorème d'approximation de Weierstrass)
Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ une fonction continue. Alors il existe une suite de fonctions polynomiales (P_n) qui converge uniformément vers f sur $[a, b]$.

Preuve
Avec les polynômes de Bernstein, voir les exercices.

Remarque
On peut reformuler ce résultat ainsi : pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{K})$ et tout réel $\varepsilon > 0$, il existe une fonction polynomiale $P : [a; b] \to \mathbb{K}$ telle que $\|f - P\|_{\infty,[a,b]} \leq \varepsilon$.

Corollaire 20 (Densité des fonctions polynomiales dans les fonctions continues)
Le sev $\mathcal{P}([a, b], \mathbb{K})$ formé des fonctions polynomiales est dense dans l'espace vectoriel normé $(\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{K}), \|.\|_\infty)$.

Preuve
Reformulation immédiate.